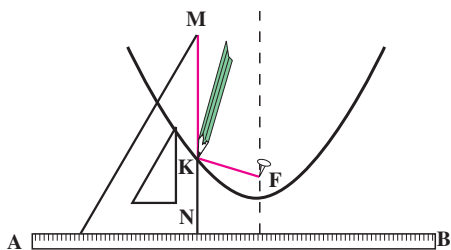
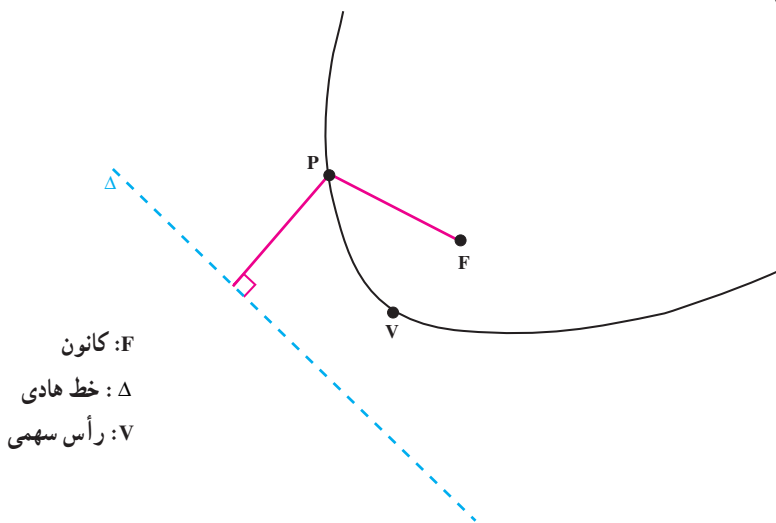


خط ثابت Δ در آن صفحه و یک نقطه ثابت F خارج از Δ و در آن صفحه به یک فاصله باشند. نقطه ثابت F را کانون و خط ثابت Δ را خط هادی سهمی می‌نامیم.



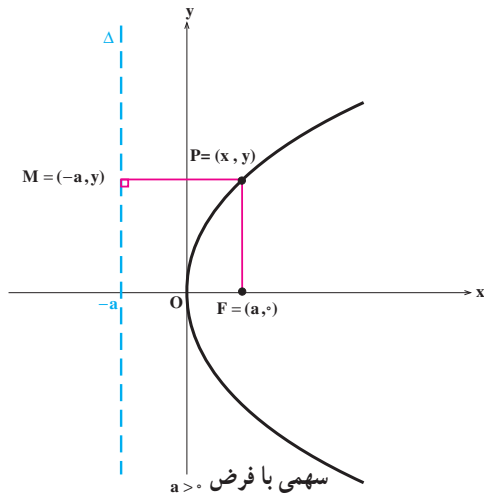
شکل ۱

برای رسم سهمی خط‌کشی مانند AB به عنوان هادی در نظر گرفته و یک تکه نخ به اندازه طول یک ضلع MN از یک گونیا را نیز انتخاب می‌کنیم. یک سر نخ را در نقطه M ثابت می‌کنیم و سر دیگر را در نقطه F ، یعنی کانون سهمی. مداد را مطابق شکل در یک نقطه K قرار داده به‌طوری‌که تکه نخ بین نقاط F ، K و M محکم قرار گرفته باشد. با لغزاندن گونیا در امتداد AB نوک مداد یک سهمی رسم می‌کند.

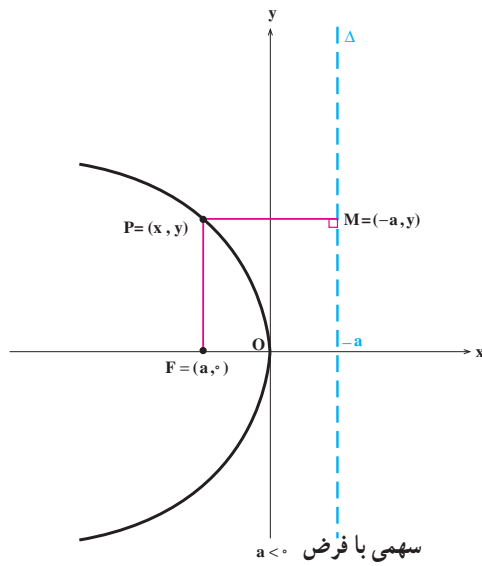


شکل ۲

حال معادله سهمی را در یک دستگاه مختصات قائم پیدا می‌کنیم. کانون سهمی را نقطه F به مختصات $(a, 0)$ می‌گیریم و رأس سهمی را در مبدأ مختصات فرض می‌کنیم. لذا خط هادی آن خط $x = -a$ خواهد بود. بسته به این‌که $a > 0$ یا $a < 0$ دهانه سهمی به ترتیب به سمت راست و یا به سمت چپ باز می‌شود (به شکل‌های ۳ و ۴ نگاه کنید).



شکل ۳



شکل ۴

حال در هر دو حالت نقطه $P = (x, y)$ روی سهمی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$|PM| = |PF|$$

اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x+a)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2},$$

اگر و فقط اگر

$$(x+a)^2 = (x-a)^2 + y^2,$$

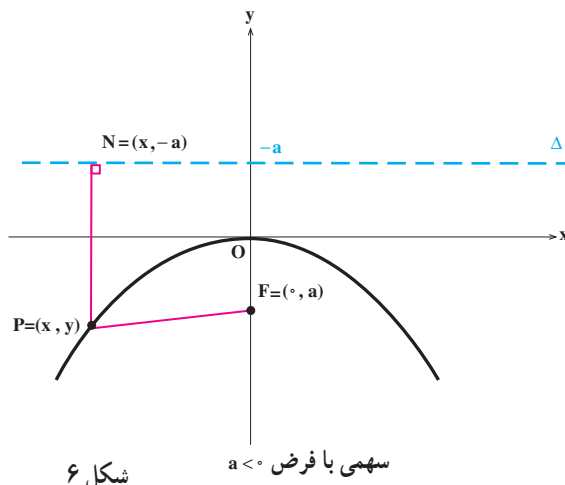
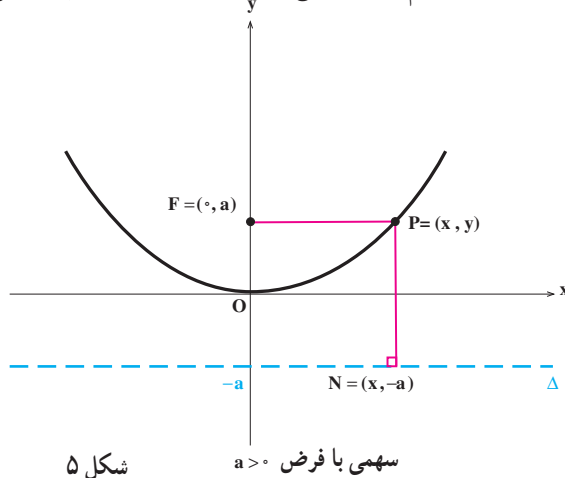
اگر و فقط اگر

$$x^2 + 2ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2,$$

اگر و فقط اگر

$$y^2 = 4ax.$$

بدین ترتیب رابطه اخیر معادله سهمی است. ممکن است قانون سهمی را روی محور y ها بگیریم. یعنی قانون را نقطه F به مختصات $(0, a)$ بگیریم. اگر رأس سهمی در مبدأ مختصات باشد، خط هادی آن خط $y = -a$ خواهد بود و بازهم بسته به این که $a > 0$ یا $a < 0$ حالت های زیر را داریم.



در این حالت نیز با محاسباتی مشابه قبل به دست می‌آوریم

$$x^2 = 4ay.$$

اکنون در زیر خلاصه‌ای از آنچه را که در این بخش مطرح شد می‌آوریم.

معادله استاندارد سهمی

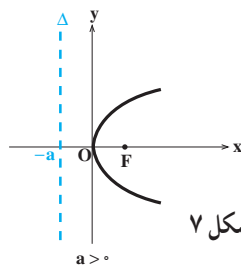
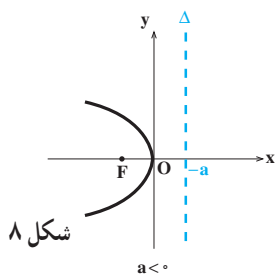
$$(1) \quad y^2 = 4ax.$$

رأس: $(0, 0)$.

کانون: $F = (a, 0)$.

خط هادی: $x = -a$.

محور تقارن: محور x ها.



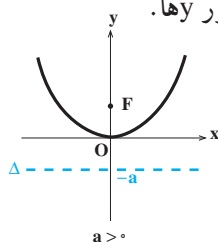
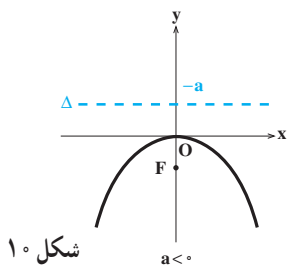
$$(2) \quad x^2 = 4ay.$$

رأس: $(0, 0)$.

کانون: $F = (0, a)$.

خط هادی: $y = -a$.

محور تقارن: محور y ها.

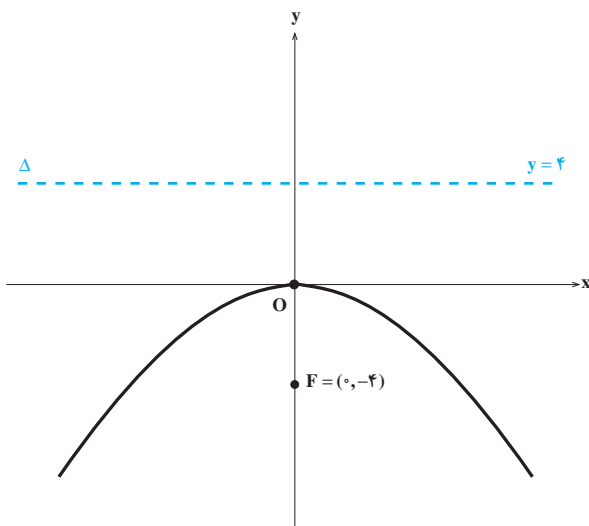


مثال ۱. می‌خواهیم سهمی $x^2 = -16y$ را رسم کنیم و کانون و خط هادی آن را مشخص کنیم. توجه می‌کنیم که معادله فوق معادله یک سهمی است که کانون آن روی محور y ها قرار دارد. از طرفی

$$4a = -16,$$

$$a = -4.$$

پس $F = (0, -4)$ کانون این سهمی و خط به معادله $y = -(-4) = 4$ خط هادی آن است.



شکل ۱۱

مثال ۲. می‌خواهیم معادله یک سهمی را که مبدأ مختصات رأس آن بوده و محور y ها محور تقارن آن باشد و از نقطه $(-1, -5)$ بگذرد پیدا کنیم و مختصات کانون و خط هادی آن را به دست آوریم. توجه می‌کنیم که معادله این سهمی به صورت $x^2 = 4ay$ است. اکنون با توجه به این که مختصات نقطه $(-1, -5)$ در معادله اخیر صدق می‌کند، a به دست می‌آید:

$$(-1)^2 = 4a(-5),$$

$$1 = -20a,$$

$$a = -5.$$

پس معادله این سهمی $x^2 = -20y$ است. واضح است که $F = (0, -5)$ کانون این سهمی و خط به معادله $y = 5$ خط هادی آن است.



۱. سهمی‌های زیر را رسم کرده، مختصات کانون و معادله خط هادی آنها را نیز تعیین کنید.

(الف) $y^2 = 4x$ ، (ب) $x^2 = 4y$ ، (ج) $x^2 = -8y$ ، (د) $x^2 = 58y$ ،
(هـ) $y^2 = -93x$ ، (و) $x^2 = -105y$.

۲. معادله هر یک از سهمی‌های زیر را که محور تقارن آنها مشخص شده و یک نقطه از آنها نیز داده شده است پیدا کنید. در هر مورد مختصات کانون و معادله خط هادی را نیز تعیین کنید.

(الف) محور x ها، $(4, 8)$ ، (ب) محور y ها، $(4, 2)$ ،
(ج) محور x ها، $(-5, 10)$ ، (د) محور x ها، $(-3, 6)$ ،
(هـ) محور y ها، $(-6, -9)$ ، (و) محور x ها، $(-6, -12)$.

۳. با استفاده از تعریف سهمی، معادله یک سهمی را پیدا کنید که کانون آن نقطه $(2, 2)$ و خط هادی آن $y = 4$ باشد.

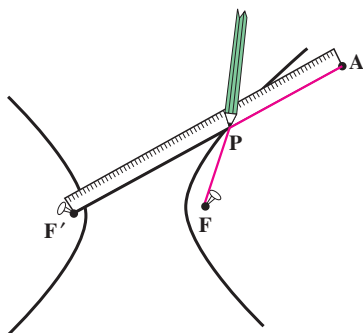
۴. با استفاده از تعریف سهمی، معادله یک سهمی را پیدا کنید که کانون آن نقطه $(6, 4)$ و خط هادی آن $x = 2$ باشد.

۴.۳ هذلولی

هذلولی یکی دیگر از مقاطع مخروطی است که از دو قطعه متمایز تشکیل شده است. ابتدا به تعریف آن توجه کنید.

تعریف. هذلولی مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که قدر مطلق تفاضل فاصله آنها از دو نقطه ثابت و متمایز F و F' در آن صفحه به نام کانون مقدار مثبت ثابتی باشد.

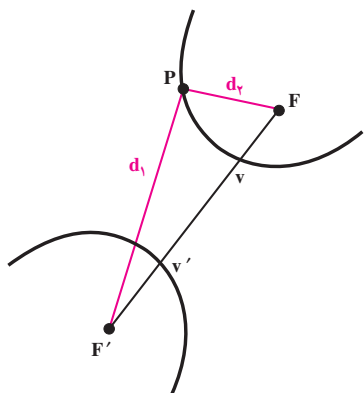
برای رسم یک هذلولی یک خط کش و یک تکه نخ که طول آن از طول خط کش کوتاهتر است انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که تفاضل طول خط کش و قطعه نخ همان مقدار ثابت مورد نظر باشد. یک سر نخ را در نقطه A ثابت کرده، سر دیگر آن را در یکی از کانونهای هذلولی ثابت می‌کنیم. یک سر دیگر



شکل ۱

خط کش را هم در کانون دیگر ثابت می کنیم. مطابق شکل یک مداد را در کناره خط کش و نخ قرار می دهیم و با دوران خط کش در نقطه F' مسیری که مداد ایجاد می کند و یک شاخه از هذلولی است را رسم می کنیم (شاخه دیگر هذلولی مشابهاً با تعویض نقطه ثابت خط کش به F حاصل می شود). حال نشان می دهیم که واقعاً یک هذلولی رسم شده است. برای این منظور کافی است نشان دهیم که نقطه P روی هذلولی قرار دارد، یعنی قدر مطلق تفاضل فاصله P از F و F' برابر مقدار ثابت (تفاضل طول خط کش و طول نخ) است و این نیز برقرار است زیرا

$$\begin{aligned} |PF'| - |PF| &= |PF'| + |PA| - |PF| - |PA| \\ &= |AF'| - (|PF| + |PA|) \\ &= (\text{طول نخ}) - (\text{طول خط کش}) \\ &= \text{مقدار ثابت.} \end{aligned}$$

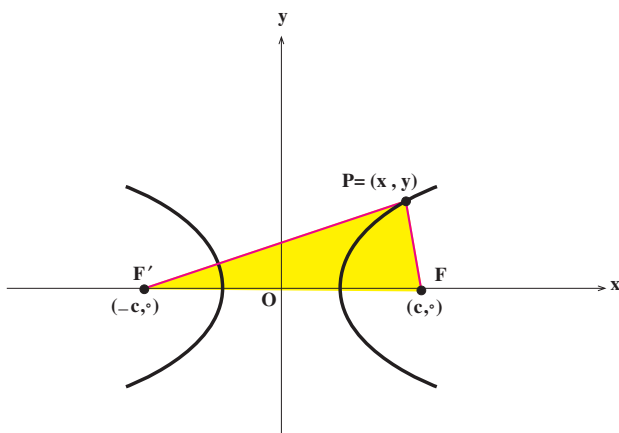


در شکل رویه رو F و F' کانونهای هذلولی هستند و V و V' نیز رؤوس هذلولی نامیده می شوند.

$$|d_1 - d_2| = \text{ثابت}$$

شکل ۲

حال معادله هذلولی را در یک دستگاه مختصات قائم پیدا می کنیم. کانونهای هذلولی را دو نقطه $F = (c, 0)$ و $F' = (-c, 0)$ می گیریم.



شکل ۳

نقطه دلخواه P را روی هذلولی مذکور در نظر می گیریم. فرض می کنیم مقدار تفاضل ثابت با $2a$ نشان داده شود که در آن a مثبت است. ملاحظه می کنیم که

$$|PF'| - |PF| = |FF'|,$$

$$2a < 2c,$$

$$a < c.$$

حال نقطه $P = (x, y)$ روی هذلولی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$||PF'| - |PF|| = 2a,$$

اگر و فقط اگر

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a,$$

اگر و فقط اگر

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2),$$

اگر و فقط اگر

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

برای ساده تر شدن معادله، با توجه به این که $c^2 - a^2 > 0$ ، می توانیم فرض کنیم $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

پس

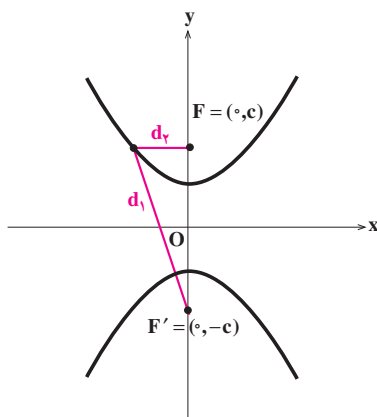
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

معادله هذلولی مذکور می باشد. از معادله فوق نتیجه می شود که هذلولی در نقاط $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ (رؤوس) محور x ها را قطع می کند ولی محور y ها را قطع نمی کند.

اگر کانونهای هذلولی را روی محور y ها انتخاب کنیم، یعنی فرض کنیم $F = (0, c)$ و $F' = (0, -c)$ کانونها باشند، به طور مشابه معادله هذلولی به صورت زیر حاصل می شود

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

که در آن $c > 0$ و داریم $b^2 = c^2 - a^2$. مرکز هذلولی نیز هم چنان در مبدأ مختصات قرار دارد.



شکل ۴

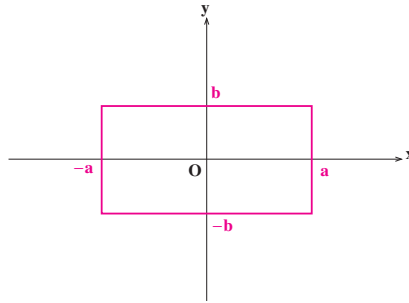
برای این که رسم نمودار هذلولی با سهولت و دقت بیشتری انجام شود، ملاحظات زیر را معمول می داریم. مثلاً هذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ را در نظر می گیریم و ابتدا y را بر حسب x استخراج می کنیم:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

اگر $|x|$ بزرگ شود و به سمت بینهایت میل کند عبارت زیر رادیکال به ۱ میل خواهد کرد. پس برای مقادیر بزرگ $|x|$ ، نمودار هذلولی نزدیک خطهای زیر است:

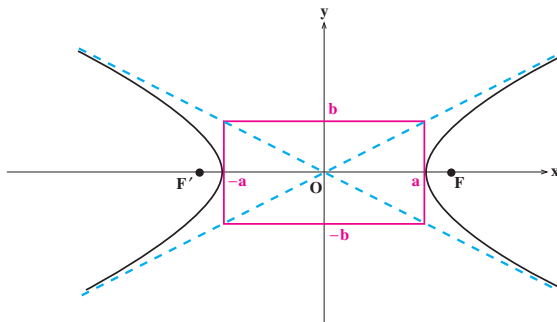
$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

این خطوط مجانبهای هذلولی نامیده می شوند، یعنی هذلولی به این خطوط رفته رفته نزدیک می شود. برای سهولت در رسم مجانبها و سپس هذلولی می توانیم ابتدا مستطیل صفحه بعد را رسم کنیم.



شکل ۵

سپس اقطار این مستطیل که همان مجانبها هستند را رسم کرده و هذلولی را رسم می‌کنیم.

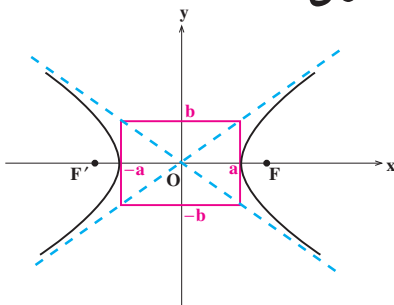


شکل ۶

با استفاده از رابطه $c^2 = a^2 + b^2$ ، به راحتی می‌توان دید اگر قوسی بر مرکز مبدأ مختصات و شعاعی برابر نصف قطر مستطیل رسم کنیم، آنگاه نقطه تقاطع آن با محور xها، کانونهای هذلولی را مشخص می‌کند.

اکنون در زیر خلاصه‌ای از آنچه در این بخش مطرح کردیم را بیان می‌کنیم.

معادله استاندارد هذلولی



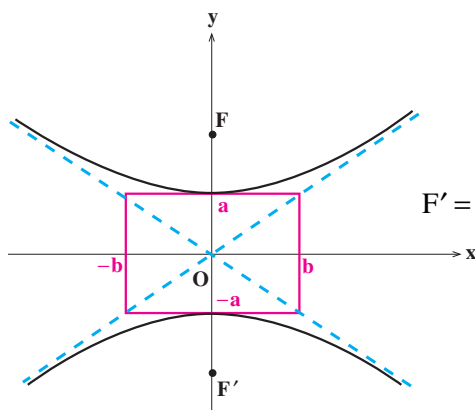
شکل ۷

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

رؤوس: $(a, 0)$ و $(-a, 0)$.

کانونها: $F = (c, 0)$ و $F' = (-c, 0)$.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

رؤوس: $(0, a)$ و $(0, -a)$

کانونها: $F = (0, c)$ و $F' = (0, -c)$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

شکل ۸

در هر دو حالت محور x ها و y ها محورهای تقارن و مبدأ مختصات مرکز تقارن هذلولی است.

مثال ۱. در زیر هذلولی $9x^2 - 16y^2 = 144$ را رسم می کنیم. برای این منظور توجه می کنیم

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{از طرفی}$$

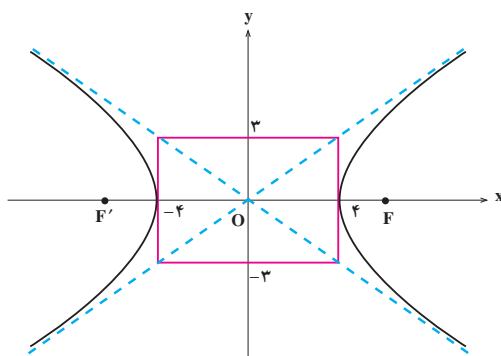
$$c^2 = a^2 + b^2,$$

$$c^2 = 16 + 9 = 25,$$

$$c = 5.$$

پس $F = (5, 0)$ و $F' = (-5, 0)$ کانونهای هذلولی هستند و نمودار آن به صورت زیر

است:



شکل ۹



تمرین

۱. هریک از هذلولی‌های زیر را رسم کنید.

$$\text{الف) } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{ب) } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\text{ج) } \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1 \quad \text{د) } \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

۲. هریک از هذلولی‌های زیر را رسم کنید.

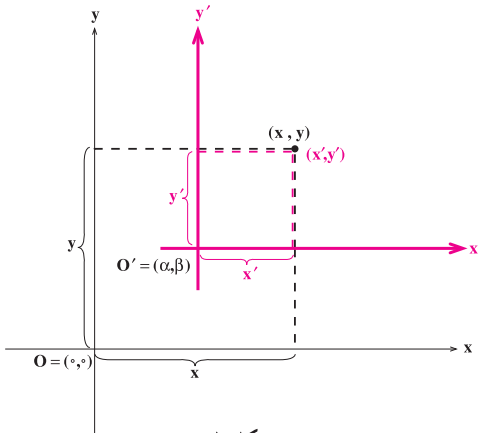
$$\text{الف) } 4x^2 - y^2 = 16 \quad \text{ب) } x^2 - 9y^2 = 9$$

$$\text{ج) } 9y^2 - 16x^2 = 144 \quad \text{د) } 4y^2 - 25x^2 = 100$$

۵.۳ انتقال محورهای مختصات

تاکنون معادلات مقاطع مخروطی را در حالتی یافته‌ایم که مرکز آنها در مبدأ مختصات قرار داشته و محورهای آنها موازی محورهای مختصات بوده است. در این بخش می‌خواهیم معادلات مقاطع مخروطی را در حالتی پیدا کنیم که محورهای آنها موازی محورهای مختصات بوده و مرکز آنها نقطه‌ای دلخواه باشد.

برای این منظور از انتقال محورهای مختصات استفاده می‌کنیم. فرض کنیم مبدأ مختصات، یعنی نقطه $O = (0,0)$ را به نقطه $O' = (\alpha, \beta)$ منتقل کنیم. البته این انتقال را طوری انجام می‌دهیم که محورها در حالت انتقال یافته با محورهای قبل از انتقال موازی باشند. می‌خواهیم بررسی کنیم که



شکل ۱

اگر یک نقطه در صفحه، نسبت به دستگاه اولیه دارای مختصات (x, y) باشد و نسبت به دستگاه جدید منتقل شده دارای مختصات (x', y') ، آنگاه این دو مختصات چه رابطه‌ای با یکدیگر دارند. با توجه به شکل ۱ این رابطه به صورت زیر به دست می‌آید:

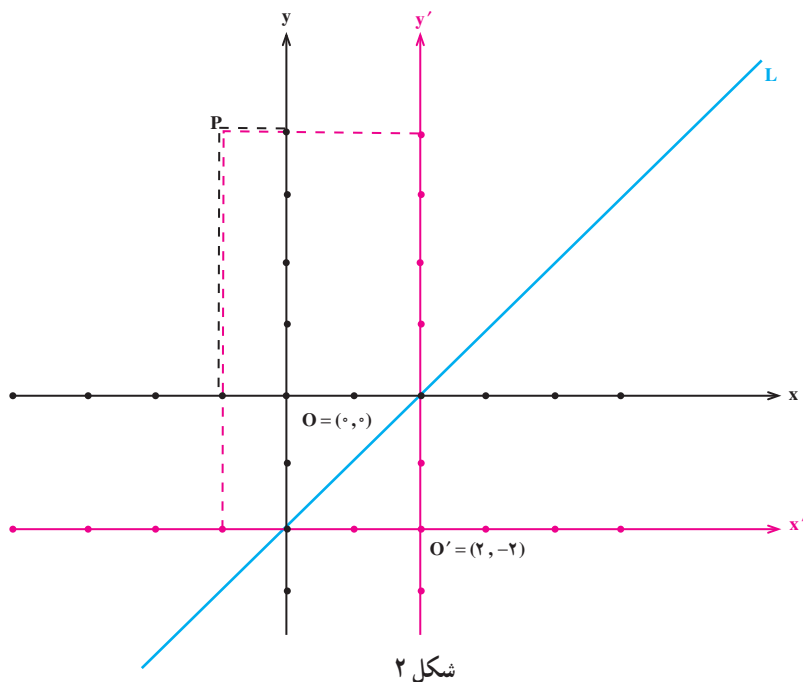
$$\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$$

مثال ۱. فرض کنیم یک دستگاه مختصات قائم با مبدأ مختصات $O = (0, 0)$ داده شده است. یک نقطه در صفحه این دستگاه مختصات قائم انتخاب می‌کنیم، مثلاً نقطه $P = (-1, 4)$. اکنون مبدأ مختصات را به نقطه $O' = (2, -2)$ منتقل می‌کنیم. می‌خواهیم ببینیم که مختصات P در دستگاه جدید چه خواهد شد.

اگر مختصات P در دستگاه جدید (x', y') باشد، بنابر تساوی‌های بالا می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{cases} x' = -1 - 2 = -3 \\ y' = 4 - (-2) = 6 \end{cases}$$

پس مختصات P در دستگاه جدید برابر $(-3, 6)$ است (به شکل ۲ نگاه کنید).



اکنون فرض می‌کنیم خطی مانند L در صفحه دستگاه اولیه داده شده است که در این صفحه معادله‌ای به صورت

$$x - y = 2$$

دارد. می‌خواهیم ببینیم که این خط در دستگاه جدید چه معادله‌ای دارد. نقطه‌ای دلخواه روی خط L انتخاب می‌کنیم که در دستگاه اولیه دارای مختصات (x, y) و در دستگاه جدید دارای مختصات

(x', y') است. چون

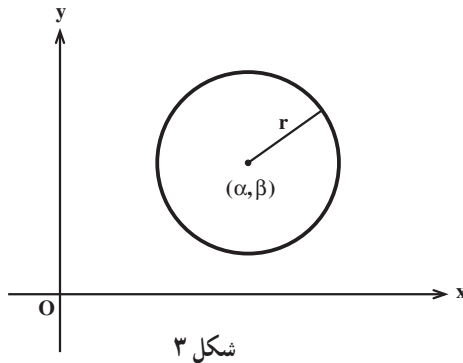
$$\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 2 \end{cases}$$

پس با توجه به این که $x - y = 2$ ، به دست می آوریم $(x' + 2) - (y' - 2) = 2$ ، یا $x' - y' = -2$.

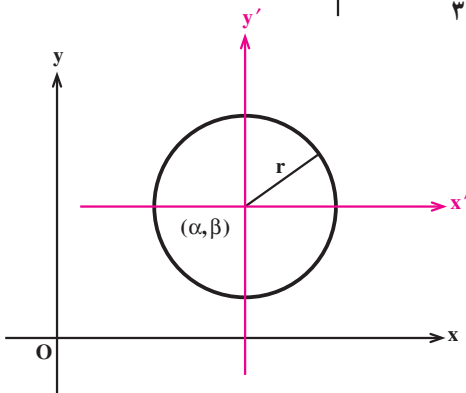
پس اگر نقطه‌ای روی خط L باشد که در دستگاه جدید دارای مختصات (x', y') باشد، آنگاه $x' - y' = -2$. برعکس، اگر نقطه‌ای در دستگاه جدید دارای مختصات (x', y') باشد و در تساوی $x' - y' = -2$ صدق کند، آنگاه لزوماً روی خط L است (چرا؟). پس $x' - y' = -2$

معادله خط L نسبت به دستگاه جدید است.

اکنون فرض می کنیم که یک دستگاه مختصات قائم داده شده است. می خواهیم معادله دایره‌ای را که مرکز آن نقطه (α, β) می باشد و شعاع آن r است پیدا کنیم (به شکل ۳ نگاه کنید).



مبدأ مختصات دستگاه را به نقطه (α, β) منتقل می کنیم (به شکل ۴ نگاه کنید).



معادله دایره داده شده نسبت به دستگاه جدید به صورت $x'^2 + y'^2 = r^2$ است. اما

$$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$$

و لذا $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ معادله دایره در دستگاه قدیم است. در نتیجه می توانیم بگوییم

معادله دایره به شعاع r و به مرکز (α, β) به صورت زیر است

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

مثال ۲. با دسته بندی جملات معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ به صورت

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) = 4,$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 = 4,$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9,$$

ملاحظه می کنیم که معادله داده شده، معادله دایره ای به مرکز $(2, -1)$ و شعاع ۳ است.

مثال ۳. می خواهیم مکان هندسی نقاطی مانند $P = (x, y)$ را پیدا کنیم که فاصله آنها از نقطه

$A = (7, 1)$ دو برابر فاصله آنها از نقطه $B = (1, 4)$ باشد. برای این منظور توجه می کنیم که

$$|AP| = 2|BP|,$$

اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x - 7)^2 + (y - 1)^2} = 2\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2},$$

اگر و فقط اگر

$$(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 4[(x - 1)^2 + (y - 4)^2],$$

اگر و فقط اگر

$$3x^2 + 3y^2 + 6x - 30y + 18 = 0,$$

اگر و فقط اگر

$$x^2 + y^2 + 2x - 10y + 6 = 0,$$

اگر و فقط اگر

$$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 20.$$

پس مکانِ مطلوب، دایره‌ای به مرکز $(-۱, ۵)$ و به شعاع $\sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$ است.

حال گیریم یک دستگاه مختصات قائم داده شده است. می‌خواهیم معادلهٔ یک بیضی را که مرکز آن نقطهٔ (α, β) می‌باشد پیدا کنیم. فرض می‌کنیم طول قطر بزرگ این بیضی $2a$ و طول قطر کوچک آن $2b$ باشد. کانونهای این بیضی را نیز نقاط $F = (\alpha + c, \beta)$ و $F' = (\alpha - c, \beta)$ فرض می‌کنیم (یعنی بیضی را به صورت افقی در نظر می‌گیریم). مانند بحث روی معادلهٔ دایره، مبدأ مختصات

را به نقطهٔ (α, β) منتقل می‌کنیم. معادلهٔ این بیضی نسبت به دستگاه جدید $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ است.

اما

$$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$$

و لذا $1 = \frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2}$ معادلهٔ بیضی در دستگاه قدیم است. در نتیجه می‌توانیم بگوییم

معادلهٔ بیضی به مرکز (α, β) ، کانونهای $F = (\alpha + c, \beta)$ و $F' = (\alpha - c, \beta)$ و قطر بزرگ به طول $2a$ و قطر کوچک به طول $2b$ به صورت زیر است

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1,$$

که در آن $a > b$ و $c^2 = a^2 - b^2$.

همچنین اگر کانونها $F = (\alpha, \beta + c)$ و $F' = (\alpha, \beta - c)$ فرض شوند (یعنی بیضی را بیضی قائم در نظر بگیریم) آنگاه معادلهٔ بیضی به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{(x - \alpha)^2}{b^2} + \frac{(y - \beta)^2}{a^2} = 1.$$

مثال ۴. نوع مقطع مخروطی $4x^2 + y^2 - 32x + 6y + 57 = 0$ را تعیین کرده و آن را رسم

می‌کنیم. برای این منظور با دسته‌بندی معادله به صورت

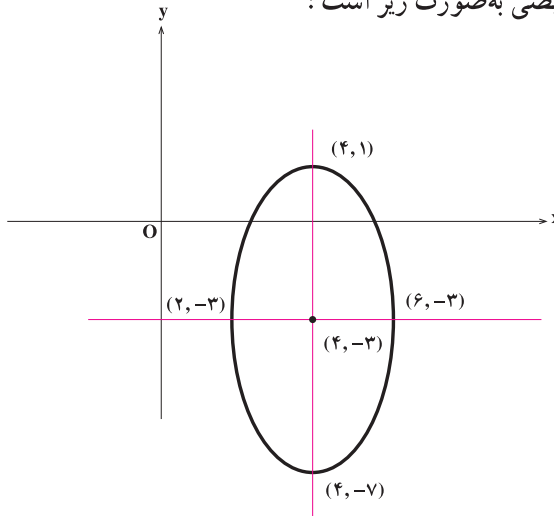
$$4(x^2 - 8x) + y^2 + 6y + 57 = 0,$$

$$4(x - 4)^2 - 64 + (y + 3)^2 - 9 + 57 = 0,$$

$$4(x-4)^2 + (y+3)^2 = 16,$$

$$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1,$$

درمی یابیم که نوع مقطع مخروطی داده شده بیضی است که مرکز آن $(4, -3)$ می باشد و در آن $a = 4$ و $b = 2$. نمودار این بیضی به صورت زیر است:



شکل ۵

اکنون مشابه آنچه در بالا دیدیم می توانیم نشان دهیم که

$$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$$

معادله یک سهمی است که رأس آن نقطه (α, β) ، کانون آن نقطه $F = (\alpha + a, \beta)$ و خط هادی آن دارای معادله $x = \alpha - a$ است.

همچنین

$$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$$

نیز معادله یک سهمی است که رأس آن نقطه (α, β) ، کانون آن نقطه $F = (\alpha, \beta + a)$ و خط هادی آن دارای معادله $y = \beta - a$ است.

در مورد هذلولی به مرکز (α, β) نیز می توانیم معادلات زیر را به دست آوریم

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1,$$

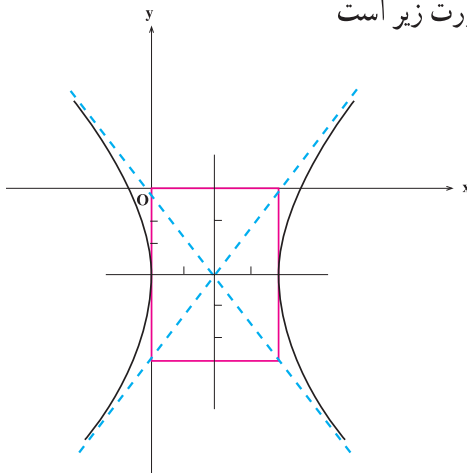
$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1.$$

مثال ۵. نوع مقطع مخروطی $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$ را تعیین کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم. توجه می‌کنیم که با دسته‌بندی، معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1.$$

پس این مقطع مخروطی یک هذلولی به مرکز $(2, -3)$ است که در آن $a=2$ و $b=3$.

نمودار این هذلولی به صورت زیر است



شکل ۶



۱. نشان دهید هر یک از معادلات زیر، معادله یک دایره است و شعاع و مرکز هر یک از آنها را به دست آورید.

الف) $x^2 + y^2 - 4y = 5$,

ب) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$,

ج) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$.

۲. معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -2)$ بوده و از نقطه $(2, 3)$ بگذرد.

۳. معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(2, -2)$ بوده و بر خط $y = x + 4$ مماس باشد.

۴. معادله دایره‌ای را بنویسید که از سه نقطه $(4, 6)$ ، $(-2, -2)$ و $(5, -1)$ بگذرد.

۵. مکان هندسی نقاطی مانند (x, y) را پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه $(-2, 1)$ نصف فاصله آنها از نقطه $(4, -2)$ باشد.

۶. نوع هریک از مقاطع مخروطی زیر را تعیین کرده و نمودار آنها را رسم کنید.

(الف) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 36y + 16 = 0$ ،

(ب) $16x^2 + 9y^2 + 64x + 54y + 1 = 0$ ،

(ج) $x^2 + 8x + 8y = 0$ ،

(د) $y^2 + 12x + 4y - 32 = 0$ ،

(هـ) $x^2 + y^2 + 12x + 10y + 45 = 0$ ،

(و) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ ،

(ز) $-9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y - 144 = 0$ ،

(ح) $16x^2 - 25y^2 - 160x = 0$.

۶.۳ دوران محورهای مختصات

در بخش قبل دیدیم که معادلات

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} + \frac{(y - \beta)^2}{a^2} = 1,$$

$$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha), \quad (x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta),$$

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(y - \beta)^2}{a^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1,$$

به ترتیب معادلات دایره، بیضی، سهمی و هذلولی بودند که محورهای آنها موازی محورهای مختصات بود و (α, β) برای دایره، بیضی و هذلولی مرکز و برای سهمی رأس محسوب می‌شد. اگر هریک از این معادلات را پس از به توان رساندن جملات آن و ساده کردن مرتب کنیم، معادله‌ای به صورت

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

به دست می آوریم. اکنون می خواهیم بررسی کنیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله (۱) صدق می کنند چیست. برای پاسخ به این سؤال چند حالت را در نظر می گیریم.

$$a=c=0 \quad (۱)$$

در این حالت معادله (۱) به معادله $dx+ey+f=0$ تبدیل می شود که یک خط، یا کل صفحه (وقتی $d=e=f=0$) را مشخص می کند و یا مکانی را به دست نمی دهد (وقتی $d \neq 0$ و $f \neq 0$).

$$a=0 \text{ و } c \neq 0 \quad (۲)$$

در این حالت معادله (۱) به معادله $cy^2+dx+ey+f=0$ تبدیل می شود. در این صورت اگر $d=0$ ، به دست می آوریم $cy^2+ey+f=0$ که یک خط، یا دو خط موازی را مشخص می کند و یا مکانی را به دست نمی دهد. اگر $d \neq 0$ نیز پس از مرتب کردن، به معادله

$$\left(y - \frac{-e}{2c}\right)^2 = 4\left(\frac{-d}{4c}\right)\left(x - \frac{e^2 - 4cf}{4cd}\right)$$

دست می یابیم که یک سهمی را مشخص می کند.

$$c=0 \text{ و } a \neq 0 \quad (۳)$$

این حالت مشابه حالت ۲ می باشد و مکانی که در این حالت معادله (۱) به دست می دهد، یک خط، یا دو خط موازی و یا یک سهمی می باشد و یا مکانی توسط (۱) مشخص نمی شود.

$$a \neq 0 \text{ و } c \neq 0 \quad (۴)$$

در این حالت پس از مرتب کردن معادله (۱) به صورت مربعات کامل خواهیم داشت

$$a\left(x - \frac{-d}{2a}\right)^2 + c\left(y - \frac{-e}{2c}\right)^2 = \frac{d^2c + e^2a - 4acf}{4ac}.$$

پس در این حالت معادله (۱)، بجز در حالات استثنایی که یک نقطه و یا دو خط متقاطع را به دست می دهد؛ یک دایره، یک بیضی و یا یک هذلولی را مشخص می کند و یا مکانی را به دست نمی دهد. با توجه به آنچه در بالا گفته شد می توانیم قضیه زیر را بنویسیم.

قضیه ۱. مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

صدق می کنند، بجز در حالات استثنایی که تهی، یک نقطه، یک خط، دو خط موازی، دو خط متقاطع و یا کل صفحه می باشد؛ یک دایره، یک بیضی، یک سهمی و یا یک هذلولی است.

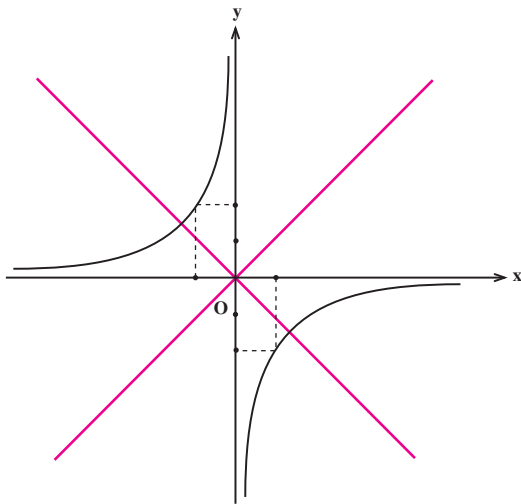
توجه می‌کنیم که معادله (۱)، یک حالت خاص از معادله درجه دوم کلی زیر می‌باشد که در آن

$$b=0$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (2)$$

اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله (۲) صدق می‌کنند چیست.

ابتدا یک حالت خاص را بررسی می‌کنیم. مثلاً فرض کنیم $a=c=d=e=0$ ، $b=1$ و $f=-2$. پس می‌خواهیم مکان هندسی نقاطی از صفحه را پیدا کنیم که در معادله $xy = -2$ صدق می‌کنند. این معادله را می‌توانیم به صورت $y = \frac{-2}{x}$ بنویسیم. از سال سوم به یاد داریم که این معادله یک تابع هموگرافیک را مشخص می‌کند و لذا نمودار آن به صورت زیر است.



شکل ۱

ببینیم چه اتفاقی افتاده است. نمودار $xy = -2$ به یک هذلولی شبیه شده است. سوالی که پیش می‌آید این است که اگر واقعاً شکل بالا یک هذلولی است پس چرا معادله آن به شکل معادلاتی که در بخش ۴ مطالعه کردیم نمی‌باشد. البته این موضوع نمی‌تواند هذلولی بودن شکل بالا را زیر سؤال ببرد. درواقع اگر نمودار شکل ۱ یک هذلولی باشد خطوط قرمز موجود در شکل که موازی محورهای مختصات نمی‌باشند محورهای این هذلولی خواهند بود و لذا انتظاری نیست که معادله این هذلولی به صورت معادلات هذلولی‌های با محورهای موازی محورهای مختصات باشد.

اکنون می‌خواهیم سعی کنیم که نشان دهیم شکل بالا یک هذلولی است. به نظر شما چگونه با این مسأله برخورد کنیم. برای این منظور محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم. قطعاً اگر شکل بالا هذلولی باشد، بایستی در دستگاه جدید دارای معادله‌ای باشد از نوع معادلات هذلولی‌های مطرح شده در بخش ۴، زیرا محورهای آن موازی محورهای دستگاه مختصات جدید خواهند شد.

ابتدا مسأله دوران محورها را حول مبدأ مختصات به اندازه $\frac{\pi}{4}$ بررسی می‌کنیم. بگیریم یک نقطه در دستگاه قدیم دارای مختصات (x, y) و نسبت به دستگاه جدید دارای مختصات (x', y') باشد. رابطه بین این دو مختصات را پیدا می‌کنیم.

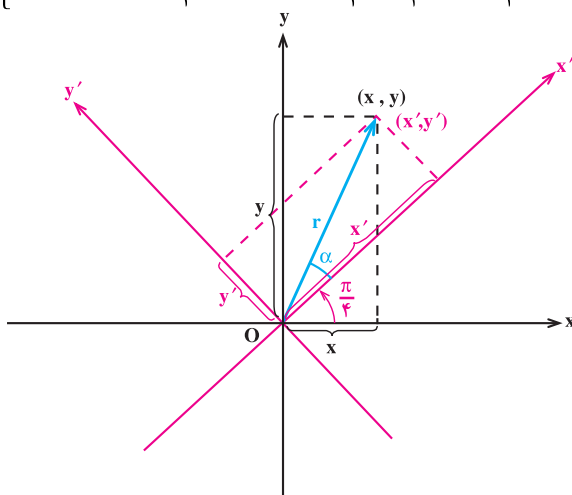
با توجه به شکل ۲ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \\ y = r \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x' = r \cos \alpha \\ y' = r \sin \alpha \end{cases}$$

لذا با استفاده

از بسط سینوس و کسینوس به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - r \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \\ y = r \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} + r \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \end{cases}$$



شکل ۲

پس اگر یک نقطه نسبت به دستگاه قدیم دارای مختصات (x, y) باشد، در دستگاه

دوران یافته جدید با مختصات $(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y', \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y')$ ظاهر می شود. پس $xy = -2$

در دستگاه جدید معادله ای به شکل $(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y')(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y') = -2$

$$-\frac{1}{4}x'^2 - \frac{1}{4}y'^2 = -2$$

$$\frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{4} = 1$$

دارد که همان معادله هذلولی با محورهای موازی محورهای مختصات است، البته محورهای دستگاه جدید. پس ثابت کردیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله $xy = -2$ صدق می کنند یک هذلولی است. این کار را با دوران محورهای مختصات حول مبدأ مختصات به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در جهت مثلثاتی، بازنویسی معادله $xy = -2$ در دستگاه جدید و علم به این که معادله بازنویسی شده $xy = -2$ در دستگاه جدید معادله یک هذلولی است انجام دادیم.

حال فرض کنیم اطلاعاتی از این که باید محورهای مختصات را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ دوران می دادیم تا

بازنویسی شده معادله $xy = -2$ در دستگاه جدید به صورتی آشنا تبدیل شود نداشتیم، ولیکن می دانستیم که با دوران محورهای مختصات و بازنویسی معادله $xy = -2$ نسبت به دستگاه جدید مکان مطلوب مشخص خواهد شد، چگونه بایستی زاویه مناسب دوران را پیدا می کردیم. بیایید مجدداً مسأله دوران محورهای مختصات را مطرح کنیم. گیریم یک دستگاه مختصات قائم داده شده است. محورهای آن را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه زاویه ثابت θ دوران می دهیم. می خواهیم ببینیم اگر یک نقطه نسبت به دستگاه قدیم دارای مختصات (x, y) باشد و نسبت به دستگاه جدید دارای مختصات (x', y') ، آنگاه این دو مختصات چه رابطه ای با هم دارند.

مجدداً با توجه به شکل ۲ و با فرض این که زاویه دوران به جای $\frac{\pi}{4}$ ، θ باشد می توانیم بنویسیم

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha + \theta) \\ y = r \sin(\alpha + \theta) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x' = r \cos \alpha \\ y' = r \sin \alpha \end{cases} \quad \text{لذا با استفاده از بسط سینوس و کسینوس به دست می آوریم}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta = (\cos \theta)x' - (\sin \theta)y' \\ y = r \cos \alpha \sin \theta + r \sin \alpha \cos \theta = (\sin \theta)x' + (\cos \theta)y' \end{cases} \quad (3)$$

پس اگر یک نقطه نسبت به دستگاه قدیم دارای مختصات (x, y) باشد، نسبت به دستگاه جدید دارای مختصات $((\cos \theta)x' - (\sin \theta)y', (\sin \theta)x' + (\cos \theta)y')$ خواهد بود. حال فرض کنیم $xy = -2$ معادله منحنی مورد مطالعه در دستگاه قدیم باشد. معادله این منحنی در دستگاه دوران یافته جدید را پیدا می کنیم:

$$((\cos \theta)x' - (\sin \theta)y')((\sin \theta)x' + (\cos \theta)y') = -2,$$

$$(\cos \theta \sin \theta)x'^2 + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)x'y' - (\sin \theta \cos \theta)y'^2 + 2 = 0.$$

معادله اخیر، معادله منحنی مورد مطالعه در دستگاه جدید است. θ را باید چگونه انتخاب می کردیم تا این معادله قابل شناسایی می شد؟ بله پاسخ شما درست است. در اینجا جمله شامل $x'y'$ یک جمله مزاحم در شناسایی است و باید $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ را طوری انتخاب کنیم که ضریب این جمله صفر شود:

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 0,$$

$$\cos 2\theta = 0,$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2},$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

پس اگر محورها را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم (یعنی زاویه ای که قبلاً نیز بررسی کرده بودیم)، به معادله

$$\frac{1}{4}x'^2 - \frac{1}{4}y'^2 + 2 = 0,$$

یا

$$\frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{4} = 1,$$

می رسمیم که معادله منحنی مورد مطالعه در دستگاه جدید است. مجدداً مانند قبل می توانیم متوجه شویم که $xy = -2$ نیز معادله یک هذلولی بوده است، چرا که بازنویسی شده این معادله نسبت به دستگاه دوران یافته یک هذلولی است.

حال با همین دیدگاه به بررسی مکان هندسی نقاطی از صفحه که معادله (۲)، یعنی

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

مشخص می کند می پردازیم.

گیریم محورهای مختصات را به اندازه زاویه θ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم. منحنی که معادله (۲) مشخص می کند در دستگاه جدید دارای معادله

$$a((\cos \theta)x' - (\sin \theta)y')^2 + b((\cos \theta)x' - (\sin \theta)y')((\sin \theta)x' + (\cos \theta)y') \\ + c((\sin \theta)x' + (\cos \theta)y')^2 + d((\cos \theta)x' - (\sin \theta)y') + e((\sin \theta)x' + (\cos \theta)y') \\ + f = 0,$$

می باشد. این معادله پس از به توان رساندن جملات آن و مرتب کردن جملات به صورت

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0$$

تبدیل می شود، که در آن ضریب $x'y'$ ، یعنی B ، به صورت زیر است:

$$B = 2(c - a)\sin \theta \cos \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

حال $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ را طوری تعیین می کنیم که ضریب $x'y'$ برابر صفر شود، یعنی داشته باشیم $B = 0$:

$$2(c - a)\sin \theta \cos \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0,$$

$$(c - a)\sin 2\theta + b \cos 2\theta = 0,$$

$$(c - a)\tan 2\theta + b = 0,$$

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a - c}.$$

پس اگر $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ را طوری انتخاب کنیم که $\tan 2\theta = \frac{b}{a - c}$ ، آنگاه بازنویسی شده معادله

(۲) نسبت به دستگاه دوران یافته به اندازه زاویه θ به صورت

$$Ax'^2 + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0,$$

خواهد بود. اما بنابر قضیه ۱، مکان هندسی نقاطی از صفحه را که معادله اخیر به دست می دهد، بجز در حالات استثنایی که تهی، یک نقطه، یک خط، دو خط موازی، دو خط متقاطع و یا کل صفحه می باشد؛ یک دایره، یک بیضی، یک سهمی و یا یک هذلولی است و لذا مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله (۲) صدق می کنند نیز چنین است. پس قضیه زیر را ثابت کرده ایم.

قضیه ۲. مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

صدق می کنند، بجز در حالات استثنایی که تهی، یک نقطه، یک خط، دو خط موازی، دو خط

مقاطع و یا کل صفحه می باشد؛ یک دایره، یک بیضی، یک سهمی و یا یک هذلولی است.

مثال ۱. می خواهیم نوع مقطع مخروطی $17x^2 - 6xy + 9y^2 - 72 = 0$ را تعیین کنیم. در

این مثال داریم $a=17$ ، $b=-6$ ، $c=9$ ، $d=e=0$ و $f=-72$. محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه زاویه θ دوران می دهیم که در آن θ از تساوی زیر به دست می آید

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{-6}{17-9} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}.$$

اکنون با توجه به اتحاد $\frac{1}{\cos^2 2\theta} = 1 + \tan^2 2\theta$ به دست می آوریم $\cos 2\theta = \frac{-4}{5}$ و لذا از

اتحادهای $\cos^2 \theta = \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta)$ و $\sin^2 \theta = \frac{1}{4}(1 - \cos 2\theta)$ نتیجه می شود $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ و

$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$. اکنون معادله داده شده در مثال، نسبت به دستگاه دوران یافته با توجه به (۳)

به صورت

$$17\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right)^2 - 6\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right) + 9\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right)^2 - 72 = 0.$$

تبدیل می شود که پس از ساده کردن به صورت

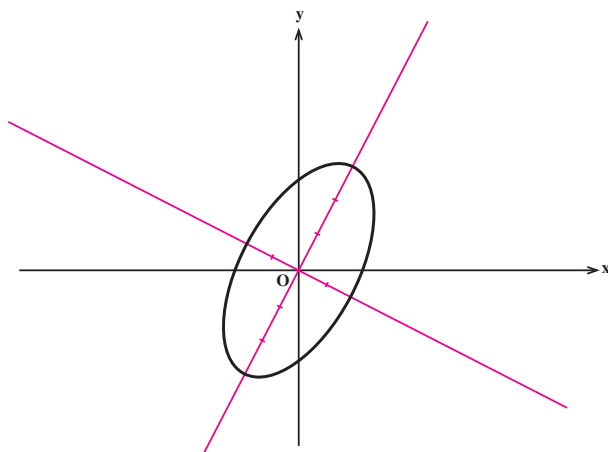
$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

در می آید. چون این معادله یک بیضی را مشخص می کند، لذا معادله داده شده در مثال نیز بیضی را

مشخص می کرده است. حال با توجه به $\tan 2\theta = \frac{-3}{4}$ و به کمک ماشین حساب های مهندسی می توانیم

اندازه زاویه θ را به دست آوریم که در اینجا تقریباً برابر $71/6^\circ$ درجه می باشد. پس برای رسم بیضی داده شده در مثال کافی است محورهای مختصات را به اندازه $71/6^\circ$ درجه حول مبدأ مختصات در

جهت مثلثاتی دوران دهیم و سپس در دستگاه جدید بیضی $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$ را رسم کنیم:



شکل ۳



۱. اگر محورهای مختصات را به اندازه زاویه θ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم، هر یک از معادلات زیر را نسبت به دستگاه جدید بازنویسی کنید.

الف) $x^2 + y^2 = 49$, $\theta = \frac{\pi}{4}$,

ب) $x^2 + y^2 = 25$, $\theta = \frac{\pi}{3}$,

ج) $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 10 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{6}$,

د) $x^2 + 8xy + y^2 - 75 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

۲. با استفاده از دوران محورهای مختصات به اندازه‌ای مناسب، نوع هر یک از مقاطع مخروطی زیر را تعیین کرده و آنها را رسم کنید.

الف) $x^2 - 4xy + y^2 - 12 = 0$,

ب) $x^2 + xy + y^2 - 6 = 0$,

ج) $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 36 = 0$,

د) $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$,

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 16\sqrt{3}x - 16y = 0, \quad \text{هـ)}$$

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y = 0. \quad \text{و)}$$

۳. فرض کنید معادله $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ داده شده است. محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه ای دلخواه دوران می دهیم. اگر معادله بالا نسبت به دستگاه جدید دوران یافته به صورت $Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ بازنویسی شود، ثابت کنید $B'^2 - 4AC = b^2 - 4ac$.

از این جا نتیجه گیری کنید مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

صدق می کنند به صورت زیر رده بندی می شوند :

| $b^2 - 4ac$ | نوع مکان هندسی |
|-------------|--|
| منفی | تهی، نقطه، دایره، بیضی |
| صفر | تهی، یک خط، دو خط موازی، کل صفحه، سهمی |
| مثبت | دو خط متقاطع، هذلولی |