

قسمت سوم

مباحثی دیگر از ترکیبیات

مقدمه

در قسمت اول با نظریه‌ی گراف‌ها که یکی از مباحث ترکیبیات است آشنا شدیم. در این قسمت با مباحثی دیگر از ترکیبیات آشنا می‌شویم. ترکیبیات معمولاً با مجموعه‌های متناهی سروکار دارد و لذا یکی از مباحث ترکیبیات، شمارش است. در اینجا با بعضی از ابزارهای شمارش آشنا می‌شویم. کلاً به مقدمات بسنده می‌کنیم، با این امید که دانش‌آموزان با این آشنایی اولیه انگیزه‌ی کافی پیدا کنند که خود در این مباحث به مطالعه بپردازند.

در فصل ۷ نشان می‌دهیم گراف‌ها چگونه می‌توانند به فهم مطالب دیگر ریاضی کمک کنند. گراف‌ها و ماتریس‌های متناظر با آن‌ها با شکل و شمایل شهودی که دارند به تجسم مفاهیم انتزاعی کمک می‌کنند. یکی از دلایلی که همه‌ی ما از هندسه خوشمان می‌آید شهودی بودن آن است. گراف نیز همان امتیاز را دارد. به‌علاوه چون در رسم نمودار گراف طول یال‌ها و یا مکان رأس‌ها مطرح نیست درک شهودی ساده‌تر می‌شود. در بخش ۷-۱ بعضی از این استفاده‌های شهودی را مطرح می‌کنیم. در مطالعه‌ی مجموعه‌ها نیز می‌توان نمودارهایی به آن‌ها نسبت داد. این نمودارها به درک مفاهیم کمک زیادی می‌کنند. با استفاده از این نمودارها حتی می‌توانیم مفاهیمی را که یاد گرفته‌ایم تعمیم دهیم. بخش ۷-۳ به این موضوع اختصاص دارد. با تعمیم این مفاهیم یک ابزار شمارشی به نام اصل شمول و عدم شمول را خواهیم دید. در فصل ۸ یکی دیگر از مباحث ریاضی به نام دنباله‌های بازگشتی را به عنوان یک ابزار شمارشی به کار خواهیم گرفت.

فصل

مدل های شهودی و تجسمی در ترکیبیات

۷-۱- رابطه ها و گراف ها

مفاهیم مربوط به رابطه را که در کتاب جبر و احتمال سال سوم دیده ایم یادآوری می کنیم.
 تعریف: هرگاه A و B دو مجموعه باشند، آن گاه یک رابطه از A به B عبارت است از زیرمجموعه ای از $A \times B$. زیرمجموعه های $A \times A$ را رابطه های روی A می گویند.
 مثال ۱: روی مجموعه ای اعداد صحیح \mathbb{Z} یک رابطه ی R را می توان چنین تعریف کرد:
 aRb یا $(a, b) \in R$ هرگاه $a \leq b$.

این رابطه همان رابطه ی معمولی «کوچکتر از یا مساوی با» روی \mathbb{Z} است که روی Q ، مجموعه ای اعداد گویا، و روی \mathbb{R} ، مجموعه ای اعداد حقیقی، نیز تعریف می شود.
 مثال ۲: برای هر دو عضو $x, y \in \mathbb{Z}$ تعریف می کنیم:

$(x, y) \in R$ یا xRy هرگاه $x - y$ مضربی از ۷ باشد.

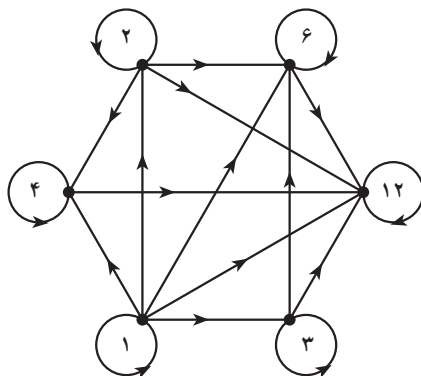
پس داریم: $9R2$ و $11R-3$ ، ولی $7R3$.

مثال ۳: مجموعه ای $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ مفروض است. به ازای هر دو عضو $a, b \in A$

تعریف می کنیم: aRb هرگاه $a|b$.

حال فرض کنید A یک مجموعه ی متناهی و R یک رابطه روی A باشد. به R گراف جهت دار G را به صورت زیر نسبت می دهیم. رأس های G اعضای A هستند و رأس a به رأس b متصل است هرگاه aRb .

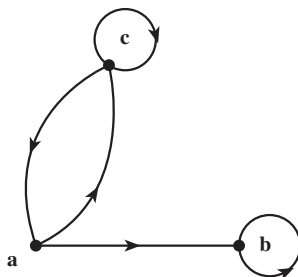
به عنوان مثال، شکل ۱، گراف مربوط به رابطه ای را که در مثال ۳ داده شده است نشان می دهد.
 مثلاً رأس ۱ به تمام رئوس، حتی به خود ۱، وصل است زیرا عدد ۱ تمام اعداد صحیح را می شمارد.



شکل ۱- گراف جهت‌دار رابطتهای عادی کردن

متقابلاً هر گراف جهت‌دار نشانگر یک رابطه است. مثلاً از گراف شکل ۲ نتیجه می‌شود که رابطه‌ای مانند R روی مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ تعریف شده است و داریم:

aRb, aRc, bRb, cRa, cRc .



شکل ۲- گراف جهت‌دار یک رابطه

این تناظر بین گراف‌های (جهت‌دار) و رابطه‌ها به درک بسیاری از ویژگی‌های رابطه‌ها کمک می‌کند. مثلاً می‌توانید بازتابی، متقارن بودن یا نبودن رابطه‌ها را فوراً از روی گراف جهت‌دار مربوط تشخیص دهید. این ویژگی‌ها در درس‌های سال‌های قبل تعریف شده‌اند. یکی از ویژگی‌های رابطه‌ها که کاربرد فراوان دارد خاصیت پاد متقارن است. رابطه‌ی R را وقتی پاد متقارن گوئیم که به ازای هر زوج مرتب (a, b) ، اگر $(a, b) \in R$ و $(b, a) \in R$ آن‌گاه $a = b$. مثلاً رابطه‌ی «کوچکتر از» یا «مساوی با» در مثال ۱ و رابطه‌ی «عادی کردن» در مثال ۳ دو رابطه‌ی پاد متقارن اند ولی رابطه‌ی مثال ۲

پاد متقارن نیست.

حال ارتباط این ویژگی ها را با گراف های جهت دار بیان می کنیم.

یک رابطه بازتابی است اگر و تنها اگر گراف جهت دار متناظر با آن در هر رأس دارای یک طوقه باشد. طوقه یالی است که یک رأس را به خودش وصل می کند.

یک رابطه متقارن است اگر و تنها اگر گراف جهت دار متناظر با آن دارای این ویژگی باشد که هرگاه از رأسی مانند a به رأسی مانند b یک یال موجود باشد آن گاه از رأس b به رأس a نیز یالی موجود باشد.

یک رابطه پاد متقارن است اگر و تنها اگر گراف جهت دار متناظر با آن دارای این ویژگی باشد که هرگاه از رأسی مانند a به رأسی دیگر مانند b یک یال موجود باشد از رأس b به رأس a یالی موجود نباشد.

یک رابطه ترایی است اگر و تنها اگر در گراف جهت دار متناظر با آن اگر از رأسی مانند a به رأسی دیگر مانند b یک یال موجود باشد و از رأس b به رأسی مانند c یالی موجود باشد آنگاه از رأس a به رأس c نیز یک یال وجود داشته باشد.

مثال ۴: با توجه به شکل ۲ معلوم می شود که رابطه ی متناظر با این گراف جهت دار هیچ یک از ویژگی های فوق را ندارد (چرا؟). در صورتی که گراف جهت دار شکل ۱ متناظر با رابطه ای است که دارای ویژگی های بازتابی، پاد متقارن بودن، و ترایی است.

Δ

۷-۲- رابطه ها و ماتریس ها

در قسمت گراف ها به هر گراف یک ماتریس صفر و یک به نام ماتریس مجاورت نسبت داده شد. ماتریس مجاورت گراف های جهت دار هم به طور مشابه تعریف می شود. مثلاً ماتریس مجاورت گراف جهت دار شکل ۲ به صورت زیر است:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

پس می توان این ماتریس را متناظر با رابطه ی مربوط به شکل ۲ گرفت. توجه کنید که درایه ی

i,j ام ماتریس متناظر مساوی با ۱ است اگر و تنها اگر iRj .

اکنون می‌توانیم ویژگی‌های مربوط به رابطه‌ها را به زبان ماتریس‌ها بیان کنیم. مثلاً ویژگی بازتابی یعنی اینکه همه‌ی درایه‌های قطر اصلی ماتریس ۱ باشند. بقیه‌ی ویژگی‌ها را به زبان ماتریس بیان کنید.

در این فصل صرفاً ماتریس‌های صفر و یک را در نظر می‌گیریم. اکنون یک عمل جمع و یک عمل ضرب برای اعضای مجموعه‌ی دو عضوی $\{0, 1\}$ تعریف می‌کنیم که از روی آن «توان دوم» را برای ماتریس‌ها تعریف خواهیم کرد. این توان دوم با آنچه که در جبر خطی دیده‌ایم فرق دارد.

تعریف: روی مجموعه‌ی $\{0, 1\}$ دو عمل $+$ و \odot موسوم به **عمل‌های بولی** را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

$$1+0=0+1=1, \quad 0+0=0, \quad 1+1=1$$

$$1\odot 1=1, \quad 1\odot 0=0\odot 1=0, \quad 0\odot 0=0$$

با توجه به تعریف بالا، توان دوم ماتریس $M = [m_{ij}]_{n \times n}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M^{(2)} = [m_{i1} \odot m_{1j} + m_{i2} \odot m_{2j} + \dots + m_{in} \odot m_{nj}]_{n \times n}.$$

به عبارت دیگر برای به دست آوردن توان دوم یک ماتریس که در این جا تعریف کردیم مانند توان دوم معمولی در ماتریس‌ها عمل می‌کنیم ولی در نهایت به جای هر درایه‌ی غیر صفر که به دست آمده باشد عدد ۱ قرار می‌دهیم.

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \text{ آن گاه داریم: } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ اگر مثال ۵:}$$

Δ

تعریف: هرگاه R رابطه‌ای روی مجموعه‌ی A باشد **ترکیب رابطه‌ی R و R** ، رابطه‌ای روی A است که با قاعده‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$a(R \circ R)c \text{ هرگاه عضوی مانند } b \in A \text{ وجود داشته باشد که } aRb \text{ و } bRc.$$

با توجه به تعریف‌های فوق قضیه‌ی زیر را می‌توان به سادگی اثبات کرد.

قضیه‌ی ۱: فرض کنید A یک مجموعه‌ی n عضوی، $n \in \mathbb{N}$ و R یک رابطه‌ی روی A باشد.

هرگاه $M(R)$ ماتریس متناظر R باشد داریم:

$$M(R) = [O]_{n \times n} \text{ (الف) یعنی همه‌ی درایه‌های } M(R) \text{ صفرند) اگر و تنها اگر } R = \emptyset;$$

(ب) $M(R) = [1]_{n \times n}$ (یعنی همه ی درایه های $M(R)$ یک اند) اگر و تنها اگر $R = A \times A$;
 (پ) $M(RoR) = [M(R)]^{(2)}$.

اثبات: بند (الف) و (ب) بلافاصله از تعریف نتیجه می شوند. برای اثبات بند (پ)، اول فرض کنید $i(RoR)j$. پس عضوی مانند $k \in A$ وجود دارد به طوری که iRk و kRj . پس درایه های ik و kj در ماتریس M مساوی با ۱ هستند. در نتیجه درایه ی ij در ماتریس $M^{(2)}$ برابر با ۱ است. حال به عکس اگر درایه ی ij در ماتریس $M^{(2)}$ برابر با ۱ باشد یعنی

$$m_{i1} \odot m_{1j} + m_{i2} \odot m_{2j} + \dots + m_{in} \odot m_{nj} = 1$$

آن گاه حداقل یکی از جمعوندها باید مساوی با ۱ باشد. مثلاً $m_{ik} \odot m_{kj} = 1$. از آن جا $m_{ik} = m_{kj} = 1$ ، که نتیجه می شود: iRk و kRj . پس بنا به تعریف خواهیم داشت $i(RoR)j$.

□

مثال ۶: مجموعه ی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و رابطه ی R روی A به صورت

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,3), (3,4)\}$$

مفروض است. مطلوب است محاسبه ی RoR .

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{داریم}$$

$$[M(R)]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M(RoR) \quad \text{پس:}$$

و از آن جا $RoR = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$ Δ

تعریف: فرض کنید ماتریس های صفر و یک $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ از اندازه ی

$m \times n$ باشند. گوئیم A کوچکتر از یا مساوی با B است و می نویسیم $A \ll B$ هرگاه به ازای هر $1 \leq i \leq m$ و هر $1 \leq j \leq n$ داشته باشیم $a_{ij} \leq b_{ij}$.

روشن است که اگر M_1 و M_2 ماتریس های متناظر با رابطه های R_1 و R_2 روی یک مجموعه ی

A باشند، آنگاه $R_1 \subseteq R_2$ اگر و تنها اگر $M_1 \ll M_2$.

قضیه ی ۲: مجموعه ی n عضوی A ، $n \in \mathbb{N}$ ، و رابطه ی R روی آن را در نظر می گیریم. فرض کنید M ماتریس متناظر با این رابطه باشد. آنگاه

(الف) R بازتابی است اگر و تنها اگر $I_n \ll M$ (I_n ماتریس همانی $n \times n$ است).

(ب) R متقارن است اگر و تنها اگر $M = M^T$. (ماتریس M^T ترانهایه ی M است و آن ماتریسی است که از قراردادن سطرهای M به جای ستون های M ، با حفظ ترتیب، به دست می آید.)

(پ) R تراییبی است اگر و تنها اگر $M^{(2)} \ll M$.

(ت) R پاد متقارن است اگر و تنها اگر $I_n \ll M \wedge M^T$. (ماتریس $M \wedge M^T$ با عمل روی درایه های M و M^T نظیر به نظیر با ضرب مؤلفه به مؤلفه تشکیل می شود)

اثبات: هر کدام از حکم های فوق با توجه به تعریف های مربوط به سادگی اثبات می شوند. ما دو حکم آخر را ثابت می کنیم.

برای اثبات (پ)، فرض کنید $M^{(2)} \ll M$. باید نشان دهیم R تراییبی است. هر گاه xRy و yRz ، آنگاه در ماتریس M ، درایه ی سطر x ام و ستون y ام و همچنین درایه ی سطر y ام و ستون z ام برابر ۱ است. در نتیجه درایه ی واقع در سطر x ام و ستون z ام در ماتریس $M^{(2)}$ برابر ۱ است. چون $M^{(2)} \ll M$ پس درایه ی سطر x ام و ستون z ام ماتریس M نیز باید ۱ باشد یعنی xRz .

به عکس، فرض کنید R تراییبی باشد. باید نشان دهیم که $M^{(2)} \ll M$. فرض کنید m_{xz} ، درایه ی واقع در سطر x ام و ستون z ام در ماتریس $M^{(2)}$ ، مساوی ۱ باشد، آنگاه باید $y \in A$ وجود داشته باشد که در ماتریس M : $m_{yz} = 1$ و $m_{xy} = 1$. در نتیجه باید xRy و yRz و چون R تراییبی است xRz . پس $m_{xz} = 1$. یعنی نشان داده ایم که $M^{(2)} \ll M$.

برای اثبات حکم (ت)، فرض کنید R پاد متقارن باشد. اگر به ازای دو عضو متمایز i و j داشته باشیم $(i, j) \notin R$ آنگاه درایه ی j ام در M و در نتیجه در $M \wedge M^T$ برابر با ۰ است. اگر $(i, j) \in R$ آنگاه $(j, i) \notin R$. یعنی اگر درایه ی j ام در M مساوی با ۱ باشد آنگاه درایه ی j ام در M مساوی با ۰ است. پس در این صورت نیز درایه ی j ام در $M \wedge M^T$ برابر با ۰ است. یعنی $M \wedge M^T \ll I_n$.

به عکس از $I_n \ll M \wedge M^T$ نتیجه می شود که همه ی درایه های غیر قطری $M \wedge M^T$ صفرند. یعنی به ازای $i \neq j$ داریم $m_{ij}, m_{ji} = 0$. در این صورت فقط سه حالت زیر امکان پذیرند:

$m_{ij} = m_{ji} = 0$ یا $m_{ij} = 1$, $m_{ji} = 0$ و یا $m_{ij} = 1, m_{ji} = 1$. که نتیجه می شود: اگر iRj و jRi آنگاه $i = j$.

□ اثبات بقیه ی حکم ها را به عنوان تمرین به عهده دانش آموزان می گذاریم.

قضیه های ۱ و ۲ ارتباط بین رابطه ها و ماتریس های صفر و یک را نشان می دهند. این قضیه ها با وجود سادگی اهمیت زیادی دارند. زیرا بهترین راه معرفی یک رابطه به کامپیوتر از طریق ماتریس صفر و یک است. از طریق حکم های فوق می توان با کامپیوتر ویژگی های هر رابطه ای را بررسی کرد.

مثال ۷: با استفاده از قضیه ی ۲ می توان یک الگوریتم نوشت و با برنامه ی کامپیوتری هم ارزی بودن رابطه ای را که روی یک مجموعه ی متناهی A داده شده است امتحان کرد. یعنی رابطه ی R یک رابطه ی هم ارزی است اگر و تنها اگر M ، ماتریس صفر و یک متناظر با آن، دارای شرایط زیر باشد:

(الف) $I_n \ll M$

(ب) $M = M^T$

(پ) $M^{(r)} \ll M$

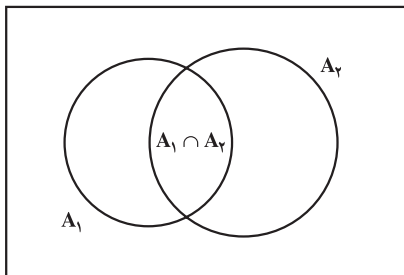
Δ

۷-۳- اصل شمول و عدم شمول

یکی از ابزارهای شمارش به اصل شمول و عدم شمول معروف است. حالت خاص آن را قبلاً در کتاب جبر و احتمال دیده اید. اگر A یک مجموعه ی متناهی باشد تعداد عناصر آن را با $|A|$ نشان می دهیم. فرض کنید A_1 و A_2 دو مجموعه ی متناهی باشند. داریم:

$$(۱) \quad |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

با توجه به شکل ۳ رابطه ی (۱) درست است، زیرا در مجموع $|A_1| + |A_2|$ هر عضوی که فقط به



شکل ۳- نمودار ون برای دو مجموعه

یکی از مجموعه های A_1 یا A_2 متعلق باشد یک بار به حساب می آید ولی هر عضوی که به هر دو مجموعه ی A_1 و A_2 تعلق داشته باشد دو بار شمرده می شود. پس با کم کردن $|A_1 \cap A_2|$ از حاصل جمع $|A_1| + |A_2|$ هر عضو از $A_1 \cup A_2$ دقیقاً یک بار به حساب می آید.

رابطه‌ی (۱) وجه تسمیه‌ی «شمول و عدم شمول» را نیز توجیه می‌کند. زیرا در شمارش اعضای مجموعه‌ی $A_1 \cup A_2$ ، اول همه‌ی اعضای A_1 و A_2 را به حساب می‌آوریم (شمول) ولی چون در این صورت اعضای $A_1 \cap A_2$ دوبار به حساب می‌آیند آن‌ها را از شمارش خود خارج می‌کنیم (عدم شمول).

مثال ۸: چند عضو از مجموعه‌ی $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 6300\}$ نه بر ۵ تقسیم پذیرند و نه بر ۳؟ فرض کنید A_1 زیرمجموعه‌ی A متشکل از مضارب ۳ و A_2 زیرمجموعه‌ی A متشکل از مضارب ۵ باشند. می‌خواهیم $|A_1 \cup A_2|$ را پیدا کنیم (\bar{B} متمم مجموعه‌ی B را نمایش می‌دهد). داریم:

$$|A_1| = \frac{6300}{3} = 2100$$

$$|A_2| = \frac{6300}{5} = 1260$$

و چون $A_1 \cap A_2$ مجموعه‌ی اعدادی هستند که هم بر ۳ و هم بر ۵ تقسیم پذیرند پس:

$$|A_1 \cap A_2| = \frac{6300}{(3)(5)} = 420$$

درنتیجه با توجه به رابطه‌ی (۱) داریم:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| &= 2100 + 1260 - 420 \\ &= 2940 \end{aligned}$$

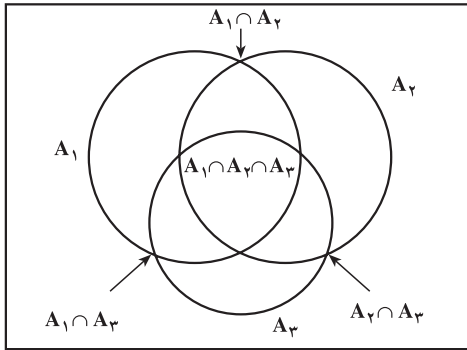
$$\Delta \quad |A_1 \cup A_2| = 6300 - 2940 = 3360 \quad \text{و از آن جا}$$

حال برای $n = 3$ اصل شمول و عدم شمول را مطالعه می‌کنیم.

قضیه‌ی ۳: فرض کنید A_1 و A_2 و A_3 سه زیرمجموعه‌ی متناهی از یک مجموعه‌ی A باشند. داریم

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| \\ &\quad - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned} \quad (2)$$

۱- متمم مجموعه‌ی B را گاهی با B^c یا B' هم نمایش می‌دهند. به جای متمم گاهی اصطلاح مکمل را به کار می‌برند.



شکل ۴- نمودار ون برای سه مجموعه

اثبات: نشان می دهیم که هر عضو x از A به تعداد مساوی در دو طرف رابطه ی (۲) به حساب می آید. به شکل ۴ توجه کنید.

دو حالت داریم :

حالت ۱: اگر x متعلق به هیچ کدام از مجموعه های A_1 و A_2 و A_3 نباشد، آن گاه x در دو طرف رابطه ی (۲)، صفر بار به حساب می آید.

حالت ۲: فرض کنید x به s مجموعه از مجموعه های A_1 و A_2 و A_3 تعلق داشته باشد ($1 \leq s \leq 3$). آن گاه x یک بار در طرف چپ به حساب می آید، و در طرف راست نیز

اگر $s=1$ ، یک بار به حساب می آید،

اگر $s=2$ ، باز هم $2-1=1$ بار به حساب می آید و

اگر $s=3$ ، در این صورت هم $3-3+1=1$ بار به حساب می آید. \square

اثبات بالا را می توان به n مجموعه تعمیم داد و قضیه ای بیان کرد که به اصل شمول و عدم شمول معروف است. در مثال های زیر خواهیم دید که چگونه بعضی از مسائل کلاسیک شمارش را می توان با اصل شمول و عدم شمول حل کرد.

مثال ۹: تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ی ۴ عضوی B به یک مجموعه ی ۳ عضوی A را پیدا کنید. باید توجه کرد که منظور از تابع $f: B \rightarrow A$ تابعی است که روی همه ی اعضای B تعریف شده است.

فرض کنید $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ و $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. مجموعه ی تمام توابع $f: B \rightarrow A$ را با S نمایش می دهیم و ابتدا $|S|$ را محاسبه می کنیم. به ازای هر $b_j \in B$ برای $f(b_j)$ سه امکان وجود دارد، زیرا $f(b_j)$ امکان دارد a_1 ، a_2 یا a_3 باشد. این امکان ها به ازای هر دو عضو متمایز B به هم وابسته نیستند یعنی مثلاً به ازای هر انتخاب برای هر سه عضو B ، عضو چهارم می تواند دارای

سه انتخاب باشد. پس تعداد کل این توابع $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ است. حال فرض کنید A_i مجموعه‌ی توابعی باشد که هیچ عضوی از B را به a_i نسبت نمی‌دهند.

$$A_i = \{f \in S : a_i \notin f(B)\} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{یعنی:}$$

منظور شمارش تعداد اعضای مجموعه‌ی $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$ است. از فرمول (۲) در قضیه‌ی ۳ استفاده می‌کنیم. مشابه استدلال فوق داریم

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4 = 16$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1 \quad \text{و}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0 \quad \text{و}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 2^4 + 2^4 + 2^4 - (1 + 1 + 1) + 0 = 45 \quad \text{پس:}$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 81 - 45 = 36 \quad \text{و از آنجا}$$

که تعداد توابع پوشای از B به A است. Δ

برای حل معادلات با جواب‌های صحیح و با محدودیت‌های مختلف، می‌توان از اصل شمول و عدم شمول استفاده کرد. برای توضیح این روش، اول به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۰: فرض کنید k نوع مختلف گل و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است. می‌توان ثابت کرد که تعداد انتخاب n گل از این k نوع گل که در آن تکرار نیز مجاز است برابر است با تعداد

$$\text{جواب‌های صحیح نامنفی معادله‌ی } x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \text{ و مساوی است با } \binom{n+k-1}{n}.$$

اگر x_i را تعداد گل‌های انتخاب‌شده از نوع i ام بگیریم به‌سادگی دیده می‌شود که یک تناظر یک به یک بین انتخاب‌ها و جواب‌های معادله‌ی فوق موجود است. اثبات برابری تعداد انتخاب‌ها با مقدار داده شده را به عنوان تمرین به عهده‌ی دانش‌آموزان گذاشته‌ایم. باید دقت کرد که در این مثال حالت‌هایی را هم در نظر گرفته‌ایم که یک یا چند نوع گل را اصلاً انتخاب نکرده باشیم. Δ

مثال ۱۱: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ را به‌طوری که به‌ازای $0 \leq x_i \leq 2, i = 1, 2, 3$ باشد پیدا کنید.

مجموعه‌های A_1, A_2, A_3 را به‌ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \{\text{جواب‌های معادله‌ی فوق به‌شرطی که } x_i > 2 \text{ باشد}\}, i = 1, 2, 3$$

باید تعداد مجموعه‌ی $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$ را پیدا کنیم. بنابر فرمول (۲) از قضیه‌ی ۳ داریم:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| &= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ &= |S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \\ &\quad |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

که در آن S مجموعه‌ی تمام جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی فوق است. پس بنا به مثال ۱۰ داریم.

$$|S| = \binom{3+4-1}{4} = 15$$

از طرف دیگر مثلاً تعداد A_1 مساوی است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. زیرا کافی است که در جواب معادله‌ی اخیر به x_1 ، عدد ۳ اضافه کنیم تا یک جواب معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ با شرط $x_1 > 2$ به دست آید و برعکس. اما به سادگی دیده می‌شود که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ مساوی است با ۳. پس $|A_1| = 3$ و به همین ترتیب $|A_2| = |A_3| = 3$.

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \emptyset \quad \text{از طرف دیگر داریم}$$

همین‌طور $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$. پس $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 15 - 3 - 3 - 3 = 6$. در حقیقت

۶ جواب فوق چنین‌اند:

$$(0, 2, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 0, 2), (2, 1, 1), (2, 2, 0)$$

Δ

در قسمت نظریه‌ی اعداد با تابع حسابی اویلر ϕ به عنوان «مجله‌ی ریاضی» آشنا شده‌ایم. منظور از $\phi(n)$ عبارت است از تعداد اعداد صحیح و مثبت m که کوچکتر از n یا مساوی با آن بوده و m و n نسبت به هم اول باشند. قضیه‌ی زیر حالت خاصی از قضیه‌ای کلی درباره‌ی این تابع است. **قضیه‌ی ۴:** فرض کنید عدد صحیح و مثبت n برابر با حاصل ضرب سه عدد اول و متمایز به صورت زیر باشند:

$$n = p_1 p_2 p_3$$

در این صورت

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right)$$

اثبات: مجموعه‌های A_i را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \{m: 1 \leq m \leq n, p_i | m\}, \quad i = 1, 2, 3$$

حال اصل شمول و عدم شمول را برای مجموعه‌های A_i می‌نویسیم. داریم:

$$\phi(n) = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \quad \text{و برای } i = 1, 2, 3$$

$$A_i = \left\{ p_i, 2p_i, 3p_i, \dots, \left(\frac{n}{p_i}\right)p_i \right\}$$

پس $|A_i| = \frac{n}{p_i}$. به همین ترتیب به ازای $i \neq j$ ، و

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{n}{p_1 p_2 p_3} \quad \text{اکنون از رابطه ی (۲) در قضیه ی ۳ نتیجه می‌گیریم که:}$$

$$n - \phi(n) = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_3} - \frac{n}{p_1 p_2} - \frac{n}{p_1 p_3} - \frac{n}{p_2 p_3} + \frac{n}{p_1 p_2 p_3}$$

$$\phi(n) = n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \frac{n}{p_3} + \frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \frac{n}{p_2 p_3} - \frac{n}{p_1 p_2 p_3}$$

$$= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right)$$

□

مثال ۱۲: ثابت کنید $\phi(42) = 12$.

چون $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ ، حکم از قضیه ی ۴ به دست می‌آید:

$$\phi(42) = 42 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 12$$

این نتیجه را می‌توان مستقیماً هم بررسی کرد. زیرا تمام اعداد صحیح و مثبت نابیشتر از ۴۲ که نسبت به آن اول هستند عبارت‌اند از:

$$1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41$$

Δ

۷-۴ تمرین‌ها

۱- فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$. برای هریک از حالت‌های زیرگرافی رسم کنید که رابطه ی

متناظر با آن

الف) بازتابی و متقارن باشد ولی ترایایی نباشد،

ب) بازتابی و ترایایی باشد ولی متقارن نباشد،

پ) متقارن و ترایایی باشد ولی بازتابی نباشد.

جواب های خود را با ماتریس های متناظر امتحان کنید.

۲- فرض کنید $A = \{w, x, y, z\}$. تعداد رابطه های روی A با ویژگی های داده شده در هریک

از حالت های زیر را بیابید :

الف) بازتابی ؛

ب) متقارن ؛

پ) بازتابی و متقارن ؛

ت) بازتابی و شامل (x, y) ؛

ث) پاد متقارن ؛

ج) پاد متقارن و شامل (x, y) ؛

چ) متقارن و پاد متقارن ؛

ح) پاد متقارن، متقارن و بازتابی ؛

خ) هم ارزی (راهنمایی : تعداد افرازهای مختلف را پیدا کنید).

۳- فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$. دو رابطه ی R و S روی A به صورت زیر داده شده اند.

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (4, 4)\},$$

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$$

رابطه های ROR و SOS را پیدا کنید.

۴- بندهای (الف) و (ب) از قضیه ی ۱ را اثبات کنید.

۵- بندهای (الف) و (ب) از قضیه ی ۲ را اثبات کنید.

۶- فرض کنید R یک رابطه ی بازتابی روی مجموعه ی متناهی A باشد. نشان دهید که رابطه ی

RoR نیز بازتابی است.

$$۷- \text{ماتریس صفر و یک } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ را در نظر می گیریم. تعداد ماتریس های صفر}$$

و یک F با شرط $E \ll F$ را بیابید.

۸- با استفاده از قضیه‌هایی که در این فصل خوانده‌اید نشان دهید که آیا رابطه‌ی زیر روی مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است یا خیر.

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (1,3), (2,4), (4,2), (2,1), (3,1)\}$$

۹- یک ماتریس $n \times n$ از اعداد متمایز مثلاً $1, 2, 3, \dots, n^2$ را یک مربع وفقی (یا مربع جادویی) می‌نامیم، هرگاه حاصل جمع درایه‌های هر سطر، حاصل جمع درایه‌های هر ستون، حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی، و حاصل جمع درایه‌های قطر فرعی با هم مساوی باشند. به عنوان مثال یک مربع وفقی 3×3 در زیر نشان داده شده است.

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

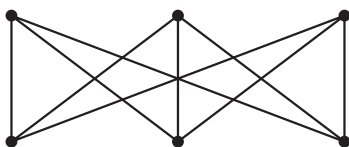
ثابت کنید که در هر مربع وفقی 3×3 که از اعضای $1, 2, 3, \dots, 9$ تشکیل شده است عضوی که در مرکز مربع قرار می‌گیرد همیشه عدد ۵ است.

۱۰- گراف G داده شده است. یک برچسب‌گذاری جادویی G عبارت است از متناظر کردن اعدادی، معمولاً صحیح و مثبت، به یال‌های G به‌طوری که حاصل جمع اعداد متناظر با یال‌های مارّ بر هر رأس عددی ثابت باشد. در گرافی که در شکل ۵ (الف) داده شده است اعدادی که روی یال‌ها نوشته شده‌اند یک برچسب‌گذاری جادویی را نشان می‌دهد، زیرا حاصل جمع اعداد متناظر به یال‌های مارّ بر هر رأس مساوی با ۴ است.

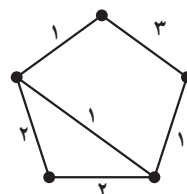
با استفاده از مربع وفقی 3×3 یک برچسب‌گذاری جادویی برای گراف شکل ۵ (ب) به دست آورید.

۱۱- ثابت کنید که تعداد انتخاب n گل از k نوع مختلف گل، که تکرار نیز مجاز باشد مساوی

$$\text{است با } \binom{n+k-1}{n}.$$



(ب)



(الف) یک برچسب‌گذاری جادویی

۱۲- تعداد جواب های صحیح و مثبت هریک از معادلات زیر را پیدا کنید.

(الف) $x_1 + x_2 + x_3 = 7$

(ب) $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, $2 \leq x_1 \leq 3$, $4 \leq x_2 \leq 8$, $x_3 \geq 1$

(پ) $x_1 + x_2 + x_3 = 14$, $1 \leq x_i \leq 7$, $i = 1, 2, 3$

۱۳- مطلوب است تعداد شماره‌ی شناسنامه‌های پنج رقمی که در آن‌ها هریک از رقم‌های ۱، ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر می‌شوند.

۱۴- در یک نظرخواهی از ۱۰۰ نفر دانش‌آموز نتایج زیر به‌دست آمده است: ۶۰ نفر آن‌ها مجله‌ی A را می‌خوانند، ۵۰ نفر مجله‌ی B، ۵۰ نفر مجله‌ی C، ۳۰ نفر مجله‌های A و B، ۲۰ نفر مجله‌های B و C، ۴۰ نفر مجله‌های A و C و بالاخره ۱۰ نفر هر سه مجله‌ی A و B و C را می‌خوانند. مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که:

(الف) هیچ مجله‌ای نمی‌خوانند؛

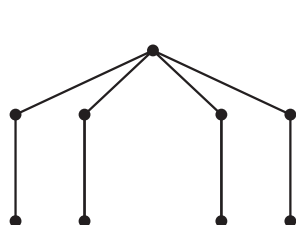
(ب) دقیقاً ۲ مجله می‌خوانند؛

(پ) حداقل ۲ مجله می‌خوانند؛

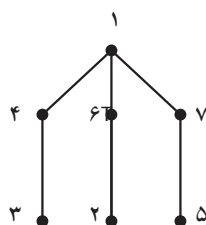
۱۵- (الف) اصل شمول و عدم شمول را در حالت چهار مجموعه بنویسید و آن را اثبات کنید.

(ب) در منطقه‌ای چهار روستا وجود دارد. قرار است راه‌هایی دوطرفه بین بعضی از روستاها ساخته شود به‌طوری که نهایتاً هیچ روستایی منفرد (یعنی بدون ارتباط با هیچ روستای دیگر) نماند. این کار به چند طریق امکان دارد؟

۱۶- برای درخت‌ها برچسب گذاری‌های مختلف تعریف می‌شود. یک برچسب گذاری دلپذیر برای یک درخت n رأسی عبارت است از نسبت دادن اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ به رؤس آن، به‌طوری که برچسب یال‌ها $n-1$ عدد متمایز باشند و برچسب هر یال از قدرمطلق تفاضل برچسب رأس‌های دو انتهای آن به‌دست آید. مثلاً در شکل ۶ (الف) یک برچسب گذاری دلپذیر را می‌بینیم. یک برچسب گذاری دلپذیر برای درخت شکل ۶ (ب) پیدا کنید: حدس این است که «هر درخت یک برچسب گذاری دلپذیر دارد». ولی این حدس هنوز ثابت یا رد نشده است.



(ب)



(الف) یک برجسبگذاری دلپذیر

شکل ۶

مراجع

۱- ایوان نیون، ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم. ترجمه‌ی علی عمیدی و بتول جذبی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ اول ۱۳۶۸.

2 – R.P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction, 2nd. ed., Addison- Wesley 1989.^۱

۱- مرکز نشر دانشگاهی ترجمه‌ی فارسی این مرجع را منتشر خواهد کرد.

مجله ریاضی

مربع وفقی یکی از ساختارهای ترکیبیاتی است که ریاضی دانان شرق درباره ی آن کارهای بسیاری انجام داده اند و روش های ساخت این مربع ها برای اندازه های مختلف منسوب به این دانشمندان است. اصولاً ساختارهای ترکیبیاتی یکی از مهم ترین مباحث ترکیبیات است که دارای کاربردهای فراوان نیز هستند. از مهم ترین ساختارهای ترکیبیاتی مربع های لاتین و طرح های بلوکی است. یک مربع لاتین عبارت است از یک ماتریس $n \times n$ با درایه های $1, 2, 3, \dots, n$ به طوری که در هر سطر و در هر ستون درایه های تکراری نباشند.

مربع های لاتین با مربع های وفقی نیز ارتباط دارند. یکی از کاربردهای مربع های لاتین در مبحث رمزنگاری است. به ازای هر n داده شده می توان یک مربع لاتین از مرتبه n ساخت. از مربع هایی که در زیر به ازای $n = 4$ و $n = 5$ ساخته شده اند

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

می توان به راحتی برای حالت کلی نیز ایده گرفت.

دقت کنید که در هر دو مربع فوق بعضی از درایه های واقع در دو گوشه ی چپ بالا و راست پایین را پررنگ نوشته ایم. در مربع اول ۴ تا و در مربع دوم ۶ تا از این درایه های پررنگ قرار دارند. جالب این است که اگر در هریک از این دو مربع فقط این درایه ها را به ما بدهند می توانیم بقیه درایه ها را به طور یکتا به دست آوریم.

تعداد درایه های پررنگ داده شده در حالت کلی $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ است. حال فرض کنید درایه های یک مربع لاتین اطلاعاتی است که می خواهید به یک شخص مورد اعتماد خود بدهید. یک مربع $n \times n$ از n^2 اطلاعات تشکیل می شود. الگوی فوق پیشنهاد می کند که فقط کافی است که حدود $\frac{1}{4}$ از اطلاعات را منتقل کنید. شخص مورد اعتماد می تواند بقیه را به طور یکتا پیدا کند.