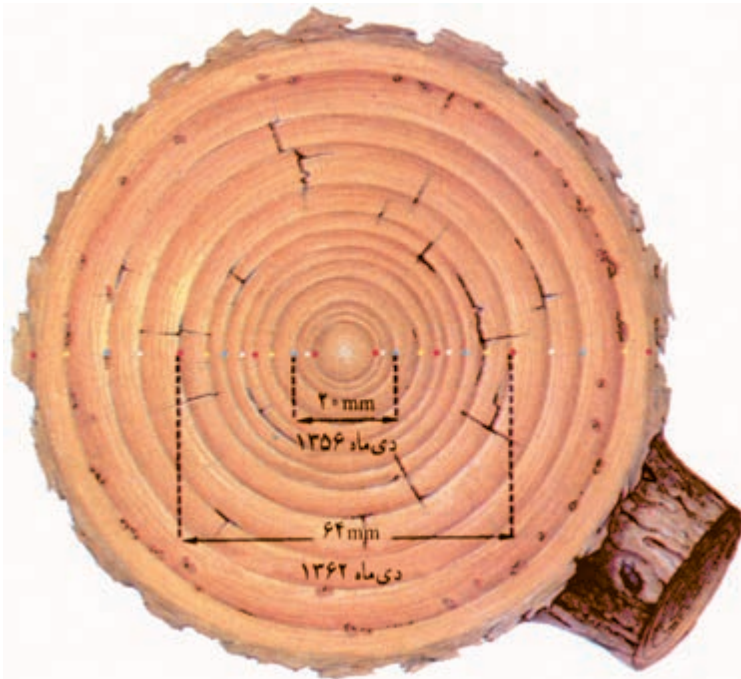


دایره

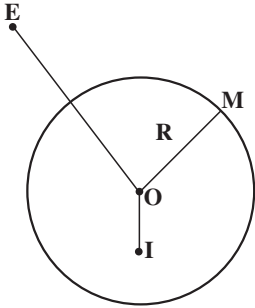


تصویر، حلقه‌های سالانه یک درخت بادام را که در دی ماه ۱۳۶۶ قطع شده است نشان می‌دهد. هر حلقه رشد درخت را در یک سال مشخص نشان می‌دهد. وجود ۱۳ حلقه نشان می‌دهد که این درخت در دی ماه ۱۳۶۶ سیزده ساله بوده است، یعنی رشد درخت در سال ۱۳۵۳ شروع شده است.

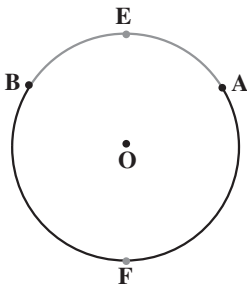
(C)

دایره مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که فاصله‌اش از نقطه ثابتی واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطه ثابت مرکز دایره و مقدار ثابت اندازه شعاع دایره نامیده می‌شوند.

دایره به مرکز O و به شعاع R را به صورت $C(O,R)$ نشان می‌دهند.

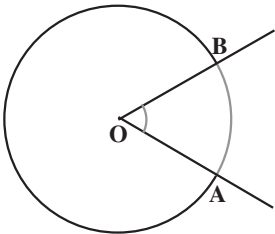


هر دایره، صفحه را به سه بخش افراز می‌کند:
 (۱) داخل دایره، مجموعه نقطه‌هایی مانند I ، که فاصله آنها از مرکز دایره، کمتر از شعاع دایره است، $OI < R$
 (۲) روی دایره، مجموعه نقطه‌هایی مانند M که فاصله آنها از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.

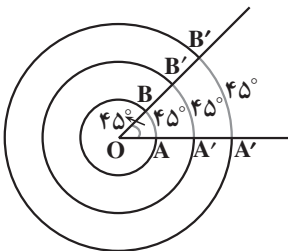


(۳) خارج دایره، مجموعه نقطه‌هایی مانند E که فاصله آنها از مرکز دایره، از شعاع دایره بیشتر است؛ $OE > R$
 دو نقطه A و B واقع بر یک دایره، دو کمان \widehat{AB} را روی آن دایره جدا می‌کند. در این حالت برای مشخص کردن آنها، از نقطه‌ای اختیاری واقع بر هر یک از آن دو کمان استفاده می‌شود، مانند کمانهای \widehat{AFB} و \widehat{AEB} در شکل مقابل.

۱-۲- زاویه مرکزی، وتر و مماس

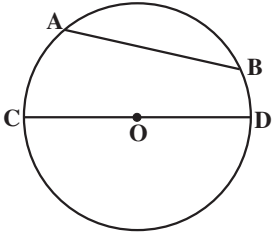


دایره‌ای به مرکز O را در نظر می‌گیریم و دو نقطه A و B را روی آن انتخاب می‌کنیم. نیم خطهای OA و OB دو زاویه به وجود می‌آورند که چون رأس آنها مرکز دایره است، زاویه‌های مرکزی نامیده می‌شوند. هر یک از این زاویه‌های مرکزی یک کمان از دایره جدا می‌کنند که به آن، کمان نظیر آن زاویه مرکزی گفته می‌شود.



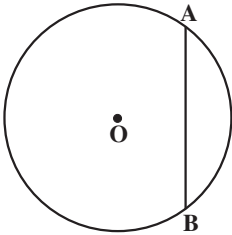
بنا به قرارداد، اندازه کمان نظیر هر زاویه مرکزی در دایره برحسب درجه، همان اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی به آن کمان است. وقتی اندازه زاویه مرکزی \widehat{AOB} برابر 45° است، اندازه کمانهای \widehat{AB} ، $\widehat{A'B'}$ و $\widehat{A'B'}$ از دایره‌هایی به مرکز O نیز مساوی 45° هستند.

۱- منظور از افراز یک مجموعه، تقسیم آن به زیرمجموعه‌هایی ناتهی است که اشتراک آنها تهی و اجتماع آنها تمام مجموعه اولیه باشد.



پاره‌خطی که دو نقطه متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند، وتر آن دایره نامیده می‌شود. در شکل روبه‌رو پاره‌خطهای AB و CD و ترهایی از دایره به مرکز O می‌باشند. وتری که از مرکز دایره می‌گذرد، قطر آن دایره نامیده می‌شود. در شکل روبه‌رو، CD قطر دایره است. هر قطر دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند. این کمانها نیمدایره نامیده می‌شوند.

فعالیت ۲-۱

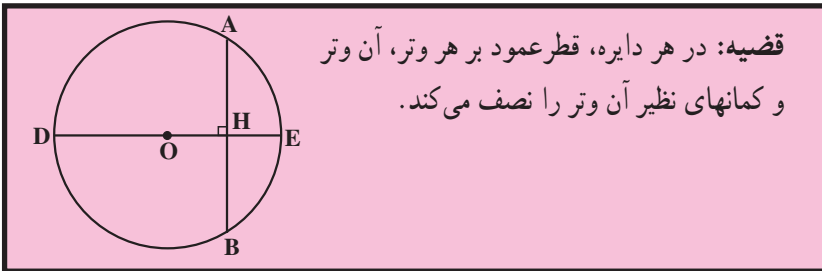


وتر AB در دایره‌ای به مرکز O داده شده است :
 ۱- قطری از این دایره را که بر وتر AB عمود است، رسم کنید، آن را DE و نقطه برخوردش با وتر AB را H بنامید.
 ۲- از نقطه O به نقطه‌های A و B وصل کنید. مثلث OAB چه نوع مثلثی است؟ چرا؟
 ۳- دلیل درستی تساویهای زیر را توضیح دهید.

$$\widehat{AD} = \widehat{DB} \text{ و } \widehat{AE} = \widehat{EB} \text{ (ب)}$$

$$AH = HB \text{ (الف)}$$

نتیجه فعالیت بالا را می‌توانیم به صورت قضیه زیر خلاصه کنیم :



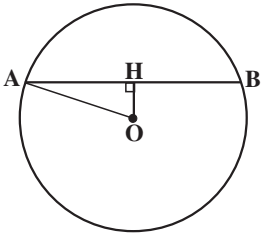
قضیه: در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمانهای نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

تمرین ۱ - ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره که از مرکز دایره نگذشته باشد، وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.

تمرین ۲ - ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می‌کند بر آن وتر عمود است.

فعالیت ۲-۲

- ۱- دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر رسم کنید.
 - ۲- وتر AB به طول $\frac{2}{4}$ سانتی‌متر در این دایره رسم کنید و این وتر را AB بنامید.
 - ۳- فاصله نقطه O مرکز دایره، از این وتر، یعنی طول پاره خط OH را به دست آورید.
 - ۴- مکان هندسی نقطه H وسط وترهایی از این دایره که طولشان $\frac{2}{4}$ سانتی‌متر است را تعیین کنید. آیا این مکان یک دایره است؟
- نظیر فعالیت بالا را در مورد دایره $C(O,R)$ و وتر AB به طول l از این دایره انجام دهید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



مثال: دایره $C(O, 26)$ داده شده است. اگر فاصله وتر AB از مرکز دایره برابر 10° باشد، طول وتر AB را به دست آورید.

حل: وسط وتر AB را H می‌نامیم و از O به H و A وصل می‌کنیم. در مثلث OAH داریم:

$$OA^2 = AH^2 + OH^2$$

$$(26)^2 = AH^2 + (10)^2 \quad \text{پس:}$$

بنابراین:

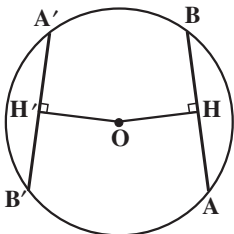
$$AH^2 = 576 \Rightarrow AH = 24$$

در نتیجه:

$$AB = 2AH = 48$$

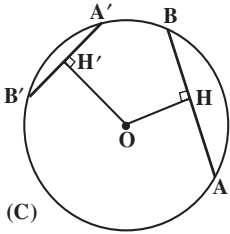
- تمرین ۱ - ثابت کنید در یک دایره، کمانهای نظیر دو وتر مساوی، با هم برابرند، و بعکس.
- تمرین ۲ - ثابت کنید در هر دایره، وترهای متساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بعکس.

یعنی در شکل زیر:

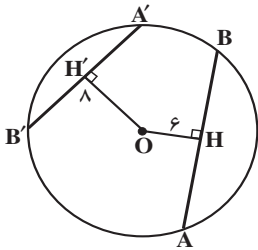


$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$

فعالیت ۲-۳

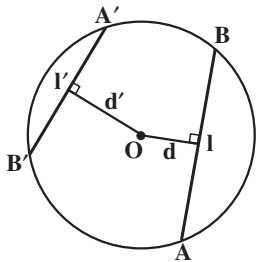


۱- در دایره $C(O, 10)$ وتر AB به طول ۱۶ و وتر $A'B'$ به طول ۱۲ داده شده‌اند.
فاصله هریک از این دو وتر از مرکز دایره یعنی OH و OH' را به دست آورید.



۲- در دایره $C(O, 10)$ فاصله وتر AB از مرکز دایره برابر ۶ و فاصله وتر $A'B'$ از مرکز دایره مساوی ۸ است. طول وترهای AB و $A'B'$ را به دست آورید.

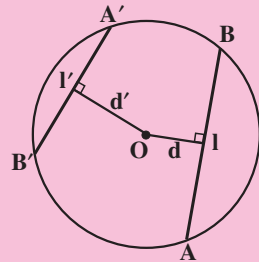
۳- چه رابطه‌ای بین فاصله وترها از مرکز دایره و طول آنها می‌باید؟
۴- آیا این رابطه همیشه برقرار است؟



۵- در دایره $C(O, R)$ ، وتر AB را به طول l و وتر $A'B'$ را به طول l' در نظر بگیرید. فاصله مرکز دایره از این دو وتر را به ترتیب d و d' بنامید. آیا رابطه‌های $d^2 + \frac{l^2}{4} = R^2$ و $d'^2 + \frac{l'^2}{4} = R^2$ برقرارند؟
به کمک رابطه‌های بالا ثابت کنید:

$$l \geq l' \Leftrightarrow d \leq d'$$

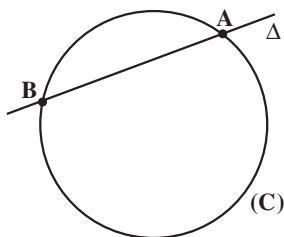
نتیجه فعالیت بالا را به صورت قضیه زیر می‌توانیم بیان کنیم:



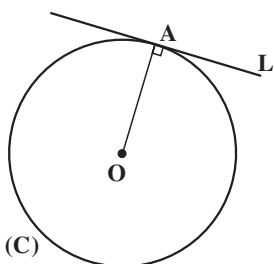
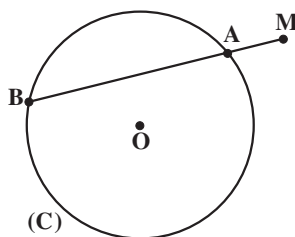
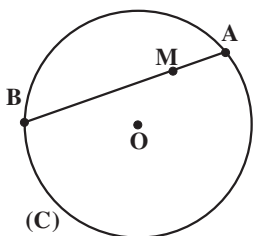
قضیه: در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگتر است، به مرکز دایره نزدیکتر است، و بعکس.

تمرین - ثابت کنید، کوچکترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه، عمود است.

۲-۱-۱- خطهای قاطع و مماس نسبت به دایره: خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع

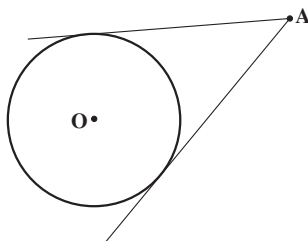


کند، قاطع نسبت به دایره یا به طور خلاصه، قاطع نامیده می شود. مانند قاطع Δ که دایره (C) را در دو نقطه A و B قطع کرده است. اگر قاطع رسم شده از نقطه M واقع در صفحه یک دایره، آن دایره را در دو نقطه A و B قطع کند، آنگاه پاره خطهای MA و MB را دو قطعه قاطع رسم شده از نقطه M و یا به صورت خلاصه، دو قطعه قاطع می نامند.



نقطه A را روی دایره به مرکز O در نظر می گیریم. خط L که از نقطه A می گذرد و بر شعاع OA عمود است، خط مماس بر دایره در نقطه A نامیده می شود. یک ویژگی مهم این خط مماس، آن است که فقط در نقطه A با دایره مشترک است. نقطه A را نقطه تماس خط L با دایره می نامند.

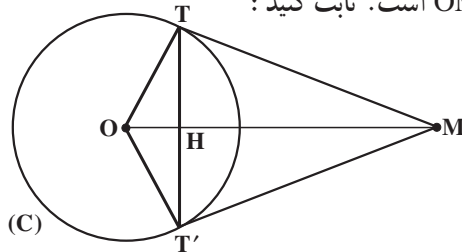
از هر نقطه خارج دایره می توان دو مماس بر آن دایره رسم کرد.



قضیه: طول مماسهای رسم شده بر یک دایره از هر نقطه خارج آن با هم برابرند.

تمرین ۱ - قضیه بالا را ثابت کنید.

تمرین ۲- دو خط MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره $C(O,R)$ مماسند. H نقطه برخورد وتر TT' با خط OM است. ثابت کنید:



الف - خط OM نیمساز زاویه‌های TMT' و TOT' است.

ب - خط OM عمود منصف پاره خط TT' است.

$$\text{پ - } OH \cdot OM = R^2$$

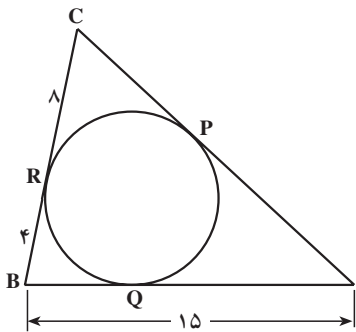
تمرین ۳- در شکل بالا ثابت کنید:

$$\text{الف - } TT'^2 = 4OH \cdot HM$$

$$\text{ب - } TT' \cdot OM = 2R \cdot MT$$

مثال ۱: در شکل مقابل، ضلعهای مثلث ABC در

نقطه‌های P ، Q و R بر دایره مماسند. با توجه به مقدارهای داده شده، اندازه ضلع AC را تعیین کنید.



حل: چون مماسهای رسم شده از یک نقطه بر یک

دایره با هم برابرند، بنابراین:

$$BQ = BR = 4$$

$$AQ = AB - BQ$$

از آنجا:

$$AQ = 15 - 4 = 11$$

پس:

$$AP = AQ = 11$$

$$CP = CR = 8$$

از طرفی

$$AC = AP + PC = 11 + 8 = 19$$

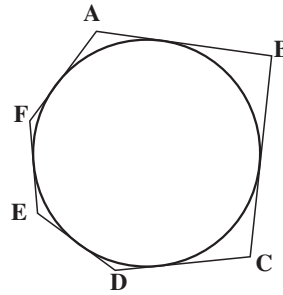
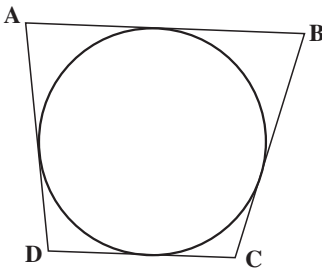
در نتیجه

مثلث مثال بالا، نمونه‌ای از یک چندضلعی محیطی است. هرگاه همه ضلعهای یک چندضلعی

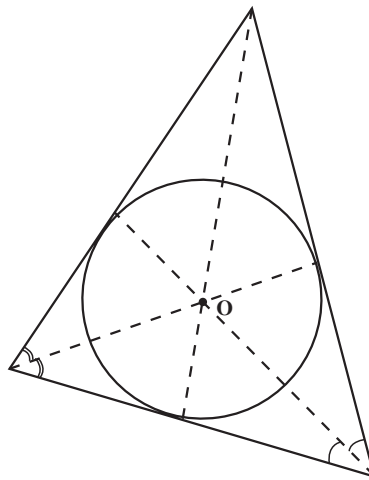
بر یک دایره مماس باشند، چندضلعی را محیطی یا محیط بر دایره می‌نامند. مانند چهارضلعی

$ABCD$ و شش ضلعی $ABCDEF$ ، در این صورت دایره را محاط در چندضلعی یا دایره محاطی

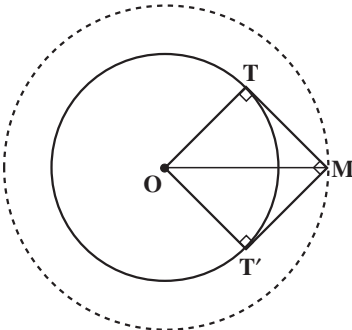
چندضلعی می‌نامند.



هر مثلث می تواند بر یک دایره محیط شود. مرکز این دایره نقطه برخورد نیمسازهای زاویه های درونی مثلث است (چرا؟). این دایره را دایره محاطی داخلی مثلث می گوئیم.



باید توجه داشت که هر مثلث سه دایره محاطی خارجی نیز دارد. این دایره ها هر کدام بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماسند. مرکز این دایره ها چه نقطه هایی هستند؟
 مثال ۲: دایره $C(O,R)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه ای را تعیین کنید که مماسهای رسم شده از این نقطه بر دایره، بر هم عمود باشند.

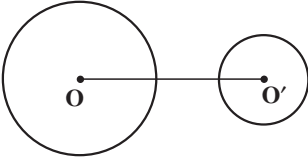
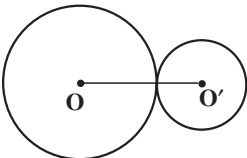
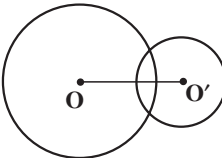
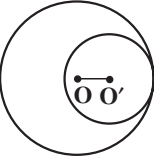
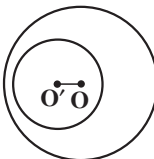
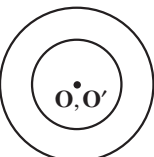


حل: فرض می کنیم مسأله حل شده باشد و M یکی از نقطه هایی باشد که از آن، دو مماس عمود بر هم MT و MT' بر دایره $C(O,R)$ رسم شده است. از O به نقطه های تماس T و T' وصل می کنیم. چهارضلعی $OTMT'$ مربع است. زیرا چهار زاویه قائمه دارد و دو ضلع مجاورش نیز برابرند $(OT = OT' = R)$. در این مربع، $OM = R\sqrt{2}$ مقدار ثابتی

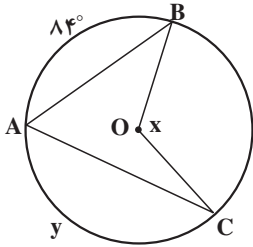
است. نشان دهید مکان هندسی نقطه M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R\sqrt{2}$ است.

۲-۱-۲- وضع دو دایره نسبت به هم: وضع دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با

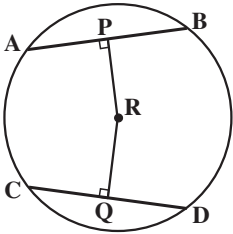
فرض $R > R'$ و $OO' = d$ ، می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی کرد.

	$d > R + R'$	دو دایره برون هم
	$d = R + R'$	دو دایره مماس برون
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دایره‌های هم‌مرکز

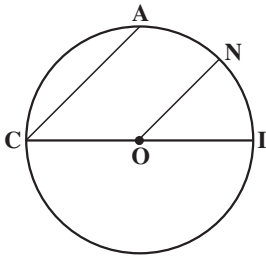
مسأله‌ها



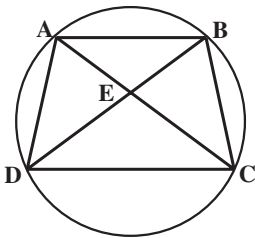
۱. الف) اگر $\widehat{y} = 14^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه x را به دست آورید.
 ب) اگر $\widehat{x} = 165^\circ$ ، آنگاه اندازه کمان \widehat{y} را به دست آورید.



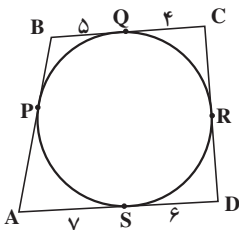
۲. با توجه به شکل روبه‌رو:
 الف) اگر طول شعاع 10° و $PR = 6$ ، آنگاه طول AB و AP را به دست آورید.
 ب) اگر $RC = \sqrt{2}$ و $CQ = RQ$ ، آنگاه طول پاره‌خط‌های CQ ، DQ و CD را به دست آورید.



۳. در دایره به مرکز O و به قطر CI ، داریم $CA \parallel ON$. ثابت کنید $\widehat{AN} = \widehat{NI}$.



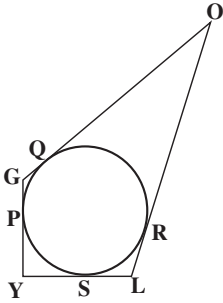
۴. با توجه به شکل نشان دهید:
 الف) اگر $AD = BC$ ، آنگاه $AC = BD$.
 ب) اگر $AC = BD$ ، آنگاه $AD = BC$.



۵. اگر P, Q, R, S ، نقطه‌های تماس ضلع‌های چهارضلعی $ABCD$ با دایره باشند، آنگاه محیط این چهارضلعی را به دست آورید.

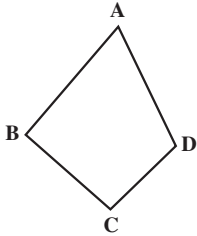
۶. ضلعهای چهارضلعی محیطی GOLY بر دایره مماسند (شکل

روبه‌رو)، ثابت کنید: $GO + LY = OL + GY$



۷. در چهارضلعی ABCD (شکل روبه‌رو)، $AB + CD = AD + BC$

است. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است.



راه‌نمایی: روی ضلع AB، پاره‌خط $AM = AD$ و روی ضلع BC

پاره‌خط $CN = CD$ را جدا کرد. از ویژگی مثلثهای متساوی‌الساقین استفاده کنید.

۸. زاویه بین دو مماس رسم شده از نقطه A بر دایره $C(O, 5)$ ، برابر 60°

است. طول پاره‌خط OA را به دست آورید.

۹. دایره $C(O, 6)$ و نقطه M به فاصله ۱۲ سانتی‌متر

از مرکز این دایره را در نظر بگیرید. خطهای MT و MT' بر

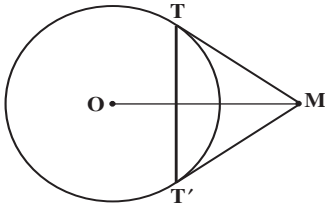
این دایره مماسند. (T و T' نقطه‌های تماسند).

الف - طول مماسهای MT و MT' را تعیین کنید.

ب - طول وتر TT' را به دست آورید.

پ - اندازه زاویه TMT' و نوع مثلث MTT' را

تعیین کنید.



۱۰. خطهای AE، AF، BC به ترتیب در نقطه‌های E، F، D

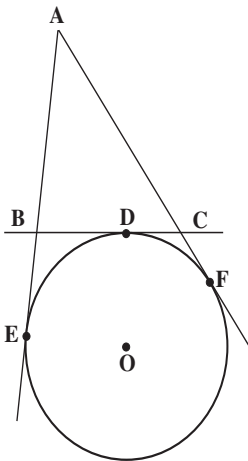
بر دایره (O) مماس هستند. مماس BC، خطهای AE و AF را به ترتیب

در نقطه‌های B و C قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطه D

روی دایره بین دو نقطه ثابت E و F، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.

۱۱. شعاعهای دو دایره هم‌مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر هستند. اندازه

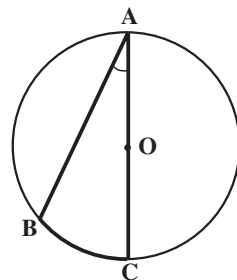
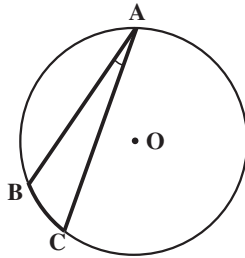
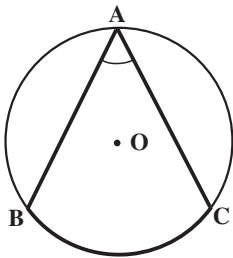
وتری از دایره بزرگتر را که بر دایره کوچکتر مماس است پیدا کنید.



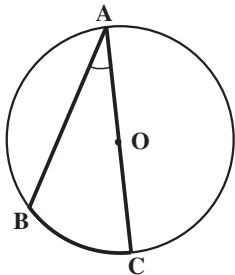
۲-۲- زاویه محاطی

زاویه‌ای که رأسش روی دایره و ضلعهایش دو وتر از دایره باشند، زاویه محاطی نامیده می‌شود.

کمانی از دایره را که به دو ضلع زاویهٔ محاطی محدود و در داخل زاویه واقع است، کمان روبه‌رو به آن زاویه می‌نامند.



فعالیت ۲-۴



در دایرهٔ به مرکز O زاویهٔ محاطی BAC را که ضلع AC از آن، قطر دایره است، در نظر بگیرید.

۱- از نقطهٔ B به O مرکز دایره وصل کنید. OAB چه نوع مثلثی است؟

۲- زاویهٔ مرکزی BOC چند برابر زاویهٔ محاطی BAC است؟ چرا؟
 ۳- درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید:

$$\widehat{BOC} = \widehat{BC}$$

$$2\widehat{BAC} = \widehat{BC}$$

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

بنابراین

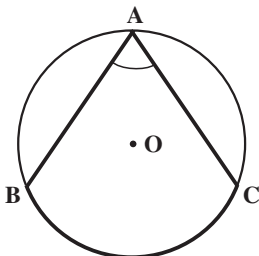
در نتیجه:

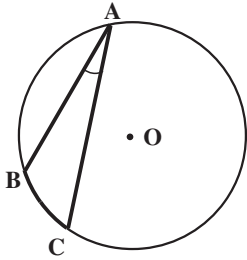
نتیجهٔ فعالیت بالا را بنویسید.

تمرین ۱ - دو ضلع زاویهٔ محاطی BAC در دو طرف نقطهٔ O مرکز دایرهٔ (C) واقع است.

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

راهنمایی: قطری از دایره را که از رأس A می‌گذرد رسم کنید.





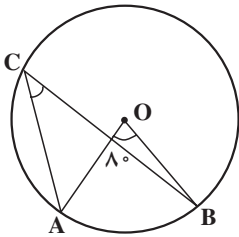
تمرین ۲- دو ضلع زاویه محاطی BAC در یک طرف نقطه

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

O مرکز دایره (C) قرار دارد. ثابت کنید،

با توجه به فعالیت (۲-۴) و تمرینهای بالا نتیجه می‌گیریم که:

قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.

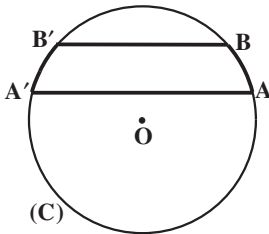


مثال: در دایره به مرکز O اندازه زاویه مرکزی AOB برابر

8° است. اندازه زاویه محاطی ACB چه قدر است؟

حل: چون اندازه هر زاویه مرکزی با کمان روبه‌رویش برابر

است، پس $\widehat{AB} = 8^\circ$. بنابراین داریم:



$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{8^\circ}{2} = 4^\circ$$

تمرین - ثابت کنید در هر دایره کمانهای محصور بین دو وتر

موازی با هم برابرند.

راهنمایی: از ویژگی زاویه محاطی، یا قطر عمود بر وتر استفاده

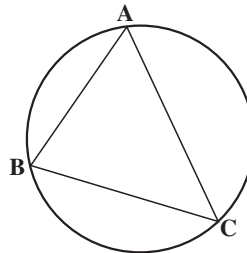
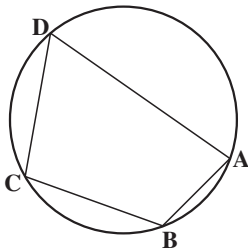
کنید.

چندضلعی محاطی

اگر همه رأسهای یک چندضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، آن را چند ضلعی محاطی

و یا چند ضلعی محاط در دایره می‌نامند. مانند مثلث ABC و چهارضلعی ABCD، که هر کدام در

یک دایره محاطند. دایره را محیط بر چندضلعی یا دایره محیطی چندضلعی می‌نامند.



هر مثلث می‌تواند در یک دایره محاط شود. مرکز دایره محیطی مثلث، محل برخورد عمود منصفهای ضلعهای مثلث است. چرا؟
 تمرین — ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند.
 عکس حکم بالا را نیز می‌توان ثابت کرد.

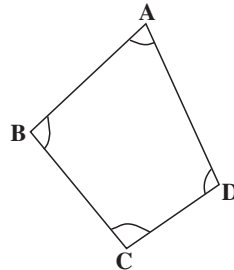
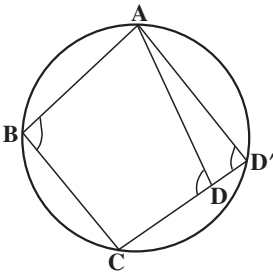
قضیه: اگر در یک چهارضلعی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند، آن چهارضلعی محاطی است.

برهان: فرض می‌کنیم در چهارضلعی ABCD، هر دو زاویه روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند.

یعنی:

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \quad (1)$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \quad (2)$$



بر سه نقطه A و B و C یک دایره می‌گذرد؛ ثابت می‌کنیم که این دایره از نقطه D نیز می‌گذرد.
 برای اثبات این ادعا از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

اگر این دایره از رأس D نگذرد، نقطه برخورد خط CD با دایره را D' می‌نامیم و از D' به A

وصل می‌کنیم. چون چهارضلعی ABCD' محاطی است، بنابراین:

$$\hat{B} + \hat{D}' = 180^\circ \quad (3)$$

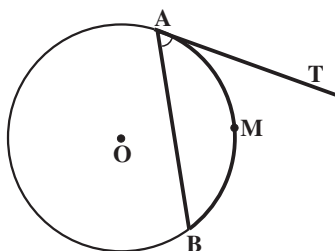
از رابطه‌های (2) و (3) نتیجه می‌شود که:

$$\hat{D} = \hat{D}' \quad (4)$$

چون زاویه D زاویه خارجی مثلث ADD' است، بنابراین:

$$\hat{D} > \hat{D}' \quad (5)$$

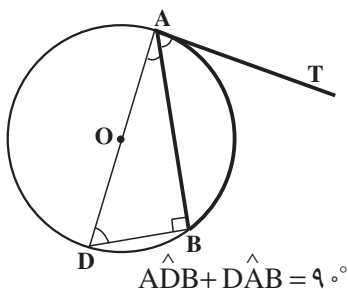
که رابطه (۵) با رابطه (۴) در تناقض است. در نتیجه فرض ما، که دایره از رأس D نمی گذرد نادرست، و حکم قضیه برقرار است.



۲-۳- زاویه ظلی

زاویه ای که رأسش روی دایره است، یک ضلعش دایره را قطع می کند و ضلع دیگری بر دایره مماس است، زاویه ظلی نامیده می شود؛ مانند زاویه TAB در شکل روبه رو. کمانی از دایره را که به زاویه ظلی محدود است، کمان نظیر، یا کمان روبه رو به زاویه ظلی می نامند.

قضیه: اندازه هر زاویه ظلی، برابر با نصف کمان روبه روی آن است.



برهان: زاویه ظلی BAT را در دایره به مرکز O در نظر می گیریم. قطر AD از این دایره را که از رأس A می گذرد رسم می کنیم و از D به نقطه B وصل می نماییم. زاویه ABD محاطی روبه رو به قطر، مساوی 90° است. پس

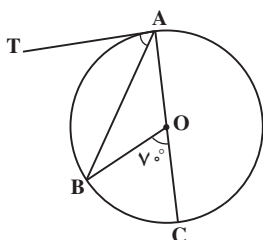
$$(1)$$

از طرفی

$$(2)$$

از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می شود که $\hat{BAT} = \hat{ADB}$ اما می دانیم که $\hat{ADB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$. پس

$$\hat{BAT} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



مثال ۱: قطر دایره و اندازه زاویه مرکزی BOC برابر 70° و خط AT در نقطه A بر دایره مماس است. اندازه زاویه ظلی TAB را تعیین کنید.

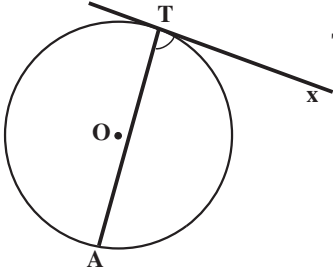
حل: چون $\hat{BOC} = 70^\circ$ ، در نتیجه $\widehat{BC} = 70^\circ$ است.

از طرفی $\widehat{ABC} = 18^\circ$ است. پس:

$$\widehat{AB} = 18^\circ - 7^\circ = 11^\circ$$

بنابراین:

$$\widehat{TAB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 5.5^\circ$$



مثال ۲: اگر اندازه زاویه ظلی ATX مساوی $(2\alpha - 6)^\circ$ و اندازه کمان \widehat{AT} برابر $(3\alpha - 33)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه ATX را بیابید.

حل: چون اندازه هر زاویه ظلی مساوی نصف اندازه کمان روبه روی آن است، پس داریم:

$$\widehat{ATX} = \frac{\widehat{AT}}{2}$$

از آنجا داریم:

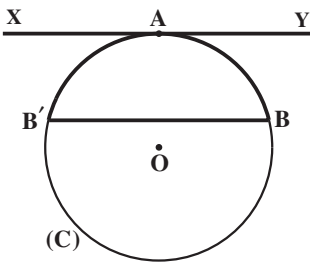
$$2\alpha - 6 = \frac{3\alpha - 33}{2}$$

و یا

$$4\alpha - 12 = 3\alpha - 33 \quad 45^\circ$$

$$\widehat{ATX} = (2 \times 45 - 6)^\circ = 84^\circ$$

در نتیجه



تمرین — خط XY در نقطه A بر دایره (C) مماس است و وتر BB' از دایره را موازی XY رسم کرده ایم. ثابت کنید:

$$\widehat{AB} = \widehat{AB'}$$

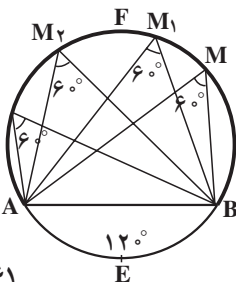
۲-۴ — کمان درخور یک زاویه

در دایره $C(O, R)$ کمان $\widehat{AEB} = 12^\circ$ را اختیار و وتر AB

را رسم می کنیم.

نقطه دلخواه M را روی کمان دیگر \widehat{AB} (روی \widehat{AFB}) در

نظر می گیریم و از این نقطه به نقطه های A و B وصل می کنیم.

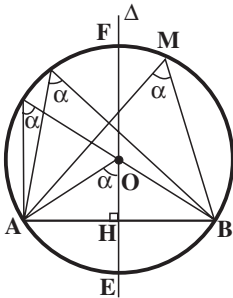
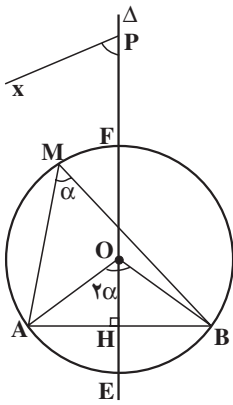


در نتیجه :

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AEB} = \frac{1}{2} \times 12^\circ = 6^\circ$$

هر نقطه دیگری از این کمان نیز این ویژگی را دارد، یعنی اگر M_1, M_2, \dots, M_n ، نقطه‌های دیگری روی کمان \widehat{AFB} باشند و از این نقطه‌ها به دو نقطه A و B وصل کنیم، زاویه‌های $AM_1B, AM_2B, \dots, AM_nB$ همگی 6° هستند. به عبارت دیگر، هر نقطه از کمان \widehat{AFB} رأس زاویه‌ای برابر 6° است که ضلعهایش از دو نقطه A و B می‌گذرند. این کمان، کمان درخور، یا کمان حاوی زاویه 6° درجه روبه‌رو به پاره خط AB نامیده می‌شود.

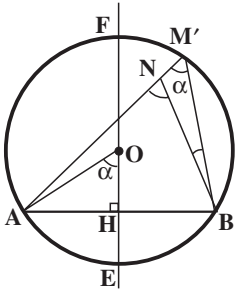
قضیه: مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α که ضلعهایش از دو نقطه ثابت می‌گذرند، کمانهایی از دو دایره مساوی است که از آن دو نقطه ثابت می‌گذرند و زاویه مرکزی روبه‌رو به وتر مشترک آنها برابر 2α است.



برهان: دو نقطه ثابت A و B را در یک صفحه در نظر می‌گیریم. آنها را به هم وصل کرده، وسط پاره خط AB را H می‌نامیم. آنگاه خط Δ ، عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. از نقطه دلخواه P واقع بر خط Δ ، نیم‌خط Px را چنان رسم می‌کنیم که $\widehat{HPx} = \alpha$ باشد. از نقطه A خطی موازی Px رسم می‌نماییم تا خط Δ را در نقطه O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم می‌کنیم. این دایره از نقطه B نیز می‌گذرد و اندازه کمان $\widehat{AEB} = 2\alpha$ است. چرا؟ کمان \widehat{AFB} مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α است که ضلعهایش از دو نقطه A و B می‌گذرند، زیرا :

۱- هر نقطه مانند M که روی این کمان باشد و از این نقطه به دو نقطه A و B وصل کنیم، اندازه زاویه \widehat{AMB} برابر α است چون :

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AEB}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$



۲- نقطه N، رأس هر زاویه مانند $\angle ANB = \alpha$ که ضلعهایش از دو نقطه ثابت A و B می‌گذرد و در طرف کمان \widehat{AFB} واقع است، روی کمان \widehat{AFB} قرار دارد. زیرا اگر نقطه N روی این کمان نباشد، یا داخل دایره $C(O,R)$ واقع است، که در این صورت $\angle ANB > \alpha$ خواهد بود، یا نقطه N خارج این دایره قرار دارد که در این صورت $\angle ANB < \alpha$ است. زیرا اگر در حالت نخست نقطه برخورد امتداد AN با دایره را M' بنامیم و از M' به B وصل کنیم، داریم:

$$\angle ANB = \angle AM'B + \angle M'BN$$

$$\angle ANB < \alpha \quad \angle M'BN < \alpha \quad \text{اما} \quad \angle AM'B = \alpha$$

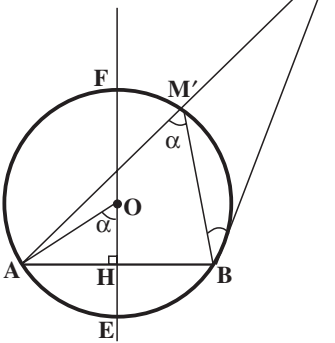
$$\angle ANB > \alpha \quad \text{در نتیجه:}$$

و در حالت دوم، اگر نقطه برخورد AN با دایره را M' بنامیم، داریم:

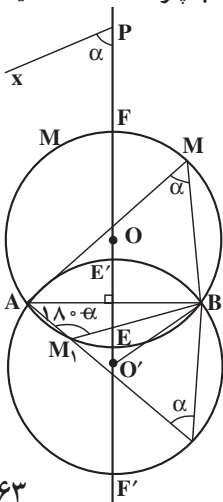
$$\angle ANB = \angle AM'B - \angle M'BN$$

$$\angle ANB < \alpha \quad \angle M'BN < \alpha \quad \text{و از آنجا:}$$

$$\angle ANB < \alpha \quad \text{در نتیجه:}$$



بنابراین، در هر دو حالت، نتیجه به دست آمده خلاف فرض است. در نتیجه نقطه N روی کمان \widehat{AFB} است. این کمان، کمان درخور یا کمان حاوی زاویه α روبه‌رو یا وابسته به پاره خط AB، نامیده می‌شود.



در صورتی که از نقطه B خطی موازی Px رسم کنیم تا عمود منصف پاره خط AB را در نقطه O' قطع کند، و سپس دایره‌ای به مرکز O' و به شعاع $O'A = O'B$ رسم نماییم تا عمود منصف پاره خط AB را در نقطه‌های E' و F' قطع کند (شکل روبه‌رو)، کمان $\widehat{AF'B}$ نیز کمان درخور زاویه α روبه‌رو به پاره خط AB است.

بنابراین، مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α که ضلعهایش از دو نقطه ثابت A و B می‌گذرند کمانهایی از دو دایره مساوی است که بر A و B مرور می‌کنند و زاویه مرکزی روبه‌رو به وتر مشترک آنها، برابر 2α است.

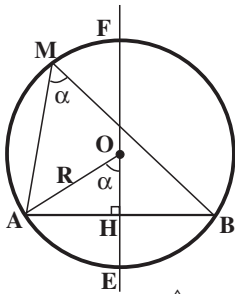
نتیجه ۱ — کمانهای $\widehat{AE'B}$ و \widehat{AEB} از دو دایره O و O' ، کمان درخور زاویه $180^\circ - \alpha$ روبه‌رو به پاره خط AB می‌باشند. چرا؟

نتیجه ۲ — کمان درخور زاویه 90° درجه روبه‌رو به پاره خط AB ، دایره‌ای به قطر AB است. چرا؟

نکته: در هر یک از حالت‌های ذکر شده، دو نقطه A و B جزء کمان درخور زاویه α یا $180^\circ - \alpha$ نیستند.

نتیجه ۳ — شعاع دایره‌ای که کمان درخور زاویه α روبه‌رو به پاره خط AB به طول a بخشی از آن است، $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ و فاصله

مرکز دایره از وتر AB ، $OH = \frac{a}{2 |\operatorname{tg} \alpha|}$ است، زیرا:



$$\hat{H} = 90^\circ, \hat{AOH} = \alpha, AH = \frac{AB}{2}, \sin \alpha = \frac{AH}{AO}$$

بنابراین داریم:

$$\sin \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

در نتیجه

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

از طرفی

$$|\cos \alpha| = \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{R}$$

پس

$$OH = R |\cos \alpha|$$

همچنین داریم

$$|\operatorname{tg} \alpha| = \frac{AH}{OH} = \frac{\frac{a}{2}}{OH}$$

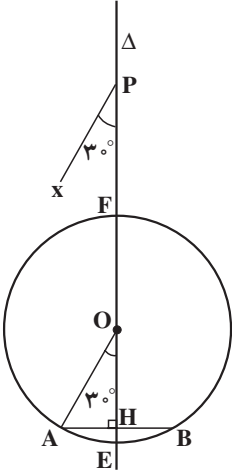
پس

$$OH = \frac{a}{2 |\operatorname{tg} \alpha|}$$

در نتیجه :

$$OH = R|\cos \alpha| = \frac{a}{2|\operatorname{tg} \alpha|}$$

مثال ۱: پاره خط AB به طول ۴ سانتی متر داده شده است. کمان درخور زاویه 3° رو به رو به این پاره خط را رسم کنید. شعاع دایره ای را که این کمان درخور بخشی از آن است و فاصله مرکز این دایره از پاره خط AB را تعیین کنید.



حل: خط Δ عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم. از نقطه اختیاری P واقع بر Δ نیمخط Px را چنان رسم می نماییم که $\widehat{HPx} = 3^\circ$ باشد (H وسط پاره خط AB است). از نقطه A خطی موازی Px رسم می کنیم تا خط Δ را در نقطه O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم می کنیم. کمان \widehat{AFB} از این دایره قسمتی (نیمی) از مکان هندسی خواسته شده است. با انتخاب نقطه P در طرف دیگر پاره خط و تکرار همین فرآیند نیمه دیگر مکان هندسی به دست می آید. شعاع دایره (OA و O) را R می نامیم. می دانیم که :

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

پس

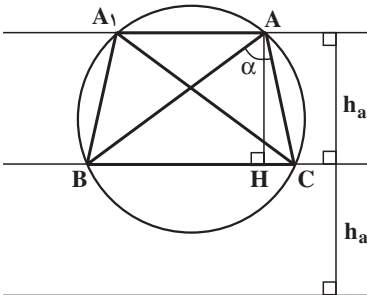
$$R = \frac{4}{2 \sin 3^\circ} = 4$$

از طرفی داریم :

$$OH = R|\cos \alpha|$$

بنابراین :

$$OH = 4|\cos 3^\circ| = 2\sqrt{3}$$

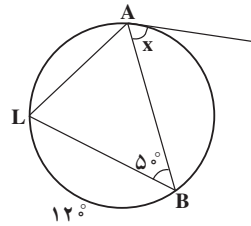
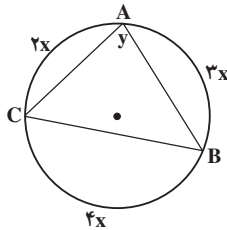


مثال ۲: از مثلث ABC، ضلع $BC = a$ ، زاویه $\hat{A} = \alpha$ و ارتفاع $AH = h_a$ داده شده است. مثلث را رسم کنید. حل: برای رسم مثلث ABC، نخست پاره خط BC به طول a را رسم می کنیم. حال باید رأس A را مشخص

کنیم. چون $\widehat{BAC} = \alpha$ ، پس یک مکان هندسی رأس A کمان درخور زاویه α روبه‌رو به پاره‌خط BC است؛ از طرفی $AH = h_a$ مقدار ثابتی است، پس مکان هندسی دیگر رأس A دو خط موازی ضلع BC و به فاصله h_a از آن است. این دو مکان هندسی را رسم می‌کنیم، نقطه یا نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی، رأس A است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است. مسأله چند جواب دارد؟

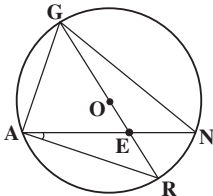
مسأله‌ها

۱. اندازه x و y را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید.

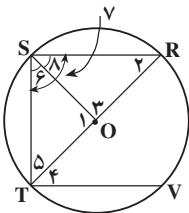


۲. در دایره به مرکز O ، GR قطر دایره است. $\widehat{AG} = 7^\circ$.

و $\widehat{NAR} = 3^\circ$. اندازه‌های زیر را به دست آورید و در جای مناسب روی شکل یادداشت کنید:

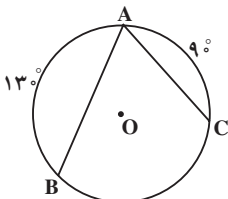


- | | |
|---------------------|---------------------|
| (ب) \widehat{R} | (الف) \widehat{N} |
| (ت) \widehat{GN} | (پ) \widehat{NR} |
| (ج) \widehat{GAR} | (ث) \widehat{GAN} |



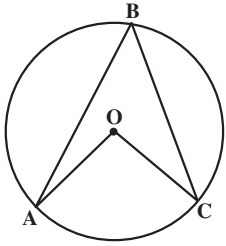
۳. در دایره به مرکز O ، $RS \parallel VT$ ، $\widehat{TS} = 7^\circ$ و RT قطر

دایره است. اندازه زاویه‌های ۱ تا ۸ را به دست آورید.

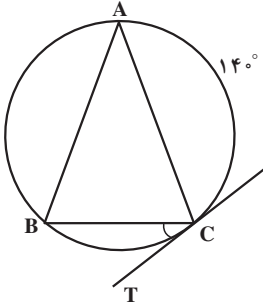


۴. زاویه محاطی BAC در دایره به مرکز O داده شده است.

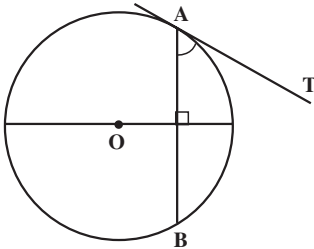
اگر $\widehat{AB} = 13^\circ$ و $\widehat{AC} = 9^\circ$ باشد، اندازه زاویه BAC را تعیین کنید.



۵. در دایره به مرکز O، اگر $\widehat{AOC} = (3\alpha - 12)^\circ$ و $\widehat{ABC} = (\alpha - 16)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه‌های مرکزی AOC و محاطی ABC را تعیین کنید.

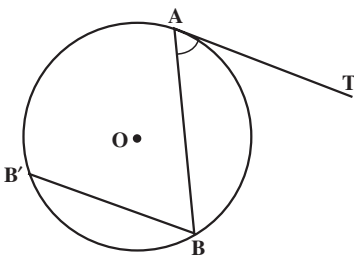


۶. در شکل روبه‌رو، $AB = AC$ ، CT مماس بر دایره در نقطه C و $\widehat{AC} = 14^\circ$ است. اندازه زاویه BCT را بیابید.



۷. زاویه ظلی TAB در دایره به مرکز O داده شده است. با استفاده از ویژگی قطر عمود بر وتر، ثابت کنید که

$$\widehat{TAB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



۸. زاویه ظلی TAB در دایره به مرکز O داده شده است. به کمک خط BB' که موازی خط مماس AT رسم شده است، ثابت کنید که

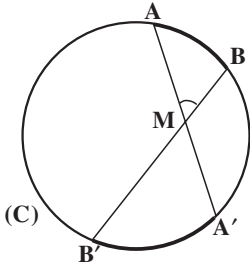
$$\widehat{TAB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

۹. با استفاده از تعریف زاویه محاطی، نشان دهید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

۱۰. در مثلث ABC ضلع $BC = a$ ، $\widehat{A} = \alpha$ و میانه $AM = m_a$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۵-۲ زاویه بین دو وتر

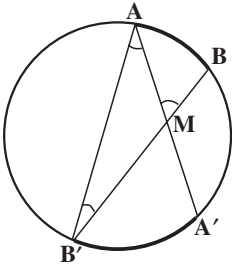
دو وتر AA' و BB' از دایره (C) در نقطه M یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت می‌شود:



$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2}$$

برهان: پاره خط AB' را رسم می‌کنیم. زاویه \widehat{AMB} زاویه خارجی مثلث AMB' است،

پس:



$$\widehat{AMB} = \widehat{AB'M} + \widehat{B'AM}$$

یا

$$\widehat{AMB} = \widehat{AB'B} + \widehat{A'AB'}$$

چون $\widehat{AB'B} = \frac{\widehat{AB}}{2}$ و $\widehat{A'AB'} = \frac{\widehat{A'B'}}{2}$ بنابراین:

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{A'B'}}{2}$$

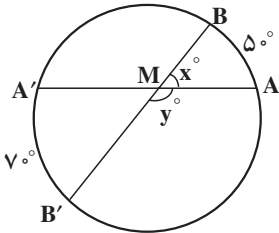
در نتیجه

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2}$$

به‌طور کلی می‌توان گفت:

قضیه: اندازه زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود برابر نصف مجموع اندازه دو کمانی از دایره است که به ضلعها و امتداد ضلعهای آن زاویه محدودند.

مثال: به کمک شکل مقابل مقادیر x و y را تعیین کنید.



حل: زاویه $\widehat{AMB} = x^\circ$ از برخورد دو وتر AA' و BB'

به دست آمده است. پس داریم:

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2}$$

$$x^\circ = \frac{5^\circ + 7^\circ}{2}$$

از آنجا

$$x = 6^\circ$$

پس

زاویه $\widehat{AMB'} = y^\circ$ مکمل زاویه AMB است. پس:

$$y^\circ = 18^\circ - x^\circ$$

$$y^\circ = 18^\circ - 6^\circ$$

از آنجا

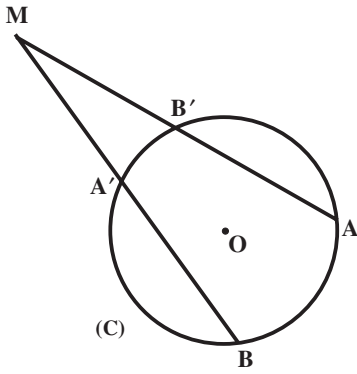
$$y = 12^\circ$$

پس:

۲-۶ زاویه بین امتداد دو وتر

امتداد وترهای AA' و BB' از دایره (C) در نقطه M

یکدیگر را قطع کرده اند. ثابت می شود:



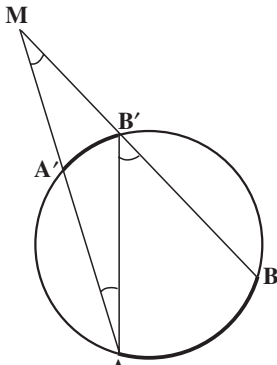
$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2}$$

برهان: پاره خط AB' را رسم می کنیم. زاویه $AB'B$ ،

زاویه خارجی مثلث AMB' است،

$$\widehat{AB'B} = \widehat{B'AM} + \widehat{AMB'}$$

پس:



$$\widehat{AMB'} = \widehat{AB'B} - \widehat{B'AM}$$

و یا

$$\text{اما: } \widehat{AB'B} = \frac{\widehat{AB}}{2} \text{ و } \widehat{B'AM} = \frac{\widehat{A'B'}}{2} \text{ . چرا؟}$$

بنابراین

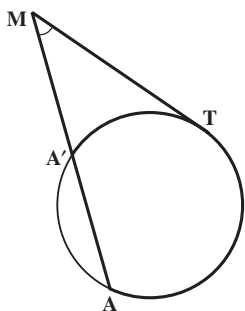
$$\widehat{AMB'} = \frac{\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{A'B'}}{2}$$

در نتیجه:

$$\widehat{AMB} = \widehat{AMB'} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2}$$

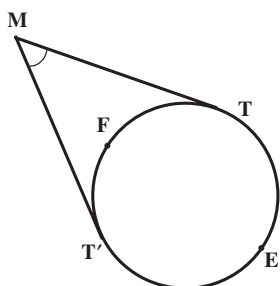
به طور کلی می توان گفت :

قضیه: اندازه زاویه ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می آید، برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازه کمانهایی از آن دایره است که به ضلعهای آن زاویه محدودند.



تمرین ۱ — خط مماس بر دایره (C) در نقطه T امتداد وتر AA' از این دایره را در نقطه M قطع کرده است (شکل روبه رو). ثابت کنید :

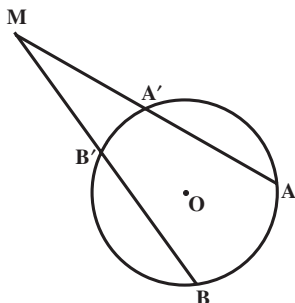
$$\widehat{AMT} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{A'T}}{2}$$



تمرین ۲ — ثابت کنید زاویه بین دو خط مماس رسم شده از دو نقطه T و T' بر یک دایره، برابر قدرمطلق نصف تفاضل دو کمان ایجاد شده بین نقطه های T و T' است.

راهنمایی: در شکل داده شده ثابت کنید

$$\widehat{TMT'} = \left| \frac{\widehat{TET'} - \widehat{TFT'}}{2} \right|$$



مثال ۱: امتدادهای دو وتر AA' و BB' از دایره O در نقطه M متقاطعند. اندازه زاویه AMB را در هر یک از حالتها زیر تعیین کنید :

- الف — اگر $\widehat{AB} = 12^\circ$ و $\widehat{A'B'} = 8^\circ$ باشد ؛
- ب — اگر $\widehat{AB} - \widehat{A'B'} = 3^\circ$ باشد.
- پ — اگر $\widehat{AB} = \widehat{A'B'} + 6^\circ$ باشد ؛

$$\frac{\widehat{A'B'}}{1} = \frac{\widehat{B'B}}{4} = \frac{\widehat{BA}}{3} = \frac{\widehat{AA'}}{2}$$

ت - اگر

حل: داریم:

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} = \frac{12^\circ - 8^\circ}{2} = 2^\circ$$

الف -

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} = \frac{3^\circ}{2} = 1.5^\circ$$

ب -

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} = \frac{\widehat{A'B'} + 6^\circ - \widehat{A'B'}}{2} = 3^\circ$$

پ -

$$\frac{\widehat{A'B'}}{1} = \frac{\widehat{B'B}}{4} = \frac{\widehat{BA}}{3} = \frac{\widehat{AA'}}{2}$$

ت - داریم:

$$\text{چرا!} \cdot \widehat{A'B'} + \widehat{B'B} + \widehat{BA} + \widehat{AA'} = 36^\circ$$

اما:

پس می توان نوشت:

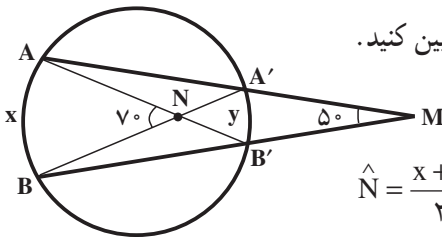
$$\frac{\widehat{A'B'}}{1} = \frac{\widehat{B'B}}{4} = \frac{\widehat{BA}}{3} = \frac{\widehat{AA'}}{2} = \frac{\widehat{A'B'} + \widehat{B'B} + \widehat{BA} + \widehat{AA'}}{1+4+3+2} = \frac{36^\circ}{10} = 3.6^\circ$$

$$\widehat{A'B'} = 3.6^\circ \text{ و } \widehat{AB} = 10.8^\circ$$

پس

در نتیجه:

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} = \frac{10.8^\circ - 3.6^\circ}{2} = 3.6^\circ$$



مثال ۲: با استفاده از شکل روبه‌رو، x و y را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\widehat{N} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 70^\circ = \frac{x+y}{2}$$

از آنجا:

$$x+y=140$$

(۱)

از طرفی

$$\widehat{M} = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 50^\circ = \frac{x-y}{2}$$

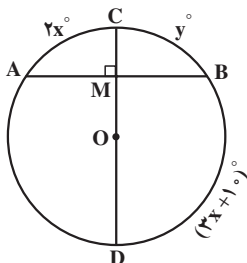
پس

$$x-y=100$$

(۲)

از رابطه‌های (۱) و (۲) مقدارهای x و y به دست می‌آیند.

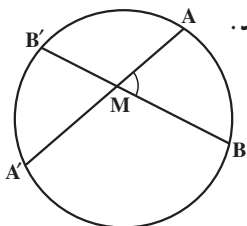
$$\begin{cases} x+y=140 \\ x-y=100 \end{cases} \Rightarrow x=120^\circ \text{ و } y=20^\circ$$



مسئله‌ها

۱. قطر CD در نقطه M بر وتر AB از دایره به مرکز O عمود است. اگر $\widehat{AC} = 2x^\circ$ ، $\widehat{BC} = y^\circ$ و $\widehat{BD} = (3x+10)^\circ$ باشد، x و y را بیابید.

۲. دو وتر AA' و BB' از یک دایره، در نقطه M متقاطعند:



الف) اندازه زاویه $\angle AMB$ را در هر یک از حالت‌های زیر تعیین کنید.

– $\widehat{AB} = 90^\circ$ و $\widehat{A'B'} = 60^\circ$

– \widehat{AB} و $\widehat{A'B'}$ هر کدام 75° باشند

– $\widehat{AB} + \widehat{A'B'} = 250^\circ$

– $\widehat{AB'} + \widehat{A'B} = 170^\circ$

ب) اگر:

– $\angle AMB = 85^\circ$ باشد، $\widehat{AB} + \widehat{A'B'}$ را تعیین کنید.

– $\angle AMB = 48^\circ$ باشد، $\widehat{AB'} + \widehat{A'B}$ را بیابید.

– $\angle AMB = 60^\circ$ و $\widehat{A'B'} = 160^\circ$ باشد، $\widehat{A'B}$ را تعیین کنید.

– $\angle AMB' = 70^\circ$ و $\widehat{A'B} = \widehat{AB'}$ باشد، \widehat{AB} را بیابید.

۳. امتدادهای دو وتر AA' و BB' از دایره O در نقطه M متقاطعند، تعیین کنید:

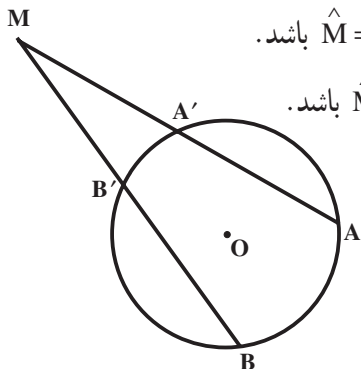
الف) اندازه کمان $\widehat{A'B'}$ را، اگر $\widehat{AB} = 160^\circ$ و $\widehat{M} = 20^\circ$ باشد.

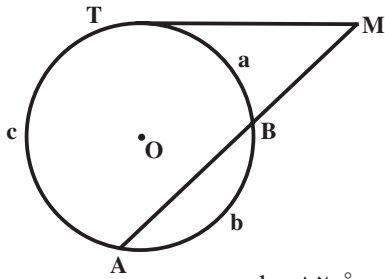
ب) اندازه کمان \widehat{AB} را، اگر $\widehat{A'B'} = 60^\circ$ و $\widehat{M} = 35^\circ$ باشد.

پ) اندازه $\widehat{AB} - \widehat{A'B'}$ را، اگر $\widehat{M} = 45^\circ$ باشد.

ت) اندازه کمان $\widehat{A'B'}$ را، اگر $\widehat{AB} = 3\widehat{A'B'}$ و

$\widehat{M} = 25^\circ$ باشد.





۴. خط مماس بر دایره در نقطه T و امتداد وتر AB در نقطه M متقاطعند. با فرض $TB = a$ ، $\widehat{AT} = c$ و $\widehat{BA} = b$

الف) اندازه زاویه M را در هر یک از حالت‌های زیر تعیین کنید:

$b = 12^\circ$ و $c = 20^\circ$ - $c = 15^\circ$ و $a = 6^\circ$ -

$\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}$ - $c - a = 74^\circ$ -

ب) تعیین کنید:

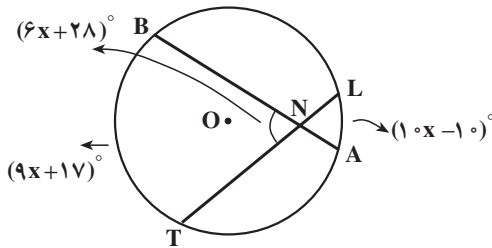
a را در صورتی که $\widehat{M} = 45^\circ$ و $c = 20^\circ$ باشد.

c را در صورتی که $\widehat{M} = 30^\circ$ و $a = 55^\circ$ باشد.

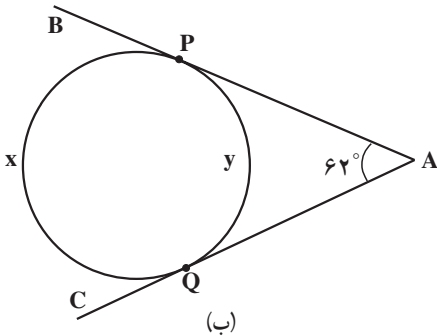
a را در صورتی که $\widehat{M} = 45^\circ$ و $c = 3a$ باشد.

a را در صورتی که $\widehat{M} = 6^\circ$ و $b = 10^\circ$ باشد.

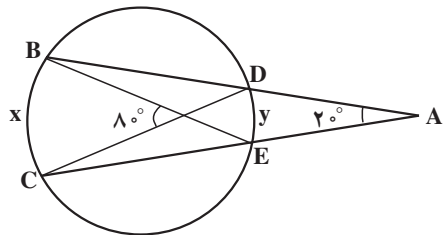
۵. در شکل زیر x و اندازه زاویه BNT را تعیین کنید.



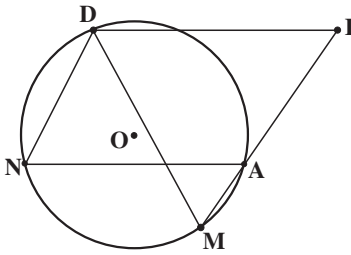
۶. در هر کدام از شکل‌های زیر x و y را بیابید.



(ب)

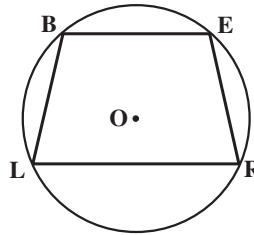


(الف)

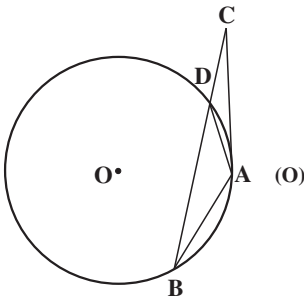


۷. در شکل روبه‌رو چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های I، A و M روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید $DM = DI$.

۸. در دایره (O)، $BL = ER$ ، نشان دهید $BE \parallel LR$.



۹. در دایره (O) مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطه D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC، متساوی‌الساقین است.



۷-۲- رابطه طولی در دایره

قضیه: از نقطه M واقع در داخل دایره (C) دو وتر دلخواه AA' و BB' رسم شده‌اند. ثابت کنید:

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$$

برهان: از A به B' و از B به A' وصل می‌کنیم. دو مثلث MAB' و MBA' متشابه‌اند

زیرا:

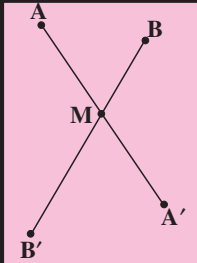
$$\widehat{AMB'} = \widehat{BMA'} \text{ و } \widehat{B'AA'} = \widehat{A'BB'} = \frac{\widehat{A'B'}}{2}$$

پس داریم

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'}$$

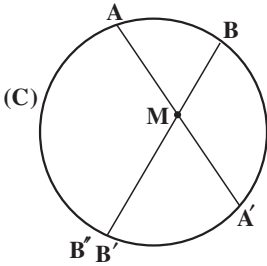
در نتیجه :

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$$

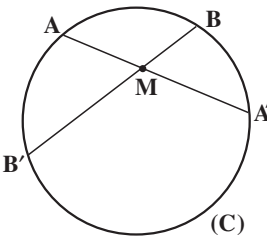


عکس قضیه: اگر دو پاره خط AA' و BB' در نقطه M یکدیگر را طوری قطع کنند که $MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$ ، آن گاه چهار نقطه A, A', B, B' روی یک دایره اند.

برهان: بر سه نقطه A, B و A' یک دایره می گذرانیم. (دایره C) اگر این دایره از نقطه B' بگذرد، حکم ثابت است؛ اما اگر این دایره از B' نگذرد، خط MB را در نقطه دیگری مانند B'' قطع خواهد کرد. در این صورت خواهیم داشت: $MA \cdot MA' = MB \cdot MB''$. از مقایسه این رابطه با فرض قضیه، نتیجه می شود $MB' = MB''$ ، و این نشان می دهد که B' بر B'' منطبق است یعنی دایره ای که بر سه نقطه A, B و A' گذشته است، از نقطه B' نیز می گذرد، پس چهار نقطه A, A', B, B' روی یک دایره واقعند.



مثال: دو وتر AA' و BB' از دایره (C) در نقطه M متقاطعند. اگر $MA = 4$ ، $MB = 3$ و $MA' = 6$ باشد اندازه وتر BB' را به دست آورید.



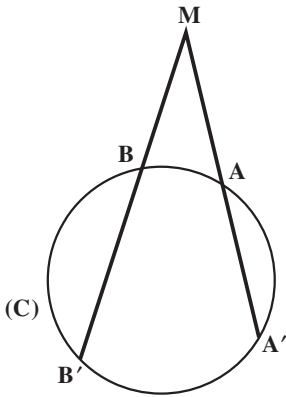
حل: چون $BB' = MB + MB'$ ، پس برای تعیین اندازه پاره خط BB' باید اندازه پاره خط MB' را به دست آوریم، داریم:

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' \Rightarrow 4 \times 6 = 3 \times MB' \Rightarrow MB' = 8$$

پس

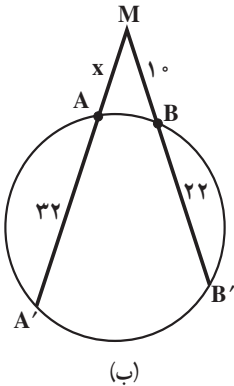
$$BB' = MB + MB' = 3 + 8 = 11$$

تمرین — ثابت کنید اگر امتداد وترهای AA' و BB' از دایره (C) یکدیگر را در نقطه M قطع کنند، آنگاه:

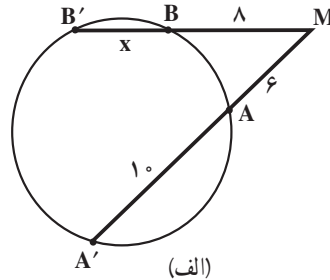


$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$$

مثال: مقدار x را در هریک از شکل‌های زیر به دست آورید.



(ب)



(الف)

حل: با توجه به داده‌های مسأله داریم:

الف — $MA' = MA + AA' = 6 + 10 = 16$ ، $MB' = MB + BB' = 8 + x$

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' \Rightarrow 6 \times 16 = 8(8 + x) \Rightarrow x = 4$$

ب — $MB' = MB + BB' = 10 + 22 = 32$ ، $MA' = MA + AA' = x + 32$

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$$

$$x(x + 32) = 10 \times 32$$

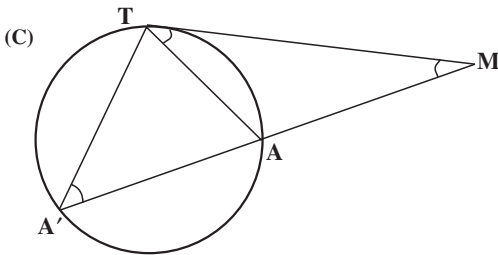
$$x^2 + 32x - 320 = 0$$

$$(x + 40)(x - 8) = 0$$

$$x = 8 \quad \text{یا} \quad x = 40$$

طبیعی است که جواب $x = 40$ قابل قبول نیست.

قضیه: اگر از یک نقطه، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم،
قطعه‌ای از خط مماس محصور بین آن نقطه و نقطه تماس، واسطه هندسی بین
دو قطعه قاطع است.



برهان: دایره (C) و نقطه M را در خارج
آن در نظر می‌گیریم. مماس MT و قاطع
MAA' را نسبت به این دایره رسم می‌کنیم؛
می‌خواهیم ثابت کنیم $MT^2 = MA \cdot MA'$. از
T به A و A' وصل می‌کنیم. دو مثلث
MAT و MA'T متشابه‌اند. زیرا:

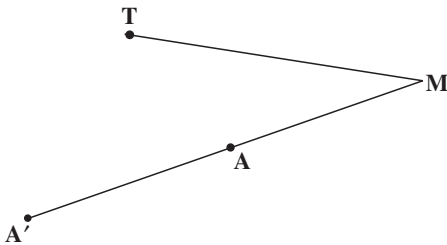
$$\hat{ATM} = \hat{AA'T} = \frac{\hat{AT}}{2}, \quad \hat{M} = \hat{M}$$

پس

$$\frac{MT}{MA} = \frac{MA'}{MT}$$

و در نتیجه:

$$MT^2 = MA \cdot MA'$$



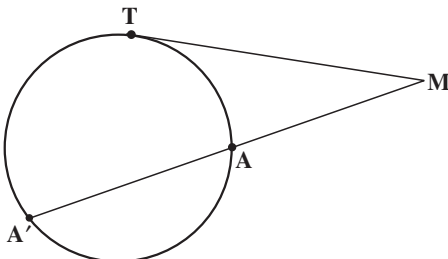
تمرین — (عکس قضیه بالا). سه نقطه A, M, A'
روی یک خط راست و نقطه T خارج این خط
به قسمی واقعند که $MT^2 = MA \cdot MA'$ است. ثابت
کنید دایره‌ای که بر سه نقطه A, A', T می‌گذرد در
نقطه T بر خط MT مماس است.

مثال: در شکل مقابل، خط MT مماس بر دایره
در نقطه T، و MA قاطع دایره است:

الف — اگر $MA = 4$ و $AA' = 5$ باشد،
اندازه MT را تعیین کنید.

ب — اگر $MA' = 18$ و $MT = 12$ باشد،
اندازه AA' را به دست آورید.

حل: با توجه به این که $MT^2 = MA \cdot MB$



داریم:

$$MT^2 = 4 \times 9 = 36$$

الف -

$$MT = 6$$

$$MT^2 = MA \cdot MA'$$

ب -

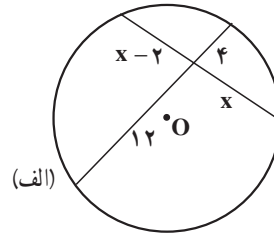
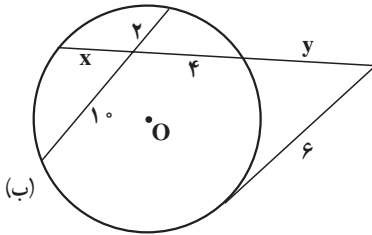
$$12^2 = MA \times 18$$

$$MA = 8$$

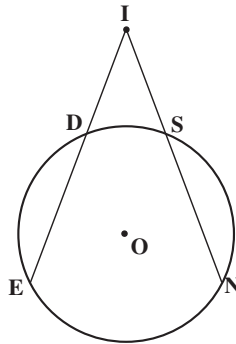
$$AA' = MA' - MA = 18 - 8 = 10$$

مسأله‌ها

۱. در هریک از شکل‌های زیر x و y را محاسبه کنید.



۲. در شکل زیر دو قاطع IE و IN با هم برابرند، ثابت کنید: $IS = ID$



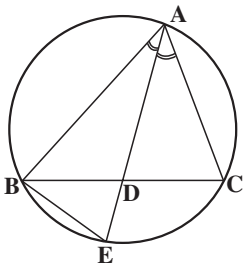
۳. با توجه به شکل احکام زیر را ثابت کنید. (AD نیمساز زاویه

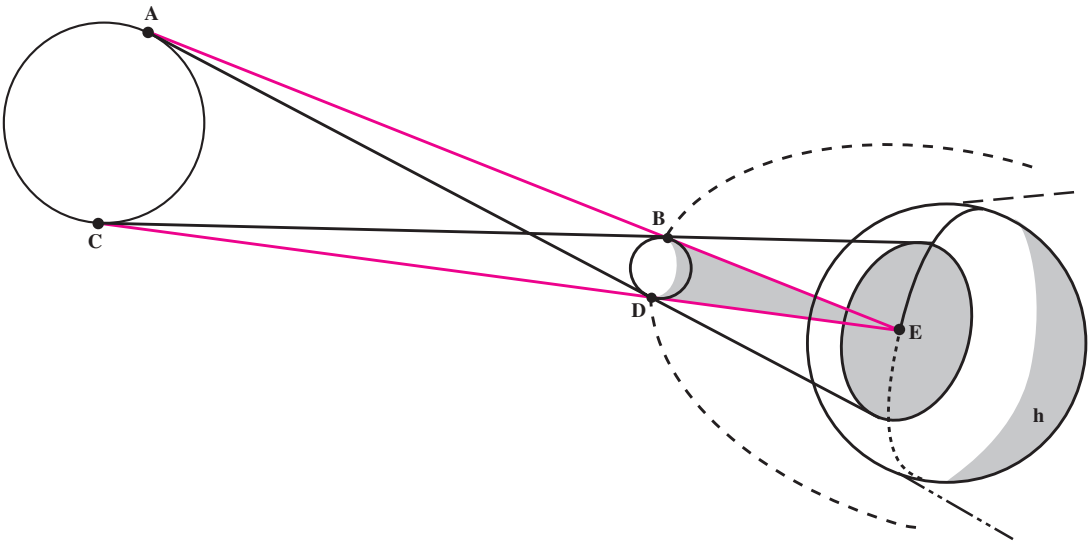
BAC است)

الف) مثلث ADC با مثلث ABE متشابه است.

ب) $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

پ) $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$



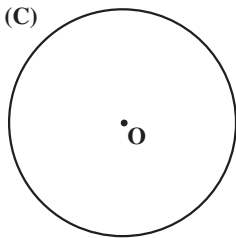


۸-۲- ترسیمهای هندسی

کسوف کامل یک منظره متحیرکننده است. روشنایی آسمان فوراً به تاریکی تبدیل می‌شود. پرنده‌ها حیران می‌شوند. سیاهی غیرمنتظره تنها برای مدتی (حداکثر هفت دقیقه) بر زمین چیره می‌شود و سپس نور و روشنایی با سرعتی که محو شده بود باز می‌گردد. چنین حالتی وقتی رخ می‌دهد که ماه طوری بین زمین و خورشید قرار می‌گیرد که سایه‌اش بر روی زمین می‌افتد. این سایه به شکل یک مخروط است و به دلیل اندازه‌های نسبی ماه و خورشید و زمین و فاصله‌های آنها از یکدیگر، تمام یا قسمتی از زمین در این مخروط سایه قرار می‌گیرد.

فعالیت ۲-۵

دایره $C(O,R)$ و نقطه M واقع در خارج این دایره داده شده‌اند:



۱- از M به مرکز دایره وصل کنید.

۲- به قطر پاره خط OM یک دایره رسم کنید.

۳- نقطه‌های برخورد دایره به قطر OM با دایره (C) را T و T' بنامید. از نقطه‌های O و M به نقطه‌های T و T' وصل کنید.

۴- زاویه‌های OTM و $OT'M$ چند درجه‌اند؟ چرا؟

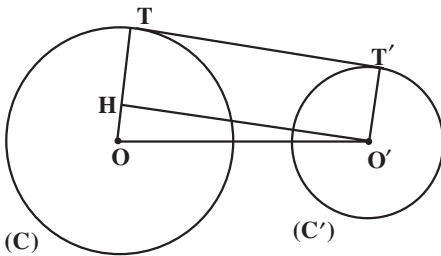
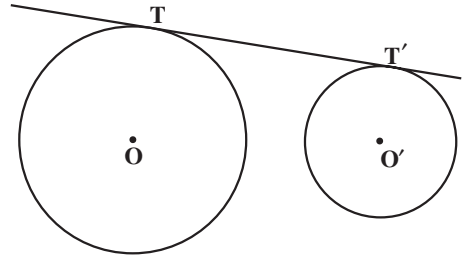
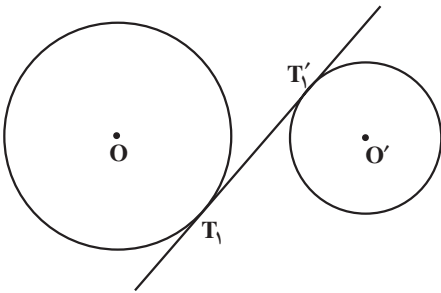
M .

۵- دو خط MT و MT' نسبت به دایره (C) چه وضعی دارند؟ چرا؟

از هر نقطهٔ خارج یک دایره فقط دو خط مماس بر آن دایره می‌توان رسم نمود.

مماس مشترک دو دایره

مماس مشترک دو دایره خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد. اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، این خط، مماس مشترک خارجی، و اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، این خط مماس مشترک داخلی دو دایره نامیده می‌شود.



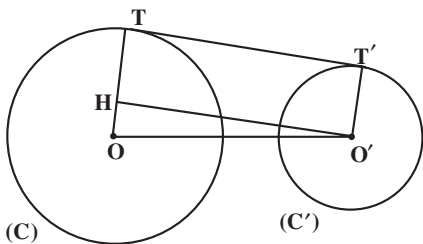
رسم مماس مشترک خارجی دو دایره

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را با فرض $R > R'$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم خط TT' یک مماس مشترک خارجی این دو دایره باشد. پاره خط OO' خط‌المركزین دو دایره را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ O' خطی موازی TT' رسم می‌نماییم تا OT را در نقطهٔ H قطع کند.

- ۱- ویژگیهای چهارضلعی $THO'T'$ را توضیح دهید.
- ۲- اندازهٔ پاره خط OH را برحسب R و R' به دست آورید.
- ۳- یک دایره به مرکز O و به شعاع OH رسم کنید. نسبت به این دایره چه وضعی دارد؟

۴- با توجه به کارهای انجام شده در بالا، روش رسم مماس مشترکهای خارجی دو دایره را شرح دهید.

اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره — اندازهٔ پاره خط TT' طول مماس مشترک



خارجی دو دایره نامیده می‌شود. برای محاسبه طول این پاره خط در مثل قائم‌الزاویه $OO'H$ ($\hat{H} = 90^\circ$) داریم:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2$$

با فرض $OO' = d$ و با توجه به این که

$$OH = R - R' \text{ و } O'H = TT'$$

$$d^2 = (R - R')^2 + TT'^2$$

از آنجا داریم

$$TT'^2 = d^2 - (R - R')^2$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \quad \text{در نتیجه:}$$

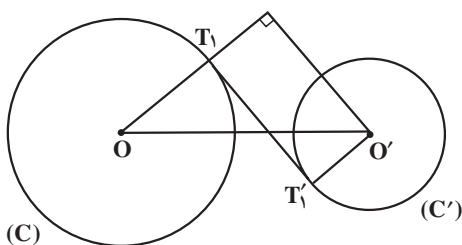
مثال: اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره $C(O, 7)$ و $C'(O', 1)$ را با فرض $OO' = 10$ تعیین کنید.

$$R = 7, R' = 1, d = 10, TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \quad \text{حل: داریم:}$$

$$TT' = \sqrt{10^2 - (7 - 1)^2} \quad \text{پس}$$

$$TT' = 8 \quad \text{در نتیجه:}$$

تمرین ۱— دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ داده شده‌اند. مماس مشترکهای داخلی این دو دایره را رسم کنید و مراحل کار خود را توضیح دهید. در چه صورت دو دایره مماس مشترک داخلی دارند؟



تمرین ۲— اندازه مماس مشترک داخلی

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را بر حسب R و R' و $OO' = d$ به دست آورید.


مسئله‌ها

۱. وضعیت دو دایره را در حالت‌های مختلف در نظر بگیرید، سپس در هر حالت مماس مشترکهای آنها را در صورت وجود رسم کنید.
۲. دو دایره به شعاع‌های ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازه مماس مشترک خارجی آنها را به دست آورید.

۳. مقدار a را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاعهای ۸ و ۳ و خط‌المركزين $d=13$ ، برابر $5a-3$ باشد.

۴. ثابت کنید مماس مشترکهای داخلی و خط‌المركزين دو دایره هم‌رسانند.

۵. در مورد هم‌رسی مماس مشترکهای خارجی دو دایره و خط‌المركزين آنها چه می‌توان گفت؟

مجله ریاضی

یکی از پدیده‌های جالب در ریاضیات نوار موبیوس است که در اواخر قرن هجدهم توسط فردیناند موبیوس معرفی شد.

برای ساختن آن یک نوار کاغذی به طول ۱۸ سانتی‌متر و عرض ۳ سانتی‌متر تهیه کنید. سپس نوار را نیم دور چرخانده، دو سر آزاد آن را به هم بچسبانید.

قلم خود را روی نقطه‌ای در وسط نوار قرار دهید و بدون بلند کردن آن خطی در امتداد نوار رسم کنید تا به نقطه شروع برگردید.

به همین دلیل است که می‌گویید، نوار موبیوس فقط یک رو دارد. حال نوار را با دقت در امتداد آن خط بپژید (قیچی کنید).

چه اتفاقی می‌افتد؟

با استفاده از یک نوار کاغذی به طول ۲۴ و عرض ۴/۵ سانتی‌متر نوار موبیوس دیگری تهیه کنید. سپس در امتداد خطی به فاصله ۱/۵ سانتی‌متر از لبه نوار آن را بپژید.

آیا باز هم نتیجه‌ای مشابه تجربه قبل به دست می‌آورید؟

قضایوت شما در مورد این پدیده چیست؟