فصل ۲

چند ویژگی ساده و چند رده‌ی خاص گراف‌ها

در این فصل ابتدا چند ویژگی ساده از گراف‌ها را ذکر می‌کنیم و سپس برای آشنایی بیشتر با گراف‌ها به معرفی چند رده‌ی خاص از آن‌ها می‌پردازیم و باز هم می‌کوشیم به‌طور شهودی مفاهیم را روشن کنیم.

۲ــ۱ــ مرتبه، اندازه و درجه

می‌دانیم که اگر مجموعه‌ای p، $p \in \mathbb{N}$، عضو داشته باشد تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن $p(p-۱)/۲$ است که با $\binom{p}{۲}$ نمایش داده می‌شود. بنابراین اگر گرافی p رأس و q یال داشته باشد داریم:

$$۰ \le q \le \binom{p}{۲} = p(p-۱)/۲$$

تعریف: در هر گراف $G=(V,E)$ تعداد اعضای مجموعه‌ی V را **مرتبه‌ی** G و تعداد اعضای مجموعه‌ی E را **اندازه‌ی** G می‌نامیم و معمولاً آن‌ها را، به ترتیب، با p و q نمایش می‌دهیم. مرتبه‌ی G را با $p(G)$ و اندازه‌ی آن را با $q(G)$ هم نمایش می‌دهیم.

مثال ۱: مرتبه‌ی گراف شکل ۲ از فصل ۱ پنج و اندازه‌ی آن هفت است. مرتبه‌ی گراف مربوط به مثلاً بوتان (شکل ۵ از فصل ۱) ۱۴ و اندازه‌ی آن ۱۳ است. توجه کنید که در مورد سایر گراف‌های این شکل نیز رابطه‌ی $p=q+۱$ برقرار است. Δ

تعریف: درجه‌ی رأس v از گراف G برابر با تعداد یال‌هایی از G است که از رأس v می‌گذرند. این عدد را با $\deg_G v$ و گاهی به‌طور ساده با $\deg v$ نمایش می‌دهیم. اگر $\deg v$ یک عدد فرد باشد v را یک **رأس فرد** و اگر یک عدد زوج باشد v را یک **رأس زوج** از گراف G می‌نامیم.

مثال ۲: در شکل ۲ از فصل ۱ داریم : $\deg a = ۳$ و $\deg b = ۲$. این گراف چهار رأس فرد و یک رأس زوج دارد. در شکل ۶ از فصل ۱ داریم : $\deg a_۱ = ۱$ و $\deg a_۳ = ۵$. این گراف شش رأس فرد و سه رأس زوج دارد. توجه کنید که در هر دو مثال مجموع درجه‌های تمام رأس‌ها یک عدد زوج است. در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم این مطلب همواره درست است. Δ

قضیه‌ی ۱: اگر $V = \{v_۱, v_۲, \cdots, v_p\}$ مجموعه‌ی رأس‌های گراف G با اندازه‌ی q باشد، آن‌گاه $\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q$.

اثبات: هر یال تنها دو سر دارد، یعنی دقیقاً از دو رأس G می‌گذرد و لذا در طرف چپ فرمول بالا هر یال دو بار به حساب می‌آید. □

توجه کنید درجه‌ی هر رأس گرافی که اصلاً یال نداشته باشد صفر است. لذا، در این حالت هر دو طرف برابری مذکور در قضیه‌ی ۱ صفر به حساب می‌آیند.

نتیجه: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، زوج است.

اثبات: مجموع جمع‌وندهای (یعنی مجموع عامل‌های) زوج عبارت $\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i$ را با A و مجموع جمع‌وندهای فرد آن را با B نمایش می‌دهیم. پس داریم $۲q = \sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = A + B$. عدد A زوج است، زیرا مجموع هر تعداد عدد زوج همواره زوج است. در نتیجه $B = ۲q - A$ نیز زوج است. بنابراین تعداد جمع‌وندهای B، یعنی تعداد رأس‌های فرد گراف، باید زوج باشد. □

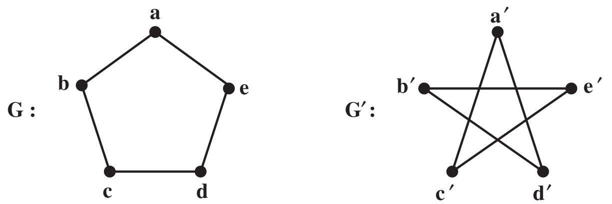
تعریف: بزرگترین عدد در بین درجه‌های رأس‌های گراف G را **ماکسیمم درجه‌ی** G می‌نامیم و آن را با $\Delta(G)$ یا به‌طور ساده با Δ نمایش می‌دهیم. کوچکترین عدد در بین درجه‌های رأس‌های گراف G را **مینیمم درجه‌ی** G می‌نامیم و آن را با $\delta(G)$ یا به‌طور ساده با δ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳: در شکل ۶ از فصل ۱ داریم : $\Delta = ۵$ و $\delta = ۱$. در تمام گراف‌های مربوط به هیدروکربن‌ها $\Delta = ۴$ و $\delta = ۱$. Δ

۲ــ۲ــ گراف‌های منتظم، کامل و تهی

تعریف: عدد صحیح و نامنفی r داده شده است. گراف G از مرتبه‌ی p را r ـ **منتظم** می‌نامیم هرگاه درجه‌ی هررأس G برابر با r باشد، هر گراف $(p-۱)$ ـ منتظم از مرتبه‌ی p را **گراف کامل** هم می‌نامیم و آن را با K_p نمایش می‌دهیم.

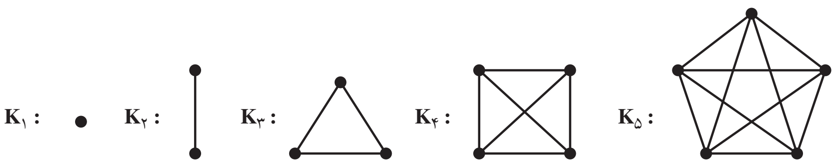
مثال ۴: هر یک از دو گراف شکل ۱، دو ـ منتظم است ولی چون در این دو مثال $p=۵$ و $p-۱=۴\neq۲$ این دو گراف کامل نیستند. توجه کنید که در گراف کامل G از مرتبه‌ی p درجه‌ی هر رأس $p-۱$ است و لذا به‌ازای هر $u,v\in V(G)$، $u\neq v$ داریم $uv\in E(G)$.



شکل ۱ــ گراف‌های ۲ــ منتظم

Δ

مثال ۵: در شکل زیر پنج گراف کامل K_p ، $۱\leq p\leq ۵$، رسم شده‌اند. در مورد هر یک از این مثال‌ها دیده می‌شود که تعداد یال‌های K_p برابر با $p(p-۱)/۲$ است.



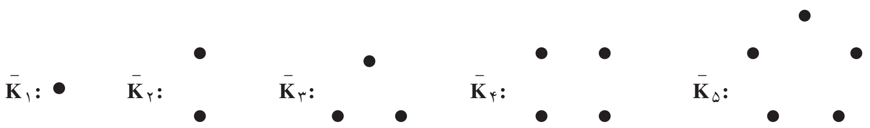
شکل ۲ــ گراف‌های کامل از مرتبه‌های ۱ تا ۵

Δ

قضیه‌ی ۲: تعداد یال‌های گراف کامل K_p ، $p\in\mathbb{N}$ برابر با $p(p-۱)/۲$ است.

اثبات: مجموع درجه‌های رأس‌های گراف K_p برابر با $p(p-۱)$ است. پس، بنابر قضیه‌ی ۱، نصف این عدد برابر با $q(K_p)$ است. $\square$

قرارداد: گراف ۰ ــ منتظم از مرتبه‌ی p را با $\bar{K}_p$ نمایش می‌دهیم. چون $\bar{K}_p$ هیچ یال ندارد، یعنی $E(\bar{K}_p)=\varnothing$ ، این گراف را **گراف تهی** هم می‌نامیم. گراف‌های تهی با p رأس، $1 \le p \le 5$، را در شکل ۳ می‌بینید.



شکل ۳ــ گراف‌های تهی از مرتبه‌های ۱ تا ۵

۲ــ۳ــ مسیر گراف و دورگراف

تعریف: اگـر u و v دو رأس متفاوت از گـراف دلـخواه G باشند، **یک مسیر** از u به v از **گراف** G دنباله‌ای متشکل از $m+1$ ، $m \in \mathbb{N}$ رأس دو بـه دو متفاوت G است کـه از u آغاز و به v ختم می‌شود و هـر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاورند. عدد m را **طــول** این **مسیر از گراف** G می‌نامیم. می‌پذیریم که دنباله‌ی متشکل از تنها یک رأس v یک **مسیر با طول صفر** از v به v از گراف G باشد.

در واقع یک مسیر از رأس u به رأس v از گراف G را به این ترتیب به‌دست می‌آوریم که با در نظر گرفتن نموداری از G ابتدا u را یادداشت می‌کنیم ؛ از یک یال مارّ بر u (در صورت وجـود) می‌گذریم و الزاماً به رأسی تازه می‌رسیم و آن را به عنوان دومین عضو دنباله یادداشت می‌کنیم. از آن‌جا یالی تازه از G را برمی‌گزینیم و از آن به رأس سومی می‌رسیم که آن را نیز یادداشت می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم تا در صورت امکان پس از گذشتن از m یال دوبه‌دو متفاوت، $m \ge 0$ ، به v برسیم. در پایان v را نیز یادداشت می‌کنیم. رأس‌هایی را که یادداشت کرده‌ایم دنباله‌ای است که یک مسیر از u به v از گراف G را به‌دست می‌دهد.

مثال ۶: در شکل ۲ از فصل ۱ از a به b پنج مسیر وجود دارند. در این گراف مثلاً

a,b   a,c,d,b   a,c,e,d,b

سه مسیر متفاوت با طول، به ترتیب از چپ به راست، ۱، ۳، و ۴ از رأس a به رأس b هستند.

(دو مسیر دیگر از a به b را بنویسید و طول آن‌ها را مشخص کنید.) Δ

واضح است که اگر در گرافی از u به v مسیری وجود داشته باشد در آن گراف از رأس v به u هم مسیری وجود دارد. لذا وجود یا عدم وجود مسیر «بین» دو رأس گراف معنی دارد.

تعریف: گراف G را **همبند** می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد. در غیر این صورت G را **ناهمبند** می‌نامیم.

مثال ۷: گراف شکل ۲ از فصل ۱ همبند است. ولی گراف شکل ۳ از فصل ۱ و گراف تهی $\bar{K}_p$ ، $p \geq ۲$ ، همبند نیستند. البته $\bar{K}_۱$ نیز همبند است. به مثال ۷ از فصل ۱ بازگردید. گفتیم که این گراف از سه «بخش جدا از هم» تشکیل شده است. این گراف ناهمبند است زیرا مثلاً بین دو رأس $v_۱$ و $v_۴$ مسیری وجود ندارد. Δ

تعریف: یک **دور از گراف** G دنباله‌ای چون $v_۱, v_۲, \ldots, v_m, v_{m+۱} = v_۱$ با شرط $m \geq ۳$ متشکل از $m+۱$ رأس G است که در آن v_i ها، $۱ \leq i \leq m$، دوبه‌دو متمایزند و هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاورند. عدد m را **طول** این **دور از گراف** G می‌نامند.

مثال ۸: هیچ یک از گراف‌های شکل ۵ از فصل ۱ دور ندارد. همچنین گراف تهی $\bar{K}_p$ دور ندارد. ولی به‌ازای هر $p \geq ۳$ گراف کامل K_p دور دارد. در واقع، به ازای هر عدد طبیعی n، $۳ \leq n \leq p$ ، گراف K_p دوری به طول n دارد. گراف شکل ۶ از فصل ۱ دوری ندارد که طولش فرد باشد ولی دوری به طول ۴ (دنباله‌ی $b_۲, a_۳, b_۳, a_۴, b_۲$) و دوری به طول ۶ (دنباله‌ی $b_۱, a_۲, b_۳, a_۴, b_۲, a_۳, b_۱$) دارد. Δ

۲ــ۴ــ تمرین‌ها

۱ــ فرض کنید گراف G، ۳ــ منتظم است وداریم $q = ۲p - ۳$. مرتبه‌ی G با p و اندازه‌ی آن با q نمایش داده شده است.

الف) ویژگی‌های گراف G را مشخص کنید.

ب) گرافی رسم کنید که این ویژگی‌ها راداشته باشد.

پ) گراف دیگری رسم کنید که واجد این ویژگی‌ها باشد.

۲ــ الف) گراف شکل ۶ از فصل ۱ را در نظر بگیرید و پارامترهای p، q، Δ و δ را بیابید.

ب) درجه‌های تمام رأس‌های این گراف را به صورت دنباله‌ای چون $s: d_۱, d_۲, \cdots, d_۹$ بنویسید که به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۸$ داشته باشیم $d_{i+۱} \leq d_i$. (دنباله‌ی حاصل را **دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های**

گراف می‌نامیم.)

پ) چرا گرافی وجود ندارد که $S:5,3,3,1,0$ دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های آن باشد؟

۳ــ الف) گرافی ارائه کنید که دنباله‌ی درجه‌های رأس‌هایش $S:2,3,3,3,2,2,2,0,0,0$ باشد.

ب) آیا پاسخ یکتاست؟ چرا؟

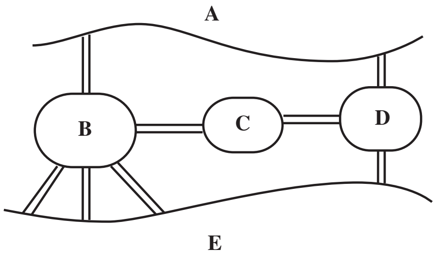
۴ــ چند گراف ۳ـ منتظم از مرتبه‌ی ۱۵ وجود دارند؟ چرا؟

۵ــ با استقراء بر q قضیه‌ی ۱ را اثبات کنید.

۶ــ گرافی ناهمبند و ۳ـ منتظم مثال بزنید که ۸ رأس و ۱۲ یال داشته باشد.

۷ــ گرافی همبند و ۳ـ منتظم مثال بزنید که ۸ رأس و ۱۲ یال داشته باشد.

۸ــ فرض کنید طبق شکل، شهری از یک رودخانه و پنج منطقه‌ی A، B، C، D و E تشکیل شده است و این منطقه‌ها با هشت پل به هم راه دارند.



الف) گراف چندگانه‌ی مربوط به این شهر را رسم کنید.

ب) آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنجگانه و عبور از پل‌ها می‌توان از هر پل دقیقاً یک بار گذشت و به منطقه‌ی آغاز بازگشت؟

پ) آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنجگانه می‌توان از هر پل دقیقاً یک بار گذشت؟ در این حالت لازم نیست منطقه‌ی آغاز گشت با منطقه‌ی پایان آن یکی باشد.

۹ــ در گراف کامل K_p ، $2 \le p \le 4$ ، تعداد مسیرهای «متفاوت» از یک رأس u به یک رأس v، $u \neq v$ ، را بیابید.

۱۰ــ الف) گراف شکل ۶ از فصل ۱ «چند» دور دارد؟(پاسخ ۳ است : دو دور از مرتبه‌ی ۴ و یک دور از مرتبه‌ی ۶. پاسخ را توجیه کنید.)

ب) هر یک از دورها را به صورت دنباله‌ای از رأس‌ها نمایش دهید که رأس اول و آخر دنباله مثل هم و بقیه همراه با این رأس مشترک دو به دو متفاوت باشند ؛ به علاوه، هر دو رأس متوالی این

دنباله در G مجاور باشند.

راهنمایی. یکی از دورهای G را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر نوشت :

$$b_۱, a_۳, b_۳, a_۲, b_۱ \qquad b_۱, a_۲, b_۳, a_۳, b_۱$$
$$a_۲, b_۱, a_۳, b_۳, a_۲ \qquad a_۲, b_۳, a_۳, b_۱, a_۲$$
$$b_۳, a_۲, b_۱, a_۳, b_۳ \qquad b_۳, a_۳, b_۱, a_۲, b_۳$$
$$a_۳, b_۳, a_۲, b_۱, a_۳ \qquad a_۳, b_۱, a_۲, b_۳, a_۳$$

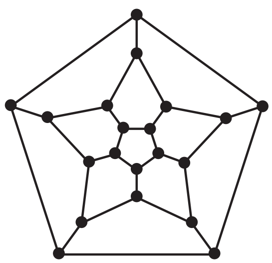
۱۱ــ هفده نفر به سفر می‌روند و قبل از سفر قرار می‌گذارند هر کس به پنج نفر دیگر نامه بفرستد. آیا امکان دارد هر کس به آن پنج نفری نامه بفرستد که از آن‌ها نامه دریافت می‌کند؟ چرا؟

۱۲ــ اگر گراف G از مرتبه‌ی p، $p \geq ۳$ ، دوری از مرتبه‌ی p داشته باشد، آن‌گاه G را **گراف هَمیلْتنی** می‌نامیم. مثلاً هر K_p ، $p \geq ۳$ ، گراف همیلتنی است.

الف) نشان دهید هر گراف همیلتنی همبند است.

ب) اگر G همیلتنی باشد آن‌گاه به ازای هر $v \in V(G)$ داریم $\deg_G v \geq ۲$.

پ) آیا گراف زیر گراف همیلتنی است و چرا؟



۱۳ــ الف) گراف G داده شده است. فرض کنید $u, v \in V(G)$ نشان دهید «وجود یک مسیر از u به v» یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر مجموعه‌ی $V(G)$ است.

ب) اگر G گراف شکل ۳ از فصل ۱ باشد، افرازهای حاصل از رابطه‌ی هم‌ارزی مذکور در بند (الف) را بیابید.

پ) پاسخ بند (ب) را با فرض این‌که G گراف شکل ۶ یا گراف شکل ۱۰ باشد بیابید.