

الگو و دنباله

فصل ۱



زیبایی تلفیق الگوی عددی و هندسی به کار رفته در این معماری ایرانی-اسلامی اوج مهارت و دقت خالق این اثر را تداعی می‌کند. آیا با تفکر در الگوی به کار رفته در نظام آفرینش به عظمت و قدرت خالق آن اندیشیده‌اید؟

مفهوم دنباله

آیا می‌دانید که قاره‌ها ابتدا به هم پیوسته بوده‌اند و یک خشکی بزرگ را تشکیل می‌دادند و در طول زمان با حرکت قسمت‌هایی از این خشکی بزرگ، قاره‌ها به وجود آمدند. براساس یک نظریه‌ی علمی، اندازه‌ی حرکت قاره‌ها در هر ۱ میلیون سال حدود ۱۹ کیلومتر و ۲۰۰ متر می‌باشد. آیا به این موضوع فکر کرده‌اید که ممکن است قاره‌ها دوباره به هم بیوندند؟



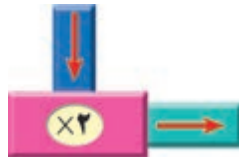
فرض کنیم قاره‌ها در هر سال حدود ۲ سانتی‌متر حرکت می‌کنند. می‌خواهیم حرکت قاره‌ها را از سال جاری بررسی کنیم. جدول زیر اندازه حرکت قاره‌ها را در ۷ سال آینده نشان می‌دهد:

سال‌ها	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم
اندازه حرکت قاره‌ها بر حسب سانتی‌متر	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴

۱- جدول فوق را تا پایان سال دهم تکمیل کنید.

۲- در پایان چه سالی قاره‌ها به اندازه ۴۰ سانتی‌متر حرکت می‌کنند؟

۳- اعداد ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷ را در داخل ماشین زیر قرار دهید و اعداد به دست آمده را با اعداد سطر دوم مقایسه کنید و نتیجه‌ی حاصل از مقایسه را بنویسید.



۴- نقاط نظیر جدول بالا را روی محورهای مختصات مشخص کنید.

۵- اگر بخواهیم اندازه‌ی حرکت قاره‌ها را بعد از یک میلیون سال به دست آوریم، چه راه حلی را پیشنهاد می‌کنید؟

اندازه حرکت قاره‌ها الگویی دارد که با استفاده از آن می‌توانیم حرکت آن‌ها را در سال‌های مختلف برآورد کنیم. نگاه آگاهانه و دقیق و یافتن الگوهای مهارتی، برای حل مسئله و به طور کلی کشف ایده‌های ریاضی در پدیده‌های واقعی ضرورت دارد. در روند پیدا کردن یک الگو، سازماندهی و تنظیم داده‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است. در مثال حرکت قاره‌ها، اگر عدد هر سال را با نماد n و اندازه حرکت قاره‌ها را با نماد a_n نمایش دهیم، اطلاعات مربوط به این مثال را به شکل زیر می‌توانیم نمایش دهیم:

عدد سال	اندازه حرکت قاره‌ها بر حسب سانی متر
۱	$a_1 = 2 \times 1$
۲	$a_2 = 2 \times 2$
۳	$a_3 = 2 \times 3$
...	...
...	...
⋮	⋮
n	$a_n = 2 \times n$

با توجه به جدول بالا می‌بینیم که اندازه حرکت قاره‌ها پس از n سال، $2n$ سانی متر می‌باشد.

$$2n \text{ سانی متر} = \text{اندازه حرکت قاره‌ها پس از } n \text{ سال}$$

به عبارت دیگر $a_n = 2n$. با استفاده از این تساوی می‌توانیم اندازه حرکت قاره‌ها را در سال‌های مختلف محاسبه کنیم.

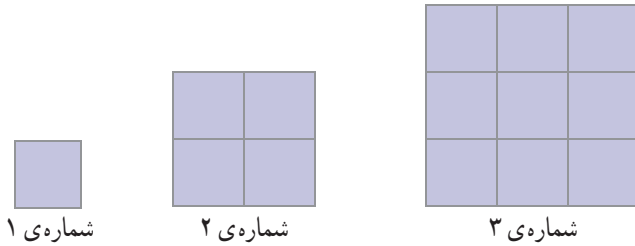
اگر اندازه حرکت قاره‌ها را در سال‌های متوالی پشت سرهم بنویسیم، دنباله‌ای از اعداد به شکل زیر ساخته می‌شود:

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

اولین عدد در این دنباله، ۲ است و آن را جمله‌ی اول این دنباله می‌نامند. جملات بعدی این دنباله اعداد ۴، ۶، ۸، ... هستند. n امین جمله این دنباله عدد $2n$ است.

در فعالیت بعد دنباله‌ی دیگری از اعداد را بررسی می‌کنیم.





با توجه به تغییرات شکل بالا در هر مرحله :

۱- جدولی تشکیل دهید که با استفاده از آن بتوان تعداد مربعات کوچک را تا شکل شماره ۶ پیدا کرد.

۲- رابطه‌ی بین شماره‌ی شکل و تعداد مربعات کوچک را حدس بزنید.

۳- تعداد مربعات کوچک در شکل‌ها را با فاصله پشت سر هم بنویسید.

۴- قانونی که الگوی بالا از آن پیروی می‌کند را به دست آورید و درستی آن را بررسی کنید.

۵- با استفاده از الگوی به دست آمده، سی‌امین عدد را پیدا کنید.

در فعالیت بالا اگر اعداد به دست آمده در هر مرحله را پشت سر هم بنویسیم، دنباله‌ای از اعداد به شکل زیر ساخته می‌شود :

$$1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$$

جمله‌ی اول این دنباله عدد ۱ و جمله‌ی دوم آن عدد ۴ و جمله‌ی n ام آن n^2 است.

هر تعدادی از اعداد را که پشت سر هم نوشته باشیم، یک دنباله از اعداد می‌نامند. به هر عدد که در یک دنباله قرار گرفته است، یک جمله‌ی آن دنباله گفته می‌شود. جمله‌ی n ام دنباله را که n یک عدد طبیعی دلخواه است، جمله‌ی عمومی دنباله می‌نامند.

در برخی از دنباله‌ها الگویی وجود دارد که بر اساس آن می‌توانیم جملات آن دنباله را تعیین کنیم.

... , 8 , 6 , 4 , 2 یک دنباله است که از اعداد زوج متوالی ساخته شده است. اگر جمله ی اول این دنباله را با a_1 و جمله ی دوم را با a_2 و به همین ترتیب جمله ی n ام این دنباله را با a_n نشان دهیم، داریم:

$$a_1 = 2, a_2 = 4 = 2 \times 2, a_3 = 6 = 2 \times 3, a_4 = 8 = 2 \times 4, \dots, a_n = 2n$$


۱- با استفاده از چوب کبریت، سه شکل زیر ساخته شده است. تعداد چوب کبریت های به کار رفته در شکل n ام چند تا است؟

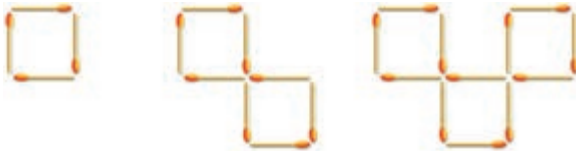


۲- ابتدا سه جمله ی بعدی هر یک از دنباله های زیر را پیدا کنید، سپس جمله ی n ام آن را بنویسید.

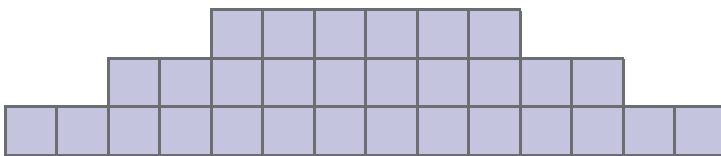
(الف) $2, 7, 12, 17, \dots$ (ب) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}, \dots$



۱- با استفاده از چوب کبریت، سه شکل زیر ساخته شده است. تعداد چوب کبریت های به کار رفته در شکل n ام چند تا است؟



۲- شکل زیر سه ردیف از صندوق های یک سالن تئاتر را نشان می دهد. اگر تعداد صندوق های ردیف های بعدی از الگوی افزایش صندوق های این سه ردیف پیروی کنند، تعداد صندوق ها را تا ردیف هفتم به دست آورید:



- ۳- اگر جمله n ام دنباله ای $a_n = 3n$ باشد، با تشکیل یک جدول، چهار جمله ی اول آن را بنویسید.
- ۴- اگر یک مستطیل کاغذی را در هر مرحله با تا زدن نصف کنیم، تعداد مستطیل های به دست آمده در هر مرحله را در یک دنباله بنویسید. جمله ی عمومی این دنباله را بنویسید. (اولین مرحله با اولین تا زدن آغاز می شود).
- ۵- چهار جمله ی اول هر یک از دنباله های زیر که جمله ی عمومی آنها داده شده است را بنویسید.

الف) $a_n = \frac{2n}{n+1}$ ب) $a_n = 3n^2 - \frac{1}{n}$ ج) $a_n = 2^n - n^2$

- ۶- چهار دنباله و چهار جمله ی عمومی دنباله به صورت زیر داده شده است. مشخص کنید که هر جمله ی عمومی مربوط به کدام دنباله است.

$\frac{3n}{n+2}$	$1, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}, \dots$
$(-3)^{n-1}$	$1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \dots$
$n^2 + 5n$	$1, -3, 9, \dots$
$2n+1$	$6, 14, 24, \dots$

- ۷- اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا $n + \frac{1}{2}$ می تواند قانون دنباله ی $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots$ باشد؟ دلیل خود را بیان کنید.

- ۸- رضا اول هر هفته ۱۶۰۰ تومان پول توجیبی می گیرد و در کشوی میز خود می گذارد و تا آخر هر هفته نیمی از پول کشو را خرج می کند. اگر از قبل، پولی در کشو نباشد، رضا در پایان هفته ی اول چه قدر پول در کشو دارد؟ در پایان هفته ی دوم چه قدر پول در کشو دارد؟ در پایان هفته ی سوم چه قدر پول در کشو دارد؟ پول های رضا در پایان هر هفته را به صورت یک دنباله در نظر بگیرید و چهار جمله ی اول این دنباله را بنویسید. بین جمله ی n ام و جمله ی $n+1$ ام این دنباله چه رابطه ای وجود دارد؟

دنباله ی حسابی

یک بازیکن فوتبال در هنگام بازی صدمه می بیند و مجبور می شود زانوی پای خود را عمل کند. بعد از عمل، پزشک معالج به او پیشنهاد می کند در هفته ی اول روزی ۱۲ دقیقه بدود و هر هفته ۳ دقیقه به زمان دویدن روزانه ی خود اضافه کند. هنگامی که زمان دویدن او به ۱۳۸ دقیقه در روز برسد، می تواند برای تیم خود بازی کند.

علی که از علاقه‌مندان این بازیکن می‌باشد، می‌خواهد بداند که این بازیکن بعد از چند هفته می‌تواند بازی کند. علی جدولی به صورت زیر تشکیل داد تا بتواند قانون حاکم بر الگوی جدول را به دست آورد. او تعداد هفته‌ها را با n و زمان دویدن در هفته‌ی n ام را با a_n نشان داده است.

هفته‌ها	۱	۲	۳	۴
زمان دویدن روزانه	$a_1 = ۱۲$	$a_2 = ۱۲ + ۳ = ۱۵$	$a_3 = ۱۵ + ۳ = ۱۸$	$a_4 = ۱۸ + ۳ = ۲۱$



- ۱- به علی کمک کنید تا جدول را برای هفت هفته کامل کند.
 - ۲- چه رابطه‌ای بین زمان دویدن در هر دو هفته‌ی متوالی وجود دارد؟
 - ۳- جمله‌ی n ام را بر حسب جمله‌ی اول و n بنویسید.
 - ۴- با به دست آوردن قانون حاکم بر الگوی فوق، بگویید که این بازیکن بعد از طی چند هفته می‌تواند بازی کند؟
 - ۵- اگر این بازیکن هر هفته ۶ دقیقه مدت زمان دویدن خود را افزایش می‌داد بعد از طی چه مدتی می‌توانست بازی کند؟
- در فعالیت بالا با تشکیل دنباله‌ی نشان‌دهنده‌ی میزان دویدن این بازیکن در هر هفته، دیده می‌شود که میزان افزایش بین هر دو جمله‌ی متوالی مقداری ثابت است.

دنباله‌هایی که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید را دنباله‌ی حسابی می‌نامیم و به این مقدار ثابت قدر نسبت دنباله می‌گوئیم.

اگر اولین جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی a و قدر نسبت این دنباله d باشد، جملات این دنباله به شکل زیر خواهند بود:

$$a \text{ و } a+d \text{ و } a+2d \text{ و } \dots \text{ و } a+(n-1)d$$

جمله‌ی n ام این دنباله $a+(n-1)d$ است.

در فعالیت قبل، دنباله‌ی به دست آمده، یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۳ است.

۱- ماشینی با سرعت ثابت 70 کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند و در حال دور شدن از شهر کرمان است. این ماشین در شروع حرکت 15 کیلومتر با کرمان فاصله دارد. اگر فاصله‌ی این ماشین تا شهر کرمان را در پایان ساعت اول و دوم و سوم و چهارم بنویسیم، دنباله‌ای به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$85, 155, 225, 295$$

این دنباله یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول 85 و قدر نسبت 70 است.

۲- شمع 25 سانتی متری را روشن کرده‌ایم. این شمع در هر دقیقه 2 میلی متر کوتاه می‌شود. طول این شمع با گذشت زمان پس از هر دقیقه که می‌گذرد یک دنباله از اعداد به صورت زیر تشکیل می‌دهد.

$$24/8, 24/6, 24/4, \dots$$

این یک دنباله‌ی حسابی است و هر جمله از این دنباله با اضافه کردن عدد $2/0$ به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. پس این یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $24/8$ و قدر نسبت $2/0$ است.

در دنباله‌ی حسابی، اگر قدرنسبت، مثبت باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند و اگر قدرنسبت منفی باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند.

۱- $14, 11, 8, 5, 2$ یک دنباله‌ی حسابی است. در این دنباله داریم: $a=2$ و $d=3$ جملات این دنباله در حال افزایش هستند و جمله‌ی n ام این دنباله عبارت است از:

$$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$$

۲- $1, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, -1, \dots$ یک دنباله‌ی حسابی است. در این دنباله داریم: $a=1$ و $d = -\frac{1}{4}$. جملات این دنباله در حال کاهش هستند و جمله‌ی n ام این دنباله عبارت است از:

$$a_n = 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) \times (n-1) = 1 - \frac{n}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{n}{4}$$

شیر آبی در هر دقیقه $\frac{3}{5}$ لیتر آب وارد یک حوض می‌کند. اگر این حوض از ابتدا ۲۵ لیتر آب داشته باشد، مقدار آب حوض را پس از گذشت یک، دو، سه، چهار و پنج دقیقه در یک دنباله بنویسید. آیا این یک دنباله‌ی حسابی است؟ چرا؟ پس از گذشت چند دقیقه آب این حوض 102 لیتر می‌شود؟

۱- با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از دنباله‌های زیر حسابی هستند؟ سپس الگوی ساختن هر دنباله را پیدا کنید.

الف) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ ب) $-24, -21, -18, -15, \dots$

ج) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ د) $0, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

۲- اگر دو جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی 10^3 و 3 باشند، سه جمله‌ی بعدی این دنباله را بنویسید. (چند دنباله وجود دارد؟)

۳- در دنباله‌ی حسابی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ نشان دهید $a_n - a_{n-1}$ مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت چه عددی را نشان می‌دهد؟

۴- اگر در جملات یک دنباله‌ی حسابی، اول عدد $\frac{1}{3}$ و بعد عدد $\frac{1}{4}$ قرار گرفته باشند، جمله‌ی قبل از $\frac{1}{3}$ را بنویسید.

۵- اگر x و z به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، نشان دهید: $y = \frac{1}{2}(x+z)$

۶- اگر جمله‌ی پنجم یک دنباله‌ی حسابی 17 و جمله‌ی دوازدهم آن 52 باشد، جمله‌ی عمومی این دنباله را به دست آورید.

۷- دنباله‌ی زیر به ازای چه مقداری از x ، یک دنباله‌ی حسابی خواهد بود:

$1-x, 2+x, 1+2x$

۸- نشان دهید که اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی را در عددی ضرب کنیم، دنباله‌ی جدید نیز یک دنباله‌ی حسابی است.

۹- اگر زاویه‌های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و یک دنباله‌ی حسابی تشکیل شود، نشان دهید که یکی از زاویه‌های این مثلث 60° درجه است.

۱۰- مثلث قائم الزاویه‌ای ارائه کنید که طول ضلع کوچک آن ۱ باشد و اگر طول اضلاع آن را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند. اگر طول ضلع کوچک این مثلث a باشد، طول بقیه‌ی اضلاع را بر حسب a حساب کنید.

دنباله‌ی هندسی

یکی از بازی‌های دوران کودکی به هوا انداختن توپ بود که در آن بارها شاهد به زمین خوردن و دوباره به هوا رفتن آن بوده‌ایم و احتمالاً تعداد دفعات زمین خوردن و به هوا رفتن توپ برایمان جالب بوده است. اکنون که بزرگ‌تر شده‌ایم، می‌توانیم با توصیف ریاضی این بالا و پایین رفتن‌های توپ، درک عمیق‌تری از آن به دست آوریم.



تویی در اختیار داریم که هرگاه آن را از ارتفاعی به زمین رها کنیم در برخورد با زمین مقداری از انرژی خود را از دست می‌دهد و در هر برگشت به بالا به 60° درصد ارتفاع قبلی خود برمی‌گردد.

۱- این توپ را از ارتفاع ۲۵ متری رها می‌کنیم. میزان ارتفاعی که توپ پس از اولین و دومین و سومین برخورد با زمین به بالا می‌آید را بنویسید.

۲- هر جمله‌ی این دنباله با جمله‌ی قبلی چه رابطه‌ای دارد؟

۳- پس از n برخورد با زمین، توپ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

۴- آیا این دنباله یک دنباله‌ی حسابی است؟



دنباله‌هایی که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) با ضرب یک مقدار ثابت در جمله‌ی

قبلی به دست می‌آیند را دنباله‌ی هندسی می‌نامند.

مثال

هر کدام از دنباله‌های زیر یک دنباله‌ی هندسی هستند. در هر کدام از آن‌ها هر جمله (غیر از جمله‌ی اول) با ضرب عددی معین در جمله‌ی قبلی ساخته شده است.

الف) $3, 6, 12, 24, 48$

ب) $1, \sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, 25$

ج) $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}$

د) $1, -1, 1, -1$

مسئله

۱- وقتی می‌گویند در یک کشور نرخ رشد سالیانه‌ی جمعیت ۳ درصد است، یعنی جمعیت آن کشور در هر سال به میزان ۳ درصد جمعیت سال قبل، افزایش می‌یابد. فرض کنید یک کشور 50 میلیون نفر جمعیت دارد و نرخ رشد سالیانه‌ی جمعیت آن ۳ درصد است.

الف) جمعیت سال دوم چند برابر جمعیت سال اول است؟ جمعیت سال سوم چند برابر جمعیت سال دوم است؟

ب) جمعیت این کشور را در سال‌های اول تا پنجم بنویسید. (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

ج) این دنباله یک دنباله‌ی حسابی یا یک دنباله‌ی هندسی است؟

د) جمعیت این کشور پس از گذشت n سال چه قدر خواهد بود؟

۲- کدام یک از دنباله‌های زیر دنباله‌های هندسی هستند؟ دلیل خود را ارائه کنید.

الف) $5, 5, 5, 5, 5, \dots$

ب) $-1, 2, -4, 8, -16, \dots$

ج) $2, 4, 6, 8, \dots$

د) $1 - \pi, 1 - \pi^2, (1 - \pi^2)(1 + \pi), \dots$

در یک دنباله هندسی، هر جمله (غیر از جمله اول) با ضرب یک مقدار ثابت مانند q در جمله قبلی به دست می‌آید. q را قدر نسبت این دنباله می‌نامند. اگر اولین جمله یک دنباله هندسی a و قدر نسبت آن q باشد، جملات این دنباله به شکل زیر خواهند بود:

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^{n-1}, \dots$$

جمله n ام این دنباله aq^{n-1} است.

از جمله دانشمندان ایرانی و مسلمان که به معرفی دنباله هندسی و به کارگیری آن پرداخته‌اند، ابوریحان بیرونی بوده است که در کتاب «راشیکات» به بحث راجع به آن پرداخته‌اند.

مسائل

۱- اگر یکی از جملات یک دنباله هندسی ۵ و جمله بعدی آن ۱- باشد، سه جمله بعدی این دنباله را بنویسید.

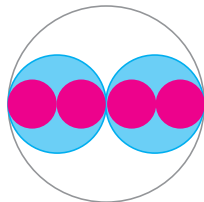
۲- اگر یکی از جملات یک دنباله هندسی ۳ و جمله بعدی ۴ باشد، جمله قبل از ۳ را بنویسید.

۳- اگر دو جمله متوالی یک دنباله هندسی به ترتیب a ($a \neq 0$) و b باشند، جمله بعد از b چه خواهد بود؟

۴- اگر x و y و z به ترتیب جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، نشان دهید: $y^2 = xz$.

۵- اگر جمله چهارم یک دنباله هندسی ۱ و جمله هفتم آن ۸ باشد، جمله عمومی این دنباله را بنویسید.

۶- در دنباله زیر عدد x را طوری تعیین کنید تا این دنباله یک دنباله هندسی شود. مسئله چند جواب دارد؟
 $1-x, x, 1+x$



۷- اگر مساحت یک دایره برابر S_1 و داخل آن دو دایره به شکل روبرو رسم کنیم و مجموع مساحت آن‌ها را S_2 بنامیم، با تکرار این عملیات دنباله‌ی $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ ساخته می‌شود.

جمله عمومی این دنباله را به دست آورید و نشان دهید این یک دنباله هندسی است.

۸- اگر جملات یک دنباله‌ی هندسی را در عددی ضرب کنیم، نشان دهید دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی هندسی است.

۹- اگر جملات یک دنباله‌ی هندسی را به توان ۲ برسانیم، نشان دهید دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی هندسی است.

۱۰- آیا یک دنباله می‌تواند هم یک دنباله‌ی هندسی باشد و هم یک دنباله‌ی عددی؟ توضیح دهید.

۱۱- اگر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ یک دنباله‌ی هندسی باشد و $a_1 a_3 = 4$ و $a_3 a_5 = 16$ جمله‌ی اول و قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی را بیابید.

نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد

دنباله‌های حسابی و هندسی دسته‌ی خاصی از دنباله‌ها هستند. در حالت کلی جمله‌ی عمومی یک دنباله می‌تواند شکل‌های مختلفی داشته باشد. برخی دنباله‌ها به گونه‌ای هستند که اگر به جملات آن‌ها نگاه کنیم، متوجه می‌شویم که این جملات به عدد خاصی نزدیک می‌شوند.



۱- در تقسیم ۱ بر ۳ خارج قسمت را تا ۱ رقم اعشار و ۲ رقم اعشار و ۳ رقم اعشار و ۴ رقم اعشار به دست آورید.

۲- خارج قسمت تقسیم‌های فوق را در یک دنباله بنویسید.

۳- چه الگویی در جملات این دنباله وجود دارد؟ جمله‌ی ششم این دنباله چیست؟

۴- تفاضل شش جمله‌ی اول این دنباله را از $\frac{1}{3}$ حساب کنید و دنباله‌ی این تفاضل‌ها را تشکیل دهید.

۵- چه الگویی در جملات دنباله‌ی تفاضل‌ها مشاهده می‌کنید؟ جملات دنباله‌ی تفاضل‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۶- جملات دنباله‌ی اصلی از خارج قسمت‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

اگر جملات دنباله‌ای را از یک عدد معین کم کنیم و جملات حاصل، به صفر نزدیک

شوند، گوییم جملات آن دنباله به آن عدد نزدیک می‌شوند.

در تقسیم ۲ بر ۳، خارج قسمت‌ها از ۱ رقم تا n رقم اعشار دنباله‌ی زیر را تشکیل می‌دهند.
 $0/6, 0/66, 0/666, \dots, 0/6\dots6, \dots$

تفاضل جملات این دنباله از $\frac{2}{3}$ به شکل زیر است:

$$\frac{2}{3} - 0/6 = \frac{2}{3} - \frac{6}{10} = \frac{20-18}{30} = \frac{2}{30} = \frac{0/2}{3}$$

$$\frac{2}{3} - 0/66 = \frac{2}{3} - \frac{66}{100} = \frac{200-198}{300} = \frac{2}{300} = \frac{0/02}{3}$$

$$\frac{2}{3} - 0/666 = \frac{2}{3} - \frac{666}{1000} = \frac{2000-1998}{3000} = \frac{2}{3000} = \frac{0/002}{3}$$

$$\frac{2}{3} - 0/6666 = \frac{2}{3} - \frac{6666}{10000} = \frac{20000-19998}{30000} = \frac{2}{30000} = \frac{0/0002}{3}$$

دنباله‌ی تفاضل به شکل زیر است:

$$\frac{0/2}{3}, \frac{0/02}{3}, \frac{0/002}{3}, \frac{0/0002}{3}, \dots$$

همان طور که دیده می‌شود، جملات دنباله‌ی تفاضل به صفر نزدیک می‌شوند. پس جملات خود

دنباله به $\frac{2}{3}$ نزدیک می‌شوند.

جملات یک دنباله‌ی ثابت مانند: a, a, a, \dots, a, \dots به همان مقدار ثابت دنباله نزدیک می‌شوند.

در این حالت خاص، جملات دنباله دقیقاً برابر همان عددی هستند که به آن نزدیک می‌شوند.

با تقسیم ۱ بر ۹ خارج قسمت‌های به دست آمده در هر مرحله را در یک دنباله بنویسید. این دنباله به چه عددی نزدیک می‌شود؟ دلیل خود را ارائه دهید.

دنباله‌ی تقریبات اعشاری

در بخش قبل دیدیم که برای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ با انجام عمل تقسیم a بر b و نوشتن اعدادی که در خارج قسمت به دست می‌آیند، دنباله‌ای از اعداد اعشاری می‌توان ساخت که جملات آن به عدد

گویای $\frac{a}{b}$ نزدیک می‌شوند.

در فعالیت زیر خواهیم دید که چگونه می‌توانیم برای هر عدد حقیقی (گویا یا گنگ)، دنباله‌ای از اعداد اعشاری به دست آوریم که جملات آن رفته رفته به آن عدد نزدیک می‌شوند.



فرض کنید x عددی بین 0 و 1 باشد. مثلاً: $x = \frac{3}{7}$ ، شما عدد دیگری را در نظر بگیرید.

۱- روی محور اعداد، فاصله‌ی بین نقاط متناظر 0 و 1 را به ده قسمت مساوی تقسیم کنید. اعداد متناظر این نقاط جدید را به صورت اعداد اعشاری بنویسید. x بین کدام یک از این اعداد قرار می‌گیرد؟ برای عدد $\frac{3}{7}$ داریم: $0/5 < \frac{3}{7} < 0/4$.

۲- با بزرگ‌نمایی فاصله‌ی بین نقاط متناظر دو عدد قسمت بالا که x بین آن‌ها بوده است این فاصله را به ده قسمت مساوی تقسیم کنید. اعداد متناظر این نقاط جدید را به صورت اعداد اعشاری بنویسید. x بین کدام یک از این اعداد قرار می‌گیرد؟ در مورد عدد $\frac{3}{7}$ این عدد بین $0/4$ و $0/5$ بوده است و پس از رسم بزرگ‌ترین فاصله و تقسیم آن به ده قسمت مساوی داریم: $0/43 < \frac{3}{7} < 0/42$.

۳- با بزرگ‌نمایی فاصله‌ی بین نقاط متناظر دو عدد قسمت بالا که x بین آن‌ها بوده است این فاصله را به ده قسمت مساوی تقسیم کنید. اعداد متناظر این نقاط جدید را به صورت اعداد اعشاری بنویسید. x بین کدام یک از این اعداد قرار می‌گیرد؟ در مورد عدد $\frac{3}{7}$ این عدد بین $0/42$ و $0/43$ بوده است و پس از رسم بزرگ‌ترین فاصله و تقسیم آن به ده قسمت مساوی داریم: $0/428 < \frac{3}{7} < 0/429$.

با تکرار مراحل فعالیت بالا در هر مرحله اعدادی اعشاری به دست می‌آیند و دنباله‌ای تشکیل می‌دهند که به عدد انتخاب شده نزدیک می‌شوند. در مورد عدد $\frac{3}{7}$ این دنباله به شکل زیر است.

$0/4, 0/42, 0/428, 0/4285, \dots$

برای هر عدد حقیقی مثبت x می‌توان دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخت که جملات آن به x نزدیک می‌شوند. جمله‌ی n ام این دنباله یک عدد اعشاری با n رقم اعشار است و هر جمله‌ی آن با اضافه شدن یک رقم اعشار به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. این دنباله را دنباله‌ی تقریبات اعشاری x می‌نامند و جمله‌ی n ام آن را تقریب اعشاری x با n رقم اعشار می‌نامند.

با تقسیم ۱۱ بر ۶ در خارج قسمت به ترتیب اعداد زیر ساخته می‌شوند که دنباله‌ی تقریبات اعشاری $\frac{11}{6}$ است.

$$1/8 \text{ و } 1/83 \text{ و } 1/833 \text{ و } 1/8333 \text{ و } \dots$$

۱- در مورد هر یک از دنباله‌های زیر حدس بزنید جملات این دنباله‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند و با تشکیل دنباله‌ی تفاضل حدس خود را بیازمایید.

الف) $0/9, 0/99, 0/999, \dots$

ب) $2/9, 2/99, 2/999, \dots$

ج) $5/05, 5/005, 5/0005, \dots$

د) $1/19, 1/199, 1/1999, \dots$

۲- در چه حالتی جملات یک دنباله‌ی حسابی به عدد خاصی نزدیک خواهند شد؟

۳- اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد و جمله‌ی اول آن صفر نباشد، توضیح دهید که چرا جملات این دنباله به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند؟

۴- اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی برابر ۱ باشد، جملات این دنباله به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۵- اگر x عددی باشد که در نامعادلات زیر صدق می‌کند، چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی تقریبات اعشاری آن را بنویسید.

$$2x + 1 < 8/1316 \quad , \quad 4 - x < 0/4343$$

۶- دو جمله‌ی اول تقریبات اعشاری $\sqrt{2}$ را با استفاده از روش فعالیت این بخش بنویسید.

ریشه‌گیری اعداد حقیقی

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم اعداد حقیقی آشنا شدیم. فرض کنید k یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ باشد.

عدد حقیقی b را یک ریشه‌ی k ام عدد حقیقی a نامیم هرگاه: $b^k = a$

مثال

۱- عدد ۴ یک ریشه‌ی سوم ۶۴ است، زیرا $4^3 = 64$. همچنین عدد ۲ یک ریشه‌ی چهارم ۱۶ است زیرا $2^4 = 16$.

۲- عدد (-2) یک ریشه‌ی پنجم -32 است، زیرا $(-2)^5 = -32$.

اگر k زوج باشد، فقط اعداد نامنفی ریشه k ام دارند (چرا؟) و اگر b یک ریشه‌ی k ام عدد نامنفی a باشد، آنگاه $-b$ نیز یک ریشه‌ی k ام a است، زیرا $(-b)^k = b^k = a$.
برای k های زوج، آن ریشه‌ی k ام عدد نامنفی a که نامنفی است را با $\sqrt[k]{a}$ نشان می‌دهند.

$$3- \sqrt[k]{1} = 1, \sqrt[k]{0} = 0, \sqrt[k]{81} = 3, \sqrt[k]{16} = 2, \sqrt[k]{16} \neq -2$$

برای k های فرد هر عددی، مثبت یا منفی، مانند a ریشه‌ی k ام دارد و فقط یک ریشه‌ی k ام دارد که با $\sqrt[k]{a}$ نشان می‌دهند. برای k های فرد، علامت $\sqrt[k]{a}$ و علامت a یکی است. (چرا؟)

$$4- (k \text{ فرد است}) \sqrt[k]{-1} = -1, \sqrt[5]{-32} = -2$$

توجه داشته باشید که ریشه k ام یک عدد مانند a را که با $\sqrt[k]{a}$ نشان داده‌ایم، عددی است که اگر به توان k برسد برابر a می‌شود، پس $(\sqrt[k]{a})^k = a$.

علامت‌گذاری $\sqrt[k]{a}$ در حالتی که a منفی و k زوج باشد معنا ندارد و هر وقت از این علامت استفاده کنیم به طور ضمنی فرض بر آن است که اگر k زوج باشد a نامنفی است.

۱- فرض کنید k یک عدد طبیعی فرد است. توان k ام چه عددی برابر a^k است. نتیجه بگیرید:

$$\sqrt[k]{a^k} = a$$

۲- فرض کنید k یک عدد طبیعی زوج است. توان k ام چه عددی برابر a^k است؟ توان k ام چه عدد مثبتی برابر a^k است. نتیجه بگیرید: $\sqrt[k]{a^k} = |a|$.

۳- بنا به تعریف دیدیم: $(\sqrt[k]{a})^k = a$. مقدار $(\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b})^k$ را حساب کنید و نتیجه بگیرید:

$$\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$$

۴- از تساوی بالا استفاده کنید و نشان دهید: $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$.

۵- دلیل درستی تساوی‌های زیر را بیان کنید.

$$(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk} = ((\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n)^k = (\sqrt[k]{a})^k = a$$

 از این تساوی‌ها نتیجه بگیرید: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt{nk}{a}$.

الف) $\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2 \times 3} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3}$

ب) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{8}} = \sqrt{2}$

توان‌رسانی با توان اعداد گویا

پدر محمد یک زیست‌شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. در یک آزمایش کشت یک نوع باکتری، دیده شد که در شرایط مساعد وزن این باکتری‌ها در هر ساعت ۲ برابر می‌شود.

بنابراین اگر با ۱ گرم باکتری شروع کنیم، در پایان ساعت اول، دوم، ...، n ام، وزن باکتری‌ها را می‌توانیم از دنباله‌ی زیر پیدا کنیم.

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$$

محمد از پدرش پرسید: آیا باید حتماً تا پایان ساعت منتظر شویم؟ آیا می‌توانیم وزن باکتری‌ها را

پس از نیم ساعت هم پیدا کنیم؟

پدر محمد گفت: تو فکر می کنی پس از نیم ساعت وزن باکتری ها چه قدر شده باشد؟

محمد گفت: حدس می زنم وزن آن ها 2^2 گرم شده باشد.

پدر محمد گفت: 2^2 چه قدر است؟

محمد گفت: نمی دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را بیابیم. اگر فرض کنیم در هر نیم ساعت وزن

باکتری ها b برابر شود، در این صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری ها برابر $b \times b = b^2$ می شود.

از طرفی پس از یک ساعت باکتری ها دو برابر می شوند؛ پس $b^2 = 2$. بنابراین $b = \sqrt{2}$ (زیرا b

مثبت است)، پس: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$.



۱- با تکرار روش مشابه چه مقداری برای $2^{\frac{1}{3}}$ به دست می آورید؟

۲- با تکرار روش مشابه چه مقداری برای $2^{\frac{1}{n}}$ به دست می آورید؟

۳- اگر باکتری ها در هر ساعت ۳ برابر می شدند، و با ۱ گرم باکتری شروع می کردیم، وزن باکتری ها

پس از نیم ساعت چه قدر می شد؟

۴- با روش های مشابه چه مقداری را برای $3^{\frac{1}{2}}$ و $3^{\frac{1}{n}}$ به دست می آورید؟

۵- اگر a عددی مثبت و n یک عدد طبیعی باشد، چه مقداری را برای $a^{\frac{1}{n}}$ پیشنهاد می کنید؟

۶- اگر a عددی مثبت و n یک عدد طبیعی و p یک عدد صحیح باشد، چه مقداری را برای

$a^{\frac{p}{n}}$ پیشنهاد می کنید؟

فعالیت بالا نشان می دهد که برای یک عدد حقیقی مثبت a و عدد گویای $r = \frac{p}{n}$ که p عددی صحیح

و n یک عدد طبیعی است، a^r که توان a نام دارد، به شکل زیر تعریف می شود:

$$a^r = a^{\frac{p}{n}} = (\sqrt[n]{a})^p$$

$$6^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt[2]{6})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad -2 \quad 4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[2]{4})^3 = 2^3 = 8 \quad -1$$

$$\sqrt[2]{25}^3 = (\sqrt[2]{25})^3 = 5^3 = 125 \quad -3$$

۱- هر یک از اعداد $\sqrt{2}$ و $\sqrt[4]{2^2}$ و $\sqrt[6]{2^3}$ را با استفاده از تعریف توان رسانی به توان اعداد گویا حساب کنید و پس از ساده کردن، نتیجه بگیرید که همگی آن‌ها با هم برابرند.

۲- اگر p یک عدد صحیح و n یک عدد طبیعی باشد، برای یک عدد طبیعی k داریم $\frac{p}{n} = \frac{kp}{kn}$ با استفاده از تعریف توان رسانی با توان اعداد گویا با محاسبه‌ی هریک از توان رسانی‌های داده شده پس از ساده کردن نتیجه بگیرید: $a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{kp}{kn}} \quad (a > 0)$

قوانین توان رسانی توان‌های صحیح برای توان‌های گویا نیز برقرار است. در زیر a و b دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد گویا هستند.

$$a^{r+s} = a^r a^s$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$(ab)^r = a^r b^r$$

با نوشتن r و s به صورت تقسیم یک عدد صحیح بر یک عدد طبیعی و استفاده از تعریف توان رسانی به توان اعداد گویا و استفاده از روابط ریشه‌گیری درستی این تساوی‌ها را می‌توان به دست آورد.

الف) $5^{\frac{5}{6}} = 5^{1+\frac{1}{6}} = 5 \times 5^{\frac{1}{6}} = 5\sqrt[6]{5}$

ب) $(\sqrt{2})^{\frac{3}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{2})^3 = \sqrt[4]{8}$

ج) $8^{\frac{1}{2}} = (4 \times 2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

۱- برای هر عدد گویای r نشان دهید: $1^r = 1$.

۲- برای هر عدد گویای r و عدد حقیقی مثبت a نشان دهید: $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

۳- عدد $\sqrt[4]{64}$ را به صورت یک عدد رادیکالی با فرجه‌ی ۳ بنویسید.

۴- ریشه‌گیری‌های زیر را بر حسب توان‌های گویا بنویسید و پس از ساده کردن مجدداً بر حسب ریشه‌گیری بنویسید.

الف) $\sqrt[4]{5^2 \sqrt{5}}$ ب) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{14}}$ ج) $\sqrt[5]{4} \div \sqrt[4]{8}$

۵- برای هر عدد حقیقی مثبت a و اعداد طبیعی m و n درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

۶- فرض کنید a عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد، با ضرب طرفین نامساوی $1 < a$ در a و ضرب مجدد نامساوی به دست آمده در a و ادامه‌ی این عمل نتیجه بگیرید:

$$1 < a < a^2 < a^3 < \dots < a^n < \dots$$

اما اگر a عددی مثبت و کمتر از ۱ باشد با روش مشابه نشان دهید:

$$\dots < a^n < \dots < a^3 < a^2 < a < 1$$

توان‌رسانی با توان اعداد حقیقی

محمد که توانسته بود توان‌رسانی به توان اعداد گویا را تعریف کند، به این فکر افتاد که آیا می‌توان، توان‌رسانی به توان اعداد گنگ را هم تعریف کرد. مثلاً، آیا می‌توان $2^{\sqrt{2}}$ را تعریف کرد و معنایی برای آن پیدا کرد؟

محمد نزد دبیر ریاضی خود رفت و از او کمک خواست. دبیر به او گفت از تجربه‌ی خود در تعریف $2^{\frac{1}{2}}$ استفاده کند.

محمد گفت: در تعریف $2^{\frac{1}{2}}$ از وزن باکتری‌هایی که در هر ساعت ۲ برابر می‌شدند استفاده کردیم. اگر با ۱ گرم باکتری شروع می‌کردیم، پس از t ساعت که t یک عدد گویا است، وزن باکتری‌ها 2^t گرم بود. بنابراین پس از $\sqrt{2}$ ساعت نیز وزن باکتری‌ها باید $2^{\sqrt{2}}$ گرم باشد.

دبیر گفت: این معنای مناسبی برای $2^{\sqrt{2}}$ است ولی چگونه آن را محاسبه می‌کنید؟

محمد گفت: در محاسبه‌ی $2^{\frac{1}{2}}$ از ریشه‌گیری استفاده کردیم اما برای محاسبه‌ی $2^{\sqrt{2}}$ راهی به نظر من نمی‌رسد.

دبیر گفت: در کار کردن با اعداد حقیقی معمولاً محاسبه‌ی دقیق امکان‌پذیر نیست و بهتر است

دنبال یافتن تقریبات اعشاری آن‌ها باشیم. آیا می‌توان تقریبات اعشاری $2^{\sqrt{2}}$ را به دست آورد؟

محمد گفت: این ممکن است، زیرا ما تقریبات اعشاری $\sqrt{2}$ را می‌شناسیم که دنباله‌ای به شکل زیر است.

$$1/4, 1/41, 1/414, 1/4142, \dots$$

پس با محاسبه‌ی مقدارهای $2^{1/4}, 2^{1/41}, 2^{1/414}, 2^{1/4142}, \dots$ می‌توانیم مقدارهای تقریبی $2^{\sqrt{2}}$ را به دست آوریم.

دبیر گفت: درست است. سپس افزود به طور کلی می‌توان همانند توان‌رسانی به توان اعداد گویا برای اعداد حقیقی توان‌رسانی را تعریف نمود. دلایل آن را سال‌های بعد می‌بینید. شما با این روش می‌توانید برای هر عدد حقیقی b و عدد حقیقی مثبت a توان a^b را تعریف کنید.

چرا برای هر عدد حقیقی b می‌توانیم نشان دهیم: $1^b = 1$ ؟

توان a^b را با a نشان می‌دهند. توجه داشته باشید که در توان رسانی، پایه همواره عددی مثبت است ولی نما هر عددی می‌تواند باشد.

قوانین توان رسانی به توان اعداد گویا برای توان رسانی به توان اعداد حقیقی هم برقرارند. در زیر a و c اعداد حقیقی مثبتی هستند و b و d اعداد حقیقی دل‌خواهی هستند.

$$a^{b+d} = a^b a^d$$

$$(a^b)^d = a^{bd}$$

$$(ac)^b = a^b c^b$$

الف) $5^{1-\sqrt{3}} \times 5^{1+\sqrt{3}} = 5^{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}} = 5^2 = 25$

ب) $(\sqrt{3}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{3})^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = (\sqrt{3})^2 = 3$

ج) $(\pi-1)^{\sqrt{3}} (\pi+1)^{\sqrt{3}} = ((\pi-1)(\pi+1))^{\sqrt{3}} = (\pi^2-1)^{\sqrt{3}}$

۱- مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $2^{\sqrt{3}} \times 2^{\sqrt{3}}$

ب) $(\sqrt{3}^{\sqrt{3}})^{\sqrt{2}}$

ج) $(\sqrt{15}^{(2-\sqrt{2})})^{(2+\sqrt{2})}$

د) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1} (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$

۲- مقدار مثبت x را به گونه‌ای تعیین کنید که $x^{\sqrt{2}}$ برابر ۲ شود.

(راهنمایی: در معادله‌ی $x^{\sqrt{2}} = 2$ طرفین را به توان $\sqrt{2}$ برسانید.)

۳- نشان دهید: $\sqrt{a^b} = (\sqrt{a})^b$ ($a > 0$).

۴- برای اعداد حقیقی مثبت a و c و اعداد حقیقی b و d نشان دهید:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^b = \frac{a^b}{c^b}, \quad \frac{a^b}{a^d} = a^{b-d}, \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

۵- با استفاده از خواص اساسی توان‌رسانی، برای هر عدد حقیقی مثبت a و عدد حقیقی دلخواه

b نشان دهید: $a^b = \left(a^{\frac{b}{2}}\right)^2$ و نتیجه بگیرید: a^b همواره عددی مثبت است.