فصل چهارم

محاسبات تغییر دور و گشتاور توسط گیربکس و دیفرانسیل

هدف‌های رفتاری : از فراگیر انتظار می‌رود که در پایان این فصل بتواند :

۱ــ تغییر دور و گشتاور در گیربکس را محاسبه کند.

۲ــ تغییر دور و گشتاور در دیفرانسیل را حساب کند.

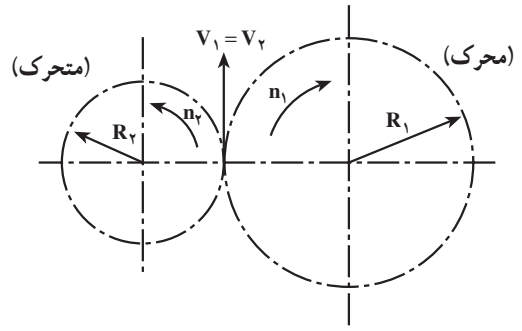
۴ــ مقدار نیروی محرکه در گیربکس و دیفرانسیل را تعیین کند.

۴ــ محاسبات تغییر دور و گشتاور

۱ــ۴ــ محاسبه‌ی تغییر دور و گشتاور در گیربکس

دو چرخ دنده‌ی درگیر با یک‌دیگر را که قطرهای متفاوتی دارند درنظر بگیرید. ملاحظه می‌شود که در محلّ تماس دو چرخ دنده، دندانه‌ها سرعت خطّی یکسانی دارند و مسافت پیموده شده توسط دندانه‌ها در یک زمان مساوی، با هم برابر است. چون سرعت خطّی نقاط واقع شده بر روی محیط دو چرخ دنده با هم مساوی هستند، بنابراین سرعت دورانی چرخ دنده‌ی کوچک‌تر باید بیش‌تر باشد تا امکان درگیری دو چرخ دنده فراهم شود، زیرا :

$$V_۱ = R_۱\omega_۱ = R_۱ \times ۲\pi \times n_۱$$



شکل ۱ــ۴

$V_۲ = R_۲\omega_۲ = R_۲ \times ۲\pi \times n_۲$

چون : $V_۱ = V_۲$

بنابراین : $۲\pi R_۱ n_۱ = ۲\pi R_۲ n_۲$

درنتیجه :

$$\boxed{R_۱ n_۱ = R_۲ n_۲} \qquad (۴\text{ـ}۱)$$

در این روابط :

«$V_۱$» و «$V_۲$» = سرعت خطی نقطه‌ی تماس دو چرخ دنده ؛

«$R_۱$» و «$R_۲$» = شعاع دو چرخ‌دنده ؛

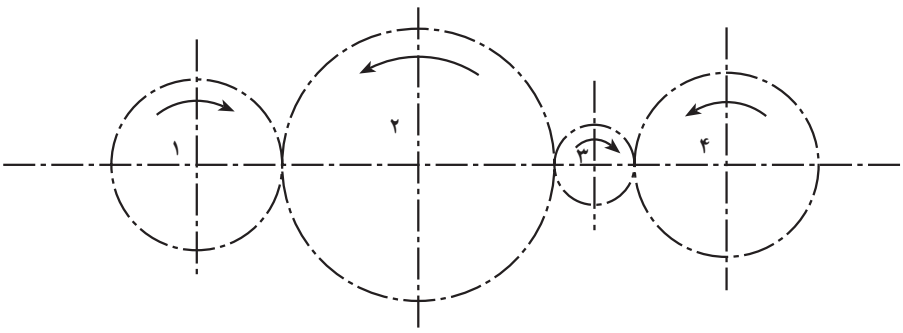
«$\omega_۱$» و «$\omega_۲$» = سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده‌ها ؛

«$n_۱$» و «$n_۲$» = تعداد دوران چرخ‌دنده‌ها است.

نسبت تعداد دوران چرخ‌دنده‌ی محرّک (گرداننده) به چرخ دنده‌ی متحرّک (گردنده) را «نسبت دور» می‌گویند و با علامت «i» نشان داده می‌شود.

$$\boxed{i = \frac{n_۱}{n_۲} = \frac{R_۲}{R_۱} = \frac{d_۲}{d_۱}} \qquad (۴\text{ـ}۲)$$

سؤال (۱): اگر (۴) عدد چرخ دنده با شعاعهای «$R_۱$» و «$R_۲$» و «$R_۳$» و «$R_۴$» مطابق شکل با هم درگیر باشند و چرخ دنده‌ی «$R_۱$» محرّک باشد، نسبت دورنهایی چگونه محاسبه می‌شود؟



شکل ۲ـ۴

چون از حاصل تقسیم محیط دایره گام، بر تعداد دندانه‌ی هر چرخ دنده، مقدار گام دندانه به‌دست می‌آید و دو چرخ‌دنده‌ی درگیر با هم، دارای گام دندانه‌ی مساوی هستند، بنابراین :

$$\frac{d_۱ \times \pi}{Z_۱} = \frac{d_۲ \times \pi}{Z_۲} \Rightarrow \boxed{\frac{d_۱}{d_۲} = \frac{Z_۱}{Z_۲}}$$

از ترکیب دو رابطه‌ی اخیر، نتیجه می‌گیریم که :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \qquad (۴ــ۳)$$

یعنی، نسبت دوران دو چرخ دنده، متناسب با عکس نسبت قطر و نسبت دندانه‌ی آن‌ها است. در این رابطه :

«Z_1» و «Z_2»، تعداد دندانه‌ی دو چرخ دنده هستند.

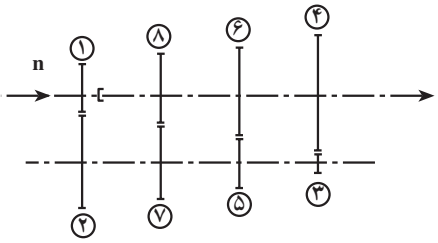
۲ــ۴ــ محاسبه‌ی تغییر دور و گشتاور، در گیربکس (جعبه‌دنده)

گیربکس اتومبیل مجموعه‌ای از چرخ‌دنده‌ها است که دور و گشتاور موتور را برحسب نیاز تغییر می‌دهد. در مواردی که نیاز به گشتاور زیادی جهت شتاب دادن به اتومبیل و یا عبور از یک سطح شیب‌دار به‌سمت بالا است، گیربکس گشتاور موتور را افزایش داده، تعداد دوران آن را کاهش می‌دهد و زمانی که اتومبیل در یک سطح افقی نیاز به سرعت زیادی دارد، دوران خروجی میل گاردان را افزایش می‌دهد و حتی در بعضی از موارد دوران میل‌گاردان را از تعداد دوران موتور نیز، زیادتر می‌کند.

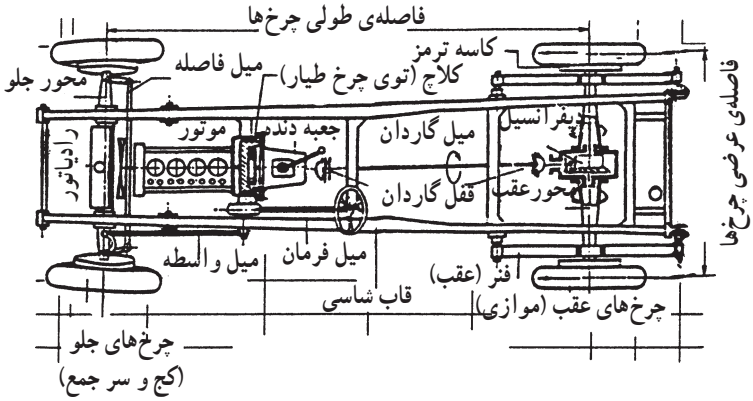
هم‌چنان که می‌دانید، نسبت دور در یک مجموعه‌ی چرخ دندانه، از حاصل‌ضرب نسبت دور زوج چرخ دندانه‌هایی که با هم درگیر هستند، به‌دست می‌آید.

«نسبت دور» عددی است که اگر در مقدار گشتاور ورودی ضرب شود ، مقدار گشتاور خروجی به‌دست می‌آید و اگر دوران ورودی را بر آن تقسیم کنیم، تعداد دوران خروجی به‌دست می‌آید.

شکل (۳ــ۴) را که مربوط به یک گیربکس چهار دنده (چهار سرعته) است، درنظر بگیرید :



شکل ۳ــ۴



شکل ۴ــ۴ــ شاسی یک اتومبیل با نوع معمولی حرکت

«نسبت دور» در دنده‌های مختلف برای این گیربکس، در صورتی که تعداد دندانه‌ی مربوط به‌هر چرخ دنده را با «Z» نشان دهیم، به ترتیب زیر محاسبه می‌شود :

$$i = \frac{\text{حاصل‌ضرب تعداد دندانه‌ی چرخ‌های متحرک}}{\text{حاصل‌ضرب تعداد دندانه‌ی چرخ‌های محرک}}$$

نسبت دور در دنده‌ی یک $i_1 = \frac{Z_2}{Z_1} \times \frac{Z_4}{Z_3}$

نسبت دور در دنده‌ی دو $i_2 = \frac{Z_2}{Z_1} \times \frac{Z_6}{Z_5}$

نسبت دور در دنده‌ی سه $i_3 = \frac{Z_2}{Z_1} \times \frac{Z_8}{Z_7}$

نسبت دور در دنده‌ی چهار (زیرا هیچ چرخ دنده‌ای در انتقال قدرت دخالت ندارد) $i_4 = 1:1$

برای محاسبه‌ی گشتاور میل گاردان در هر دنده، کافی است که گشتاور موتور را در نسبت دور آن دنده ضرب کنیم. یعنی :

$$M_k = M_m \times i \qquad (۴ــ۴)$$

برای محاسبه‌ی تعداد دوران میل گاردان در هر دنده، کافی است که تعداد دوران موتور را بر نسبت دور آن دنده تقسیم کنیم، یعنی :

$$n_k = \frac{n_m}{i} \qquad (۴ــ۵)$$

مثال (۱): اتومبیل (BMW) مدل (۱۸۰۰) دارای جعبه دنده‌ای با این مشخّصات است :

$i_1 = ۳/۸۱۶$ و $i_2 = ۲/۰۷$ و $i_3 = ۱/۳۳$ و $i_4 = ۱$ و $i_R = ۴/۱۵۳$

اگر در دور ثابت(۲۸۶۰ R.P.M) قدرت مفید موتور (۴۴kW) باشد :
تعداد دوران و گشتاور میل گاردان در دنده‌های مختلف گیربکس را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$n_k = \frac{n_m}{i}$$

$$n_{k_1} = \frac{n_m}{i_1} = \frac{۲۸۶۰}{۳/۸۱۶} = ۷۴۹/۵ \qquad R.P.M$$

$$n_{k_2} = \frac{n_m}{i_2} = \frac{۲۸۶۰}{۲/۰۷} = ۱۳۸۱/۶ \qquad R.P.M$$

$$n_{k_3} = \frac{n_m}{i_3} = \frac{۲۸۶۰}{۱/۳۳} = ۲۱۵۰/۴ \qquad R.P.M$$

$$n_{k_4} = \frac{n_m}{i_4} = \frac{۲۸۶۰}{۱} = ۲۸۶۰ \qquad R.P.M$$

$$n_{kR} = \frac{n_m}{i_R} = \frac{۲۸۶۰}{۴/۱۵۳} = ۶۸۸/۶ \qquad R.P.M$$

$$M_k = M_m \times i$$

$$M_m = \frac{P_e \times ۹۵۵۰}{n_m} = \frac{۴۴ \times ۹۵۵۰}{۲۸۶۰} = ۱۴۶/۹ \ m.N$$

$$M_{k_1} = M_m \times i_1 = ۱۴۶/۹ \times ۳/۸۱۶ = ۵۶۰/۶ \ m.N$$

$$M_{k_2} = M_m \times i_2 = ۱۴۶/۹ \times ۲/۰۷ = ۳۰۴/۱ \ m.N$$

$$M_{k_3} = M_m \times i_3 = ۱۴۶/۹ \times ۱/۳۳ = ۱۹۵/۴ \ m.N$$

$$M_{k_4} = M_m \times i_4 = ۱۴۶/۹ \times ۱ = ۱۴۶/۹ \ m.N$$

$$M_{kR} = M_m \times i_R = ۱۴۶/۹ \times ۴/۱۵۳ = ۶۱۰/۱ \ m.N$$

۳ــ۴ــ محاسبه‌ی تغییر دور و گشتاور در دیفرانسیل

همه‌ی مواردی که درباره‌ی محاسبه‌ی تغییر دور و گشتاور در گیربکس گفته شد ، در مورد دیفرانسیل نیز صادق است. زیرا دیفرانسیل نیز صرف‌نظر از توانایی انتقال دوران از چرخ داخل پیچ به چرخ خارجی، مانند گیربکس عمل می‌نماید ؛ با این تفاوت که، استفاده از چرخ دنده های مخروطی باعث تغییر صفحه‌ی دوران به‌اندازه‌ی «۹۰°» می‌شود . بنابراین خواهیم داشت :

$$\boxed{n_p = \frac{n_k}{i_D}} \qquad (۴ــ۶)$$

$$M_p = M_k \times i_D \qquad (۴_۷)$$

در این روابط :

n_p = تعداد دوران پلوس یا تایر (R.P.M) ؛

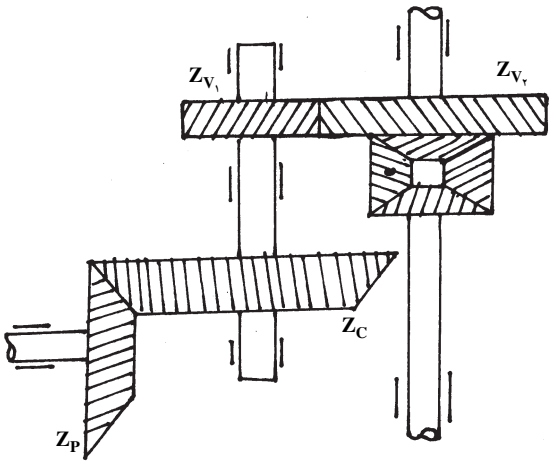
M_p = گشتاور پلوس یا تایر (متر ــ نیوتن) ؛

n_k = تعداد دوران میل گاردان (R.P.M) ؛

M_k = گشتاور میل گاردان (متر ــ نیوتن) ؛

i_D = نسبت دور در دیفرانسیل.

سؤال : نسبت دور در دیفرانسیل‌های دوبل چگونه محاسبه می‌شود؟



شکل ۵ــ۴ــ شماتیک دیفرانسیل دوبل

مثال (۲): اتومبیلی در دور ثابت موتور، دارای گشتاور چرخ (۳۷۰۰N.m) و توان مفید (۵۰kW) است. اگر نسبت دور در گیربکس (۱ :۳) و تعداد دندانه‌ی کرانویل (۴۶) و پینیون (۱۳) عدد باشد، مطلوب است :

الف ــ گشتاور موتور برحسب m.N حساب شود.

ب ــ تعداد دوران تایر در دقیقه حساب شود.

پاسخ :

$M_p = ۳۷۰۰$ m.N

$P_e = ۵۰$ kW

$i = ۳:۱$

$Z_p = ۱۳$

$Z_c = ۴۶$

$M_m = ?\ \ m.N$

$n_p = ?\ \ R.P.M$

$M_p = M_m \times i \times i_D$

$$i_D = \frac{Z_c}{Z_p} = \frac{۴۶}{۱۳} = ۳/۵۳۸$$

$$M_m = \frac{M_p}{i \times i_D} = \frac{۳۷۰۰}{۳ \times ۳/۵۳۸} = ۳۴۸/۶ \quad m.N$$

$$n_p = \frac{n_m}{i \times i_D}$$

$$P_e = \frac{M_m \times n_m}{۹۵۵۰} \Rightarrow n_m = \frac{P_e \times ۹۵۵۰}{M_m} = \frac{۵۰ \times ۹۵۵۰}{۳۴۸/۶} = ۱۳۶۹/۷ \ R.P.M$$

$$n_p = \frac{n_m}{i \times i_D} \ , \ n_p = \frac{۱۳۶۹/۷}{۳ \times ۳/۵۳۸} = ۱۲۹ \ R.P.M$$

۴ــ۴ــ محاسبه‌ی نیروی محرکه در گیربکس و دیفرانسیل

به‌طور کلّی محاسبه‌ی نیروی محرکه در گیربکس و دیفرانسیل، برای محاسبه‌ی ابعاد چرخ‌دنده‌ها و محورهای موجود در گیربکس و دیفرانسیل و برای انتخاب موادّ لازم آن‌ها و هم‌چنین انتخاب بلبرینگ‌ها صورت می‌گیرد. محاسبه‌ی نیروی محرکه‌ی مؤثّر بر هر چرخ دنده و یا محور به سادگی و با استفاده از فرمول گشتاور انجام می‌شود . یعنی :

$$F = \frac{M}{R} \qquad (۴ــ۸)$$

در این رابطه

F = نیروی محرّکه‌ی مؤثّر بر چرخ دنده و یا محور (نیوتن) است ؛

M = گشتاور مؤثّر(مترــنیوتن) است ؛

R = شعاع دایره،گام چرخ دنده و یا شعاع محور است. (متر)

هم‌چنان که می‌دانید $d_o = Z.m$ (۴ــ۹)

که «d_o» قطر متوسط چرخ دنده، «Z» تعداد دنده و «m» مدول دنده می‌باشد.

مثال (۳): در شکل (۳ــ۴) مشخّصات جعبه دنده به‌شرح زیر است :

$Z_۱ = ۲۰ ، Z_۲ = ۲۴ ، Z_۳ = ۱۵ ، Z_۴ = ۲۹ ، Z_۵ = ۱۷ ، Z_۶ = ۲۷$

$Z_۷ = ۲۱ ، Z_۸ = ۲۳$

نیروی محیطی دنده‌های «$Z_۱$» و «$Z_۲$» برابر (۱۶۰۰N) و مدول دنده (۵mm) می‌باشد.

مطلوب است که :

الف ــ نسبت تغییر دور در دنده‌های مختلف را محاسبه کنید.

ب ــ اگر دور موتور (۳۰۰۰RPM) باشد، دور گاردان در دنده‌های مختلف را حساب کنید.

ج ــ گشتاور دنده‌های «$Z_۱$» و «$Z_۲$» و «$Z_۴$» چند نیوتن سانتی‌متر است؟

پاسخ:

$Z_۱ = ۲۰$ دنده (۱) $i_۱ = \frac{Z_۲}{Z_۱} \times \frac{Z_۴}{Z_۳} = \frac{۲۴ \times ۲۹}{۲۰ \times ۱۵} = ۲/۳۲ : ۱$

$Z_۲ = ۲۴$ دنده $i_۲ = \frac{Z_۲}{Z_۱} \times \frac{Z_۶}{Z_۵} = \frac{۲۴ \times ۲۷}{۲۰ \times ۱۷} = ۱/۹ : ۱$

$Z_۳ = ۱۵$ دنده $i_۳ = \frac{Z_۲}{Z_۱} \times \frac{Z_۸}{Z_۷} = \frac{۲۴ \times ۲۳}{۲۰ \times ۲۱} = ۱/۳۱ : ۱$

$Z_۴ = ۲۹$ دنده (۲) $n_{k_۱} = n_m \times \frac{۱}{i_۱} = ۳۰۰۰ \times \frac{۱}{۲/۳۲} = ۱۲۹۳$

$Z_۵ = ۱۷$ دنده $n_{k_۲} = ۳۰۰۰ \times \frac{۱}{i_۲} = ۳۰۰۰ \times \frac{۱}{۱/۹} \approx ۱۵۷۹ \quad R.P.M$

$Z_۶ = ۲۷$ دنده $n_{k_۳} = ۳۰۰۰ \times \frac{۱}{i_۳} = ۳۰۰۰ \times \frac{۱}{۱/۳۱} \approx ۲۲۹۰ \quad R.P.M$

$Z_۷ = ۲۱$ دنده (۳) $M_{Z_۱} = F_۱ . R_۱ ، d_{o_۱} = m . Z_۱ = ۵ \times ۲۰ = ۱۰۰ \ mm$

$Z_۸ = ۲۳$ دنده $M_{Z_۱} = ۱۶۰۰ \times \frac{۱۰}{۲} = ۸۰۰۰ \ cm - N$

$F_{Z_۱} = F_{Z_۲} = ۱۶۰۰N$

$m = ۵$

$n = ۳۰۰۰ \ R.P.M \quad M_{Z_۲} = F_۱ \times \frac{d_{o_۲}}{۲} \ , \ d_{o_۲} = ۵ \times ۲۴ = ۱۲۰ \ mm$

$F_۱ = ۱۶۰۰ \ N \quad M_{Z_۲} = ۱۶۰۰ \times \frac{۱۲}{۲} = ۹۶۰۰ \ cm.N$

$i_۱ ، i_۲ ، i_۳ = ? \quad M_{Z_۲} = M_{Z_۳} \ ، \ d_{o_۳} = ۱۵ \times ۵ = ۷۵ \ mm = ۷/۵ \ cm$

$$F_{z_3} = \frac{M_{z_3}}{\frac{d_{o_3}}{2}} = \frac{۹۶۰۰}{۳/۷۵} = ۲۵۶۰N$$

n_{k_1} ، n_{k_2} ، n_{k_3} = ؟ R.P.M

$F_{z_3} = F_{z_4}$

M_{z_1} ، M_{z_2} ، M_{z_4} = ؟N.cm $\qquad$ $d_{o_4} = m \times Z_4 = ۵ \times ۲۹ = ۱۴۵mm = ۱۴/۵cm$

$$M_{z_4} = ۲۵۶۰ \times \frac{۱۴/۵}{۲} = ۱۸۵۶۰ \ cm.N$$

تمرین

مسأله‌ی (۱): موتور اتومبیلی در دور (۲۵۰۰R.P.M) دارای گشتاور (۱۹۱m.N) است. مشخّصات جعبه دنده و دیفرانسیل به‌شرح زیر است :

$i_1 = ۳/۸:۱$ ، $i_2 = ۲/۰۶:۱$ ، $i_3 = ۱/۳۲:۱$ ، $i_4 = ۰/۸۹:۱$ ، $i_R = ۳/۸:۱$

$Z_p = ۹$ ، $Z_c = ۴۵$

مطلوب است که :

الف ــ دور گاردان و پولوس برحسب دور بر دقیقه در دنده‌ی (۳) و دنده‌ی معکوس را حساب کنید.

ب ــ گشتاور گاردان و پولوس در دنده‌ی (۲) و دنده‌ی یک برحسب مترــنیوتن را محاسبه کنید.

جواب (الف: $n_{k_3} = ۱۸۹۴$ R.P.M ، $n_{k_R} = ۶۵۸$ R.P.M

$n_{p_3} = ۳۷۹$ R.P.M ، $n_{p_{L_R}} = ۱۳۱$ R.P.M

جواب (ب: $M_{k_1} = ۷۲۵/۸$ m.N ، $M_{k_2} = ۳۹۳/۴۶$ m.N

$M_{p_{L_2}} = ۱۹۶۷/۳$m.N ، $M_{p_{L_1}} = ۳۶۲۹$ m.N

مسأله‌ی (۲) : جعبه دنده اتومبیلی دارای مشخّصات زیر است :

$Z_1 = ۱۵$ ، $Z_2 = ۲۱$ ، $Z_3 = ۱۷$ ، $Z_4 = ۳۰$ ، $Z_5 = ۲۱$ ، $Z_6 = ۳۲$

$Z_7 = ۱۹$ ، $Z_8 = ۲۷$

اگر دور موتور (۳۰۰۰R.P.M) و دارای گشتاور (۲۴۵/۶m.N) باشد

مطلوب است که :

الف ــ نسبت تغییر دور در جعبه دنده در دنده‌های مختلف را حساب کنید.

ب ــ دور خروجی جعبه دنده در دنده‌های مختلف برحسب دور به‌دقیقه را حساب کنید.

ج ــ گشتاور گاردان در دنده‌های مختلف برحسب مترــنیوتن را به‌دست آورید.

جواب (الف: $i_۱ = ۲/۴۷:۱$ ، $i_۲ = ۲/۱۳:۱$ ، $i_۳ = ۱/۹۹:۱$

ب) جواب: $n_{k_۱} = ۱۲۱۴$ R.P.M ، $n_{k_۲} = ۱۴۰۸$ R.P.M

$n_{k_۳} = ۱۵۰۸$ R.P.M

ج) جواب: $M_{k_۱} = ۶۰۶/۶$ m.N ، $M_{k_۲} = ۵۲۳$ m.N

$M_{k_۳} = ۴۸۸/۷$ m.N

مسأله‌ی (۳): یک موتور بنزینی در دور (۲۲۰۰R.P.M) دارای گشتاور (۱۷۹) مترــ نیوتن می‌باشد ، اگر اتومبیل در وضعیّت دنده‌ی یک با نسبت تغییر دور (۱ :۲/۹۵) و تعداد دنده‌های پی‌نیون (۹) و کرانویل (۴۲) و دنده‌های کمکی ($Z_{v_۱} = ۲۳$ و $Z_{v_۲} = ۳۵$) باشد، حساب کنید که :

الف ــ دور تایر در دنده‌ی یک چند دور بر دقیقه (R.P.M) است؟

ب ــ گشتاور تایر برحسب (m.N) در حالت دنده‌ی یک چه‌قدر است؟

ج ــ نیروی محرک تایر با قطر (۸۰۰mm) برحسب نیوتن در حالت دنده‌ی یک چه اندازه است؟

د ــ نیروی محیطی کرانویل هرگاه $d_{oc} = ۲۴۰$ mm باشد در حالت دنده‌ی یک چند نیوتن است؟

جواب (الف: ۱۰۵ R.P.M

جواب (ب: ۳۷۵۰ m.N

جواب (ج: ۹۳۷۵/۵N

جواب (د: ۳۱۲۵۰N

مسأله‌ی (۴): در یک اتومبیل دور چرخ در دنده (۲) برابر (۴۰۰R.P.M) و گشتاور چرخ در این وضعیّت (۳۸۴۷/۵) مترــ نیوتن است و مشخّصات گیربکس و دیفرانسیل به شرح زیر می‌باشد :

$i_۱ = ۳/۲۵:۱$ ، $i_۲ = ۲/۸۵:۱$ ، $i_۳ = ۱/۶۵:۱$ ، $i_۴ = ۱:۱$ ، $i_R = ۳/۸۵:۱$

$Z_c = ۳۵$ ، $Z_p = ۷$

مطلوب است که :

الف ــ گشتاور موتور برحسب مترــ نیوتن حساب شود.

ب ــ دور موتور برحسب دور به دقیقه به‌دست آید.

ج ــ دور چرخ در دنده‌های مختلف برحسب دور به دقیقه حساب شود.

الف) ۲۷۰ m.N

ب) ۵۷۰۰ R.P.M

ج) $n_{p_{L_1}} = ۳۵۰$ R.P.M $n_{p_{L_3}} = ۶۹۱$ R.P.M $n_{p_{LR}} = ۲۹۶$ R.P.M

$n_{p_{L_4}} = ۱۱۴۰$ R.P.M

مسأله‌ی(۵): براساس مشخّصات داده شده در مسأله‌ی (۴) جواب و پرسش‌های زیر را به‌دست آورید.

الف ــ گشتاور چرخ در دنده‌های مختلف را حساب کنید.

ب ــ نیروی محیطی چرخ در دنده‌های مختلف هرگاه قطر مؤثر چرخ (۹۰۰) میلی‌متر باشد، چه‌قدر است؟

الف) $M_{p_{L_1}} = ۴۳۸۷/۵$ m.N ، $M_{p_{L_3}} = ۲۲۲۷/۵$ m.N ،

$M_{p_{LR}} = ۵۱۹۷/۵$ m.N ، $M_{p_{L_4}} = ۱۳۵۰$ m.N

ب) $F_1 = ۹۷۵۰$ N ، $F_2 = ۸۵۵۰$ N ، $F_3 = ۴۹۵۰$ N ، $F_4 = ۳۰۰۰$ N ،

$F_R = ۱۱۵۵۰$ N