فصل هشتم

کاربرد دایره و بیضی در نقشه‌برداری

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ اصطلاحات : دایره، شعاع، وتر، قطر، زاویه در دایره، زاویه‌ی مرکزی، زاویه‌ی محاطی، زاویه‌ی ظلّی و کمان در خور یک زاویه را با رسم شکل تعریف کند.

۲ــ شعاع دایره را به وسیله‌ی زاویه‌ای که مماس بر کره‌ی زمین از یک نقطه با صفحه‌ی افق می‌سازد را با ذکر یک مثال محاسبه کند.

۳ــ عرض جغرافیایی یک محل را به وسیله‌ی دوربین زاویه‌یاب محاسبه کند.

با رسم شکل ثابت کند زاویه‌ی قائم ستاره‌ی قطبی به وسیله‌ی دوربین تئودولیت که در محل اندازه‌گیری می‌شود با عرض جغرافیایی محل برابر است.

۴ــ اصطلاحات ؛ مماس، خط مماس، رسم مماس از یک نقطه خارج دایره بر دایره، شعاع نقطه‌ی تماس، شعاع عمود بر وتر، را با رسم شکل تعریف کند.

۵ــ بیضی و پارامترهای بیضی، فشردگی بیضی را با رسم شکل تعریف کند.

۶ــ با ذکر یک مثال و رسم شکل اندازه‌ی فشردگی و خروج از مرکز بیضی را محاسبه کند.

۷ــ مثال‌های حل شده در این فصل را فرا بگیرد.

آیا می‌دانید

غیاث‌الدین جمشید کاشانی در جمله‌ی بسیار زیبایی با زبان ریاضی، «به نام خدا» را به این شکل بیان می‌کند :

«به نام او که از اندازه‌ی نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است» که در این جمله به نوعی اذعان می‌دارد که انسان از فهم و محاسبه‌ی دقیق عدد π ناتوان است.

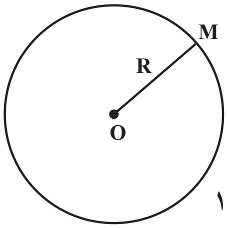
۸ــ۱ــ تعریف دایره (Circle)

آیا می‌دانید

غیاث‌الدین جمشید کاشانی که در حدود ۶۰۰ سال پیش می‌زیسته است (تاریخ وفات سال ۸۳۲ هجری قمری) اولین محاسب عدد π بوده است.

دایره مکان هندسی نقاطی است از یک صفحه که از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز به یک فاصله باشند.

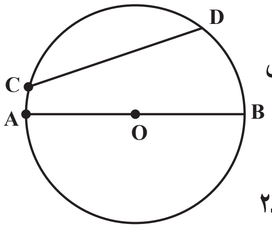
فاصله‌ی هر نقطه از دایره را تا مرکز دایره «شعاع دایره» گویند و آن را با حرف R نمایش می‌دهند.



شکل ۸ــ۱

تعریف وتر: پاره‌خطی که دو نقطه از پیرامون دایره را به هم وصل کند «وتر دایره» و بزرگ‌ترین وتر دایره را «قطر» گویند.

هر قطر دایره از مرکز دایره می‌گذرد و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند؛ مانند: وتر CD و قطر AB (شکل ۸ــ۲).



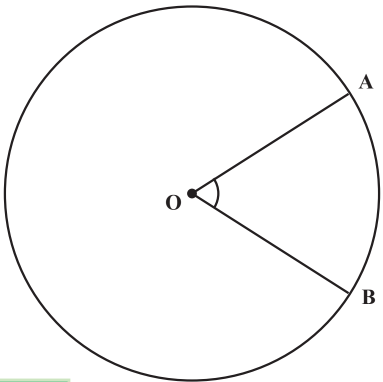
شکل ۸ــ۲

۸ــ۲ــ زاویه در دایره

زاویه در دایره به سه حالت است: زاویه‌ی مرکزی، زاویه‌ی محاطی و زاویه‌ی ظلّی.

تعریف زاویه‌ی مرکزی: زاویه‌ی مرکزی زاویه‌ای است که رأس آن در مرکز دایره و دو ضلع آن شعاع‌های دایره باشند؛ مانند زاویه‌ی AOB # (شکل ۸ــ۳).

قضیه: اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی برابر است با اندازه‌ی کمان مقابل آن.



شکل ۸ــ۳

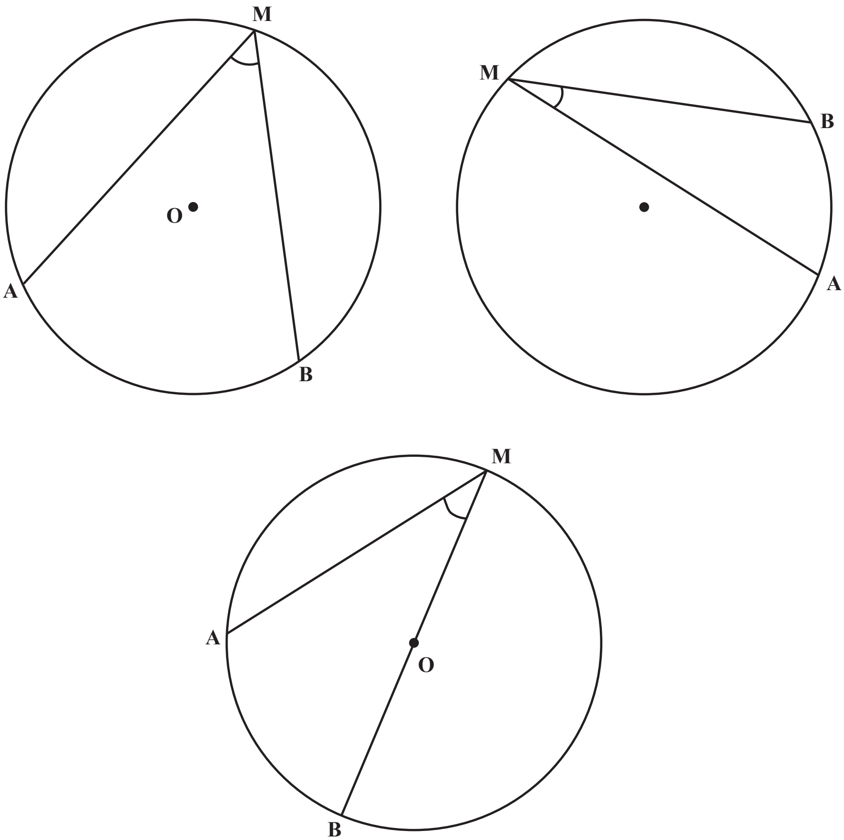
آیا می‌دانید

غیاث‌الدین جمشید کاشانی درسن ۴۳ سالگی از دنیا رفته است. بنابراین یافته‌های با ارزش او در دوران جوانی او صورت گرفته است.

تعریف زاویه‌ی محاطی: زاویه‌ی محاطی زاویه‌ای است که رأس آن روی پیرامون دایره و دو ضلع آن دو وتر دایره باشد(شکل ۸ ــ۴).

قضیه: اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی برابر است با نصف کمان مقابل آن (شکل۸ــ۴) :

$$\# \ AMB = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

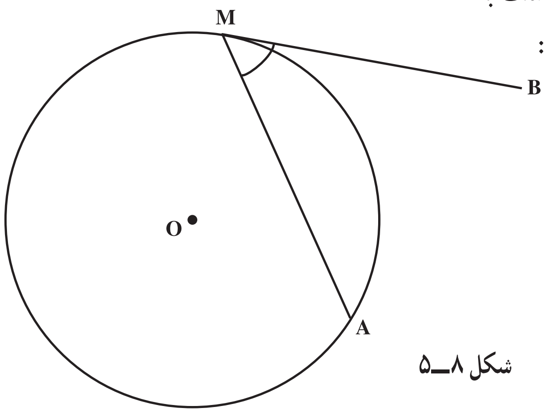


شکل ۸ــ۴

تعریف زاویه‌ی ظلّی: زاویه‌ی ظلّی زاویه‌ای است که رأس آن روی پیرامون دایره و یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره باشد.

قضیه: اندازه‌ی زاویه‌ی ظلّی برابر است با نصف کمان مقابل آن (مطابق شکل ۸ــ۵) :

$$\angle AMB = \frac{\overset{\frown}{MA}}{۲}$$

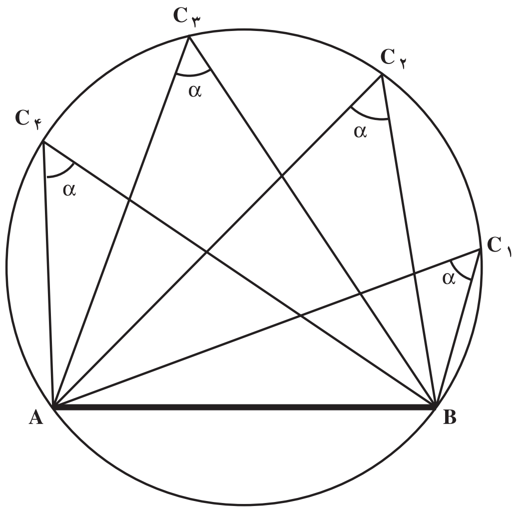


شکل ۸ــ۵

۸ــ۳ــ کمان درخور

تمام زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان با هم مساویند (شکل ۸ــ۶)

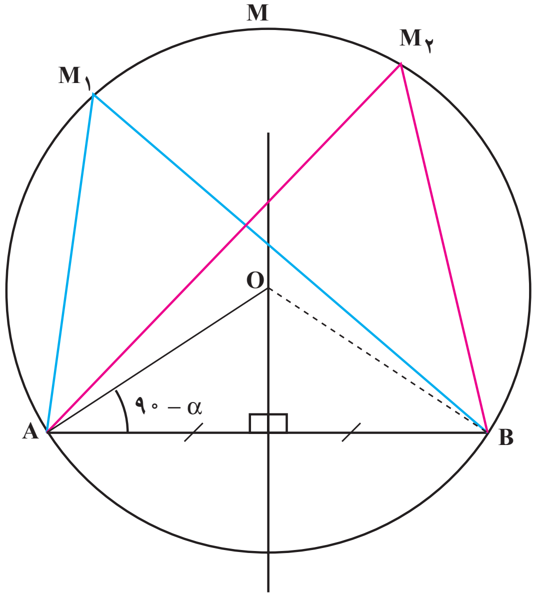
$$\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ = \hat{C}_۳ = \hat{C}_۴ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \alpha$$



شکل ۸ــ۶

تعریف کمان درخور: به مکان هندسی رئوسی زوایای محاطی که دو ضلع آن به طرف AB وصل می‌شوند، کمان درخور زاویه‌ی α گویند.

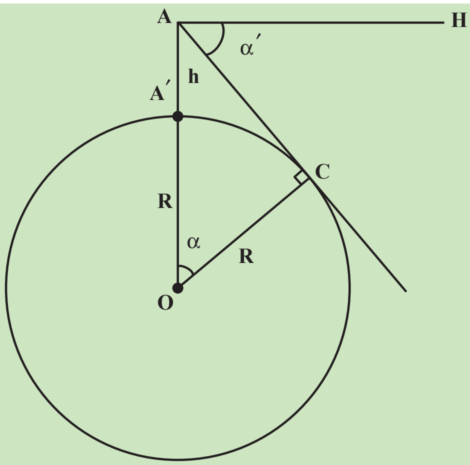
ترسیم کمان در خور: برای رسم کمان درخور زاویه‌ی α مطابق شکل ۸ـ۷ روی پاره‌خط AB، ابتدا عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم و سپس از نقطه‌ی A یا B خطی رسم می‌کنیم که با AB زاویه‌ی $(90-\alpha)$ بسازد. تا عمودمنصف را در نقطه‌ی O قطع کند. نقطه‌ی O مرکز دایره‌ی موردنظر است. به مرکز O و به شعاع OB دایره‌ای رسم می‌کنیم. در نتیجه کمان $\overset{\frown}{AMB}$ کمان درخور زاویه‌ی α خواهد بود. زیرا بر اساس رسم و خاصیت زاویه‌ی مرکزی کمان $\overset{\frown}{ANB}$ برابر 2α می‌شود و ما هر نقطه مانند M_1 را روی کمان $\overset{\frown}{AMB}$ در نظر بگیریم و به نقاط A و B وصل کنیم یک زاویه‌ی محاطی پدیدار می‌شود و طبق قضیه مساوی نصف کمان مقابل آن، یعنی : α می‌شود.



شکل ۸ـ۷

۸ـ۴ـ مثال‌هایی از کاربرد زاویه در دایره

مثال ۸ـ۱ـ از نقطه A به ارتفاع ۱۵۰۰ متر که زاویه شیب α' را اندازه‌گیری کرده‌ایم و مقدار آن $\alpha' = 1^\circ, 14', 36''$ شده است مطلوبست محاسبه شعاع کره زمین.



شکل ۸ـ۸

راهکار کلی: مثلث $O\overset{\Delta}{A}C$ در شکل مقابل قائم‌الزاویه است (زیرا شعاع OC در نقطه تماس C بر مماس AC عمود است) و دو زاویه $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$ می‌باشد چون اضلاع دو زاویه $A\overset{\Delta}{O}C$ و $C\overset{\Delta}{A}H$ دو به دو بر هم عمودند طبق قضیه با هم مساویند.

در مثلث $A\overset{\Delta}{O}C$ رابطه کسینوس‌ها را می‌نویسیم

$$Cos\alpha = \frac{OC}{OA} = \frac{R}{R+h} \qquad (OA = OA' + A'A = R + h)$$

$(R+h)Cos\alpha = R$ ضرب می‌کنیم

$RCos\alpha + hCos\alpha = R$ ساده می‌کنیم

$$RCos\alpha - R = -hCos\alpha$$

$$\begin{array}{l} R - RCos\alpha = hCos\alpha \\ R(۱ - Cos\alpha) = hCos\alpha \end{array} \Rightarrow R = \frac{hCos\alpha}{۱ - Cos\alpha}$$

با داشتن زاویه α و ارتفاع h شعاع کره‌ی زمین به‌دست می‌آید.

روش حل: در فرمول $R = \frac{hCos\alpha}{۱ - Cos\alpha}$ مقادیر معلوم را قرار می‌دهیم $\alpha = ۱^\circ, ۱۴', ۳۶''$ و $h = ۱۵۰۰$ متر به‌دست می‌آید

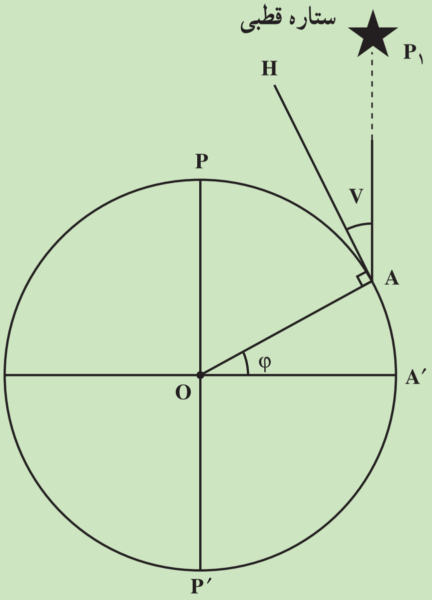
$$R = \frac{۱۵۰۰ \times Cos(۱^\circ, ۱۴', ۳۶'')}{۱ - Cos(۱^\circ, ۱۴', ۳۶'')} = ۶۳۶۹۵۱۱/۷۸ \text{ متر}$$

بحث و بررسی: با اندازه‌گیری زاویه شیب و ارتفاع محل می‌توان شعاع کره زمین را محاسبه کرد.

مثال ۸ــ۲: برای اندازه‌گیری عرض جغرافیایی محل A دوربین زاویه‌یاب را در نقطه A مستقر کرده و به ستاره قطبی نشانه روی می‌کنیم. زاویه ارتفاعی ستاره قطبی را اندازه‌گیری کرده و برابر $V = ۳۵^\circ, ۴۱'$ شده است عرض جغرافیایی را به‌دست آورید.

راهکار کلی: می‌دانیم ستاره قطبی تقریباً در امتداد محور کره زمین قرار دارد (حدود ۱ درجه از امتداد محور دورانی زمین انحراف دارد) و طبق شکل دو امتداد $AP_۱$ (امتداد نشانه روی) و OP (محور زمین) در فاصله بسیار دور را تقریباً با هم موازی در نظر می‌گیریم بنابراین دو زاویه $\hat{V}$ و $\hat{\varphi}$ با هم برابرند (زیرا اضلاع آن‌ها دو به‌دو بر هم عمودند $OA \perp HA$ شعاع در نقطه تماس با خط مماس

(AH) عمود است و امتداد $AP_۱$ بر OA' عمود است زیرا $OP \perp OA'$ عمود است بنابراین موازی آن یعنی $AP_۱ \perp OA'$ می‌باشد با اثبات $\hat{V} = \hat{\varphi}$ با اندازه‌گیری زاویه ارتفاعی ستاره قطبی عرض جغرافیایی محل (φ) به‌دست می‌آید.



شکل ۸ـ۹

روش حل: چون ثابت شد دو زاویه $\hat{\varphi} = \hat{V}$ برابرند در نتیجه عرض جغرافیایی محل A برابر با $۴۱'$ ، ۳۵° می‌باشد.

بحث و بررسی: روش بسیار خوب و ساده با تقریب ۱° برای به‌دست آوردن عرض جغرافیایی محل می‌باشد.

آیا می‌دانید

دانشمندان قدیم برای اندازه‌گیری محیط کره‌ی زمین و اندازه‌گیری قوس نصف‌النهار و هم‌چنین اندازه‌گیری طول و عرض جغرافیایی و برای ساختن اسطرلاب (ستاره‌یاب) و اندازه‌گیری ارتفاع خورشید و ستاره قطبی نیاز به دانستن نسبت محیط به قطر دایره را که همان عدد π می‌باشد داشتند.

۸ــ۵ــ محاسبه‌ی طول کمانی از دایره $C(O,R)$ مقابل به زاویه‌ی مرکزی α°

واضح است که طول کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی یک درجه برابر است با $\frac{۲\pi R}{۳۶۰}$ بنابراین،

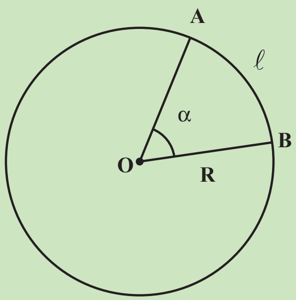
طول کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی α° برابر است با $\frac{۲\pi R\alpha}{۳۶۰}$ یا $\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰}$ در نتیجه طول کمان $l = \frac{\pi R\alpha^\circ}{۱۸۰}$

که α برحسب درجه است. اگر α را در عدد $\frac{۱۸۰}{\pi}$ ضرب کنیم برحسب رادیان می‌شود و رابطه‌ی

فوق به‌صورت : $\boxed{l = R\alpha}$ می‌گردد.

مثال ۸ــ۳: طول قوسی از مسیر را که به شکل کمانی از دایره به شعاع ۲۵ متر مقابل به زاویه مرکزی ′۴۰ ،°۲۳ قرار دارد به‌دست آورید.

راهکار کلی: مطابق شکل زیر شعاع دایره $OA = OB = R$ معلوم و زاویه مرکزی مقابل به کمان $\overset{\frown}{AB}$ یعنی α نیز معلوم است می‌خواهیم طول قوس $AB = l$ را به‌دست آوریم.



شکل ۸ــ۱۰

محیط دایره برابر است با $۲\pi R$ مقابل به زاویه ۳۶۰ درجه مرکزی می‌باشد بنابراین طول قوسی از دایره که مقابل به زاویه °۱ باشد برابر است با $\frac{۲\pi R}{۳۶۰}$ پس نتیجه می‌شود طول قوس مقابل به زاویه α° برابر است با

$$l = \frac{۲\pi R\alpha^\circ}{۳۶۰}$$ طول قوس دایره

(α) در این فرمول برحسب درجه است $l = \frac{\pi R\alpha^\circ}{۱۸۰}$ به عدد ۲ ساده می‌کنیم .

اگر α° را در عدد $\frac{۱۸۰}{\pi}$ ضرب کنیم برحسب رادیان می‌شود یعنی

(α بر حسب رادیان)

$$l = \left(\frac{\pi R\alpha^{\circ}}{۱۸۰}\right) \times \frac{۱۸۰}{\pi} = R\alpha \Rightarrow l = R\alpha$$

روش حل: زاویه $\alpha = ۲۳^{\circ}, ۴۰'$ را ابتدا به رادیان تبدیل می‌کنیم

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۱۸۰} \times D = \frac{\pi}{۱۸۰} \times (۲۳^{\circ}, ۴۰') = ۰/۴۱۳ \text{ رادیان}$$

$$l = R\alpha = ۲۵(۰/۴۱۳) = ۱۰/۳۲۵ \text{ متر}$$

بحث و بررسی: در نقشه برداری فرمول $l = R\alpha$ که α بر حسب رادیان است کاربرد زیادی در ژئودزی و مسیر دارد.

مثال ۸ـــ۴: تراز استوانه‌ای به شعاع ۱ متر در حد ۲ میلی‌متر مدرج شده است زاویه مرکزی روبرو به کمان ۲ میلی‌متر چند دقیقه است.

راهکار کلی: با استفاده از فرمول $l = R\alpha$ که در مسئله قبل ثابت شد مقدار $\alpha = \frac{l}{R}$ که l و R معلوم است و مقدار α بر حسب رادیان به‌دست می‌آید که آن‌را به‌وسیله رابطه $\left(\frac{D}{۱۸۰} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow D = \frac{۱۸۰\alpha}{\pi}\right)$ بر حسب درجه محاسبه می‌کنیم.

روش حل: طبق فرض $R = ۱ \text{ متر} = ۱۰۰۰ \text{ میلی‌متر}$ و $l = ۲ \text{ میلی‌متر}$ مقادیر معلوم فوق را در فرمول $\alpha = \frac{l}{R}$ قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود

$$\alpha = \frac{۲}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۵۰۰} \text{ رادیان}$$

$$D = \frac{۱۸۰\alpha}{\pi} = \frac{۱۸۰}{\pi} \times \frac{۱}{۵۰۰} = ۰/۱۱۴۵ \text{ درجه} = ۰^{\circ}, ۶', ۵۳'' \simeq ۷'$$

بحث و بررسی: کاربرد فرمول $l = R\alpha$ علاوه بر ژئودزی و مسیر حتی در تعیین دقت تراز و وسائل نقشه‌برداری به‌کار می‌رود.

آیا می‌دانید

مقدار عدد π را به صورت شعر نیز سروده‌اند :

گر ز قدر پی کنند از تو سؤال — پاسخی ده که خردمند تو را آموزد

خرد و بینش و آگاهی دانشمندان — ره سر منزل توفیق بما آموزد

تعداد حروف کلمه‌های بیت دوم شعر عدد پی را با ده رقم اعشار مشخص می‌کند.

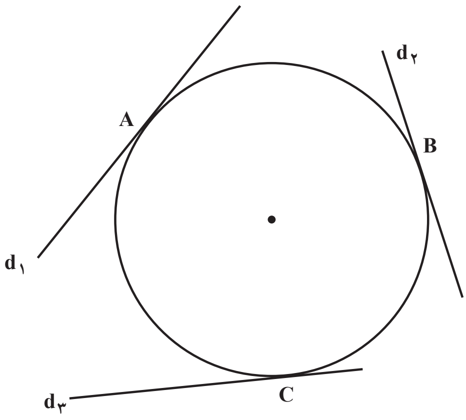
(خرد ≃ ۳، و ≃ ۱، بینش ≃ ۴، و ≃ ۱، آگاهی ≃ ۵، دانشمندان ≃ ۹، ره ≃ ۲، سر منزل ≃ ۶، توفیق ≃ ۵، بما ≃ ۳، آموزد ≃ ۵) و در مجموع داریم :

۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵

۸ــ۶ ــ قضایای کاربردی در نقشه‌برداری

هر خط که دایره را در یک نقطه قطع کند در آن دایره مماس است (شکل۸ ــ۱۱).

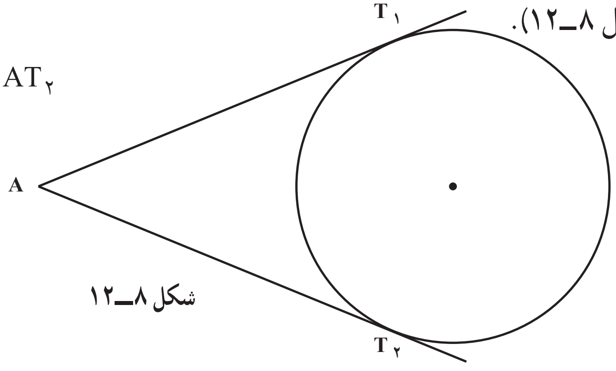
مانند خطوط : $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ که به ترتیب در نقـاط A، B و C بر دایره مماس می‌باشند.



شکل ۸ــ۱۱

از هر نقطه خارج از دایره فقط دو مماس می‌توان بر دایره رسم کرد (طول این دو مماس با هم برابرند.) (مانند شکل ۸ــ۱۲).

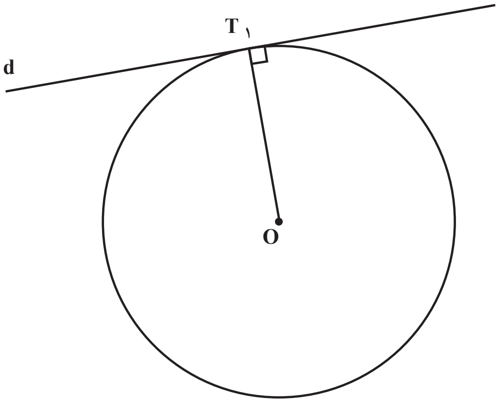
$AT_۱ = AT_۲$



شکل ۸ــ۱۲

شعاع نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است مانند شکل ۸ــ۱۳.

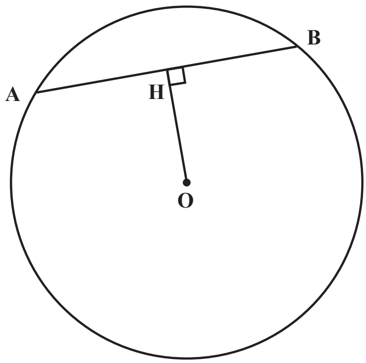
$OT_1 \perp d$



شکل ۸ــ۱۳

شعاع عمود بر وتر، وتر و کمان روبه‌رویش را نصف می‌کند مانند شکل ۸ــ۱۴.

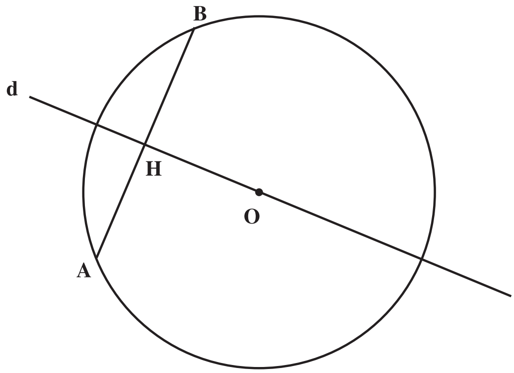
$OH \perp AB$ و $AH = HB$



شکل ۸ــ۱۴

عمود منصف هر وتر در دایره از مرکز دایره می‌گذرد مانند شکل ۸ــ۱۵.

O مرکز دایره است و $AH = HB$ و $d \perp AB$



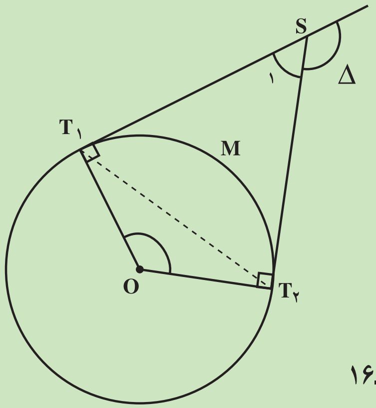
شکل ۸ــ۱۵

مثال ۸ــ۵: در شکل زیر زاویه انحراف $\Delta = ۱۲۴^\circ,۳۰'$ و شعاع دایره $R = ۷۴$ متر است و مماس‌های $ST_۱$ و $ST_۲$ بر دایره رسم شده است

اولاً : زاویه مرکزی $\angle T_۱OT_۲$ چقدر است؟

ثانیاً : زاویه‌ی ظلّی $\angle ST_۱T_۲$ را به‌دست آورید.

ثالثاً : طول قوس $\widehat{T_۱MT_۲}$ را محاسبه کنید.



شکل ۸ــ۱۶

راهکار کلی: اولاً : چون شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است بنابراین زوایای

$\hat{T}_۱ = \hat{T}_۲ = ۹۰^\circ$

در چهارضلعی محاطی $T_۱ST_۲O$ چون $\hat{T}_۱ = \hat{T}_۲ = ۹۰^\circ$ است نتیجه می‌شود $\boxed{\hat{O} + \hat{S}_۱ = ۱۸۰}$

رابطه ۱ و هم‌چنین رابطه ۲ $\hat{S}_۱ + \Delta = ۱۸۰^\circ$ (زیرا دو زاویه مجانب هستند)

از دو رابطه ۱ و ۲ نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} \hat{O}+\hat{S}_1=180^\circ \\ S_1+\Delta=180^\circ \quad \Rightarrow \hat{O}+\hat{S}_1=\hat{S}_1+\hat{\Delta} \Rightarrow \boxed{\hat{O}=\hat{\Delta}} \end{cases}$$

ثانیاً : زاویه ظلّی $\angle S\hat{T}_1T_2$ طبق قضیه برابر است با نصف کمان مقابلش (زاویه مرکزی $\hat{O}$ برابر است با اندازه کمان مقابلش)

$$\angle ST_1T_2=\frac{\overset{\frown}{T_1T_2}}{2}=\frac{\hat{O}}{2}$$

ثالثاً : طبق فرمول $l=R\alpha$ با معلوم بودن شعاع و زاویه مرکزی طول قوس l محاسبه می‌شود.

روش حل: جواب اولاً : ثابت شد زاویه انحراف با زاویه مرکزی $\hat{O}$ برابر است

$$\angle T_1OT_2=\hat{O}=\hat{\Delta}=124^\circ,30'$$

جواب ثانیاً : چون زاویه ظلّی برابر با نصف کمان مقابلش می‌باشد

$$\angle ST_1T_2=\frac{\overset{\frown}{T_1MT_2}}{2}=\frac{\hat{O}}{2}=\frac{124^\circ,30'}{2}=62^\circ,15'$$

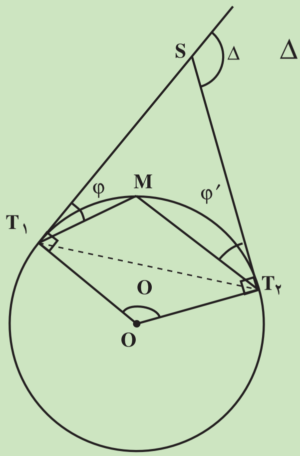
جواب ثالثاً : در فرمول $l=R\alpha$ متر $R=74$ و $\hat{\alpha}=\hat{O}=124^\circ,30'$ زاویه α را برحسب رادیان به‌دست می‌آوریم

$$\frac{D}{180^\circ}=\frac{\alpha}{\pi}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{180^\circ}\times D=\frac{\pi}{180^\circ}\times(124^\circ,30')=2/17 \text{ رادیان}$$

طول قوس مسیر متر $l=R\alpha=74\times2/17=160/58$

بحث و بررسی: از این روش می‌توان پارامترهای یک قوس مسیر را به‌دست آورد.

مثال ۸ــ۶: در شکل روبه‌رو زاویه انحراف $\Delta=27^\circ,32'$ و زاویه‌ی $\varphi=10^\circ,18'$ می‌باشد مطلوبست محاسبه زاویه $\varphi'=\angle MT_2S$



شکل ۸ــ۱۷

راهکار کلی: زاویه مرکزی $\hat{O}$ را رسم می‌کنیم در مثال‌های قبل ثابت کردیم زاویه مرکزی $\hat{O}$ با زاویه انحراف $\hat{\Delta}$ برابر است و برابر نصف کمان مقابلش می‌باشد

$$\hat{O}=\hat{\Delta}=\frac{\overset{\frown}{T_۱MT_۲}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{T_۱M}+\overset{\frown}{MT_۲}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{T_۱M}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{MT_۲}}{۲}$$ رابطه ۱

از طرف دیگر زاویه ظلّی برابر نصف کمان مقابلش پس نتیجه می‌شود $\varphi'=\frac{MT_۲}{۲}$ در رابطه ۱ به‌جای $\frac{\overset{\frown}{MT_۲}}{۲}$ مساویش φ' را قرار می‌دهیم

$$\hat{\Delta}=\frac{\overset{\frown}{T_۱M}}{۲}+\varphi' \Rightarrow \boxed{\frac{\overset{\frown}{T_۱M}}{۲}=\Delta-\varphi' \text{ رابطه ۲}}$$

هم‌چنین زاویه φ زاویه ظلّی است برابر با نصف کمان روبه‌روی خود می‌باشد

$$\varphi=\frac{\overset{\frown}{T_۱M}}{۲}$$ رابطه ۳

رابطه ۳ را در رابطه ۲ قرار می‌دهیم

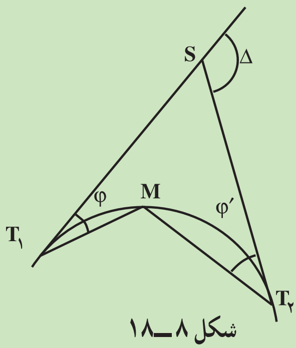
$$\varphi=\Delta-\varphi' \Rightarrow \hat{\varphi}'=\hat{\Delta}-\hat{\varphi}$$

با داشتن Δ و φ زاویه φ' به‌دست می‌آید.

روش حل: با داشتن مقادیر معلوم $\varphi=۱۰^\circ,۱۸'$ و زاویه انحراف $\Delta=۲۷^\circ,۳۲'$ از فرمول اثبات شده $\hat{\varphi}'=\hat{\Delta}-\hat{\varphi}$ مقدار φ' به‌طریق زیر به‌دست می‌آید

$$\varphi'=۲۷^\circ,۳۲'-۱۰^\circ,۱۸'=۱۷^\circ,۱۴'$$

بحث و بررسی: با این روش برای پیاده کردن نقاط قوس مسیر دایره شکل روش تقاطع دو دستگاه دوربین زاویه‌یاب که یکی در نقطه $T_۱$ و دیگری در نقطه $T_۲$ مستقر می‌کنیم و با داشتن زاویه‌های φ و φ' نقطه مجهول M از قوس پیاده می‌گردد.



شکل ۸ــ۱۸

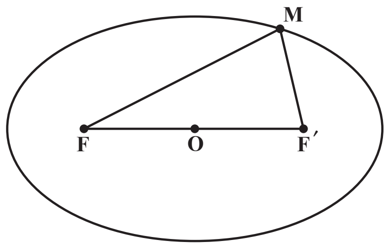
۸ـ۷ـ بیضی (Ellipse)

تعریف بیضی: بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که مجموع فاصله‌های هریک از آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت آن صفحه، مقدار ثابتی باشد.

در شکل ۸ـ۱۹ هر یک از دو نقطه‌ی ثابت را یک «کانون بیضی» و فاصله‌ی دو کانون را «فاصله‌ی کانونی بیضی» می‌نامیم. کانون‌های بیضی را معمولاً با دو حرف F و 'F و فاصله‌ی کانونی را با ۲C نشان می‌دهیم : $FF' = ۲C$

مجموع فاصله‌های هر نقطه‌ی بیضی را از دو کانون که مقدار ثابتی است با ۲a نمایش می‌دهیم. پس اگر نقطه‌ی M از صفحه به بیضی تعلق داشته باشد، داریم $MF + MF' = ۲a$ ، دو خط MF و 'MF را «شعاع‌های حامل نقطه‌ی M» یا «شعاع‌های کانونی نقطه‌ی M از بیضی» می‌نامیم.

از تعریف بیضی نتیجه می‌گیریم که : $a > c$ است.

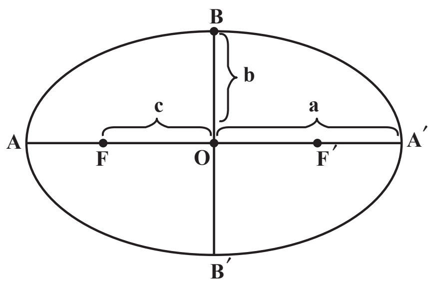


شکل ۸ـ۱۹

پارامترهای بیضی: در بیضی شکل ۸ـ۲۰ فاصله‌ی 'AA را «قطر بزرگ» یا «اطول بیضی» گویند که مقدار آن برابر است با۲a ، $AA' = ۲a$ (قطر کانونی). فاصله‌ی 'BB را «قطر کوچک» یا «قطر اقصر بیضی» می‌گویند. مقدار آن مساوی است با : ۲b ، $BB' = ۲b$ (قطر غیرکانونی).

فاصله‌ی 'FF را «فاصله‌ی کانونی بیضی» گویند که مقدار آن برابر است با : ۲c،$FF' = ۲c$

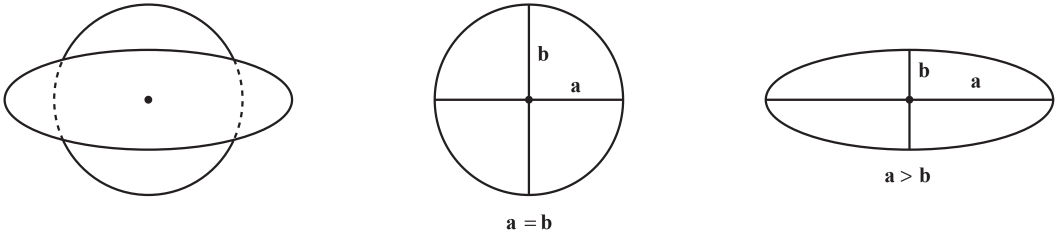
رابطه‌ی $a^۲ = b^۲ + c^۲$ همواره بین پارامترهای بیضی برقرار است.



شکل ۸ـ۲۰

فشردگی بیضی: اگر دایره‌ای را در راستای یک قطرش فشار دهیم (یا بکشیم) شکل دایره تبدیل به بیضی می‌شود.

میزان این فشردگی برابر است با اختلاف نسبی دو شعاع حداکثر (a) و حداقل (b) که مطابق شکل ۸ــ۲۱ برهم عمودند.



فشردگی $f = \frac{a-b}{a} = ۱ - \frac{b}{a}$

شکل ۸ــ۲۱

بنابراین فشردگی دایره برابر صفر است.

مثال: فشردگی زمین را برای بیضوی مبنای WGS84 در صورتی که شعاع زمین در استوا $a = ۶۳۷۸۱۳۷$ و در قطبین $b = ۶۳۵۶۷۵۲/۳۸۲$ باشد محاسبه کنید.

$$f = ۱ - \frac{b}{a} = ۱ - \frac{۶۳۵۶۷۵۲/۳۸۲}{۶۳۷۸۱۳۷} \simeq \frac{۱}{۳۰۰}$$

خروج از مرکز بیضی: معیار دیگری که برای فشردگی بیضی در محاسبات هندسی به کار می‌رود، خروج از مرکز می‌باشد که آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

خروج از مرکز $e = \frac{c}{a}$

رابطه‌ی $e^۲ = \frac{a^۲ - b^۲}{a^۲}$

چون $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e^۲ = \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{a^۲ - b^۲}{a}$

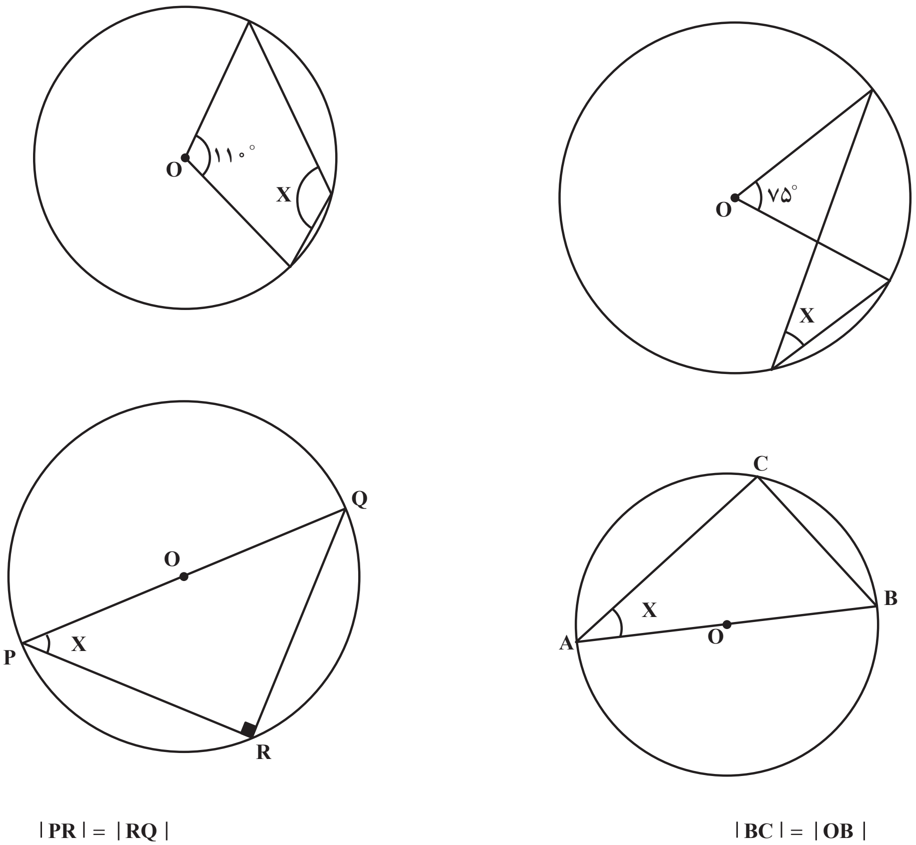
تذکر: $c^۲ = a^۲ - b^۲$ $\qquad \Rightarrow e = \sqrt{\frac{a^۲ - b^۲}{a^۲}} = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}}$

تمرین: خروج از مرکز را برای مثال بالا محاسبه نمایید.

خودآزمایی

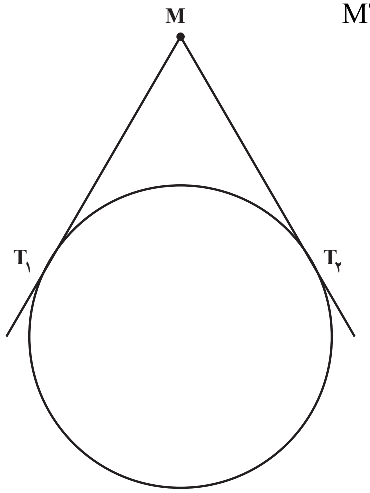
۱ــ دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر رسم و وتری به‌طول ۷ سانتی‌متر جدا کنید ؛ سپس قطر AB را به دل‌خواه رسم نموده از نقطه‌ی M روی دایره خارج از قطر به دو سر AB وصل کنید. زاویه‌ی AMB # چند درجه است؟ چرا؟

۲ــ در هریک از شکل‌های زیر مقدار زاویه‌ی x را بیابید :



شکل ۸ــ۲۲

۳ــ از نقطه‌ی M شکل ۸ــ۲۳ دو خط $MT_۱$ و $MT_۲$ را بر دایره‌ی O مماس کرده‌ایم. ثابت کنید $MT_۱ = MT_۲$

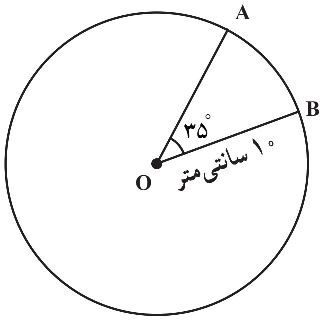


شکل ۸ــ۲۳

۴ــ طول پاره‌خط AB را به اندازه‌ی ۸ سانتی‌متر رسم کنید و کمان درخور زاویه‌ی ۳۰ درجه را روی آن ترسیم نمایید.

۵ ــ مثلث ABC را طوری رسم نمایید که طول BC، ۵ سانتی‌متر و زاویه‌ی $\hat{A} = ۶۰^\circ$ و ارتفاع وارد بر ضلع BC، ۳ سانتی‌متر باشد.

۶ــ در یک دایره به شعاع ۱۰ سانتی‌متر طول کمان مقابل به زاویه‌ی ۳۵° (شکل ۸ــ۲۴) چند سانتی‌متر است؟



شکل ۸ــ۲۴

۷ــ در یک دایره به شعاع ۱۰۰ متر، زاویه‌ی روبه رو به کمانی از این دایره که طول آن ۵ متر است، چند رادیان و چند درجه است؟

۸ ــ در شکل ۸ ــ ۲۵ از نقطه‌ی S مماس‌های $ST_۱$ و $ST_۲$ بر دایره به مرکز O، به شعاع R

رسم شده است. اگر زاویه‌ی انحراف $\Delta = ۱۲۰^\circ$ باشد،

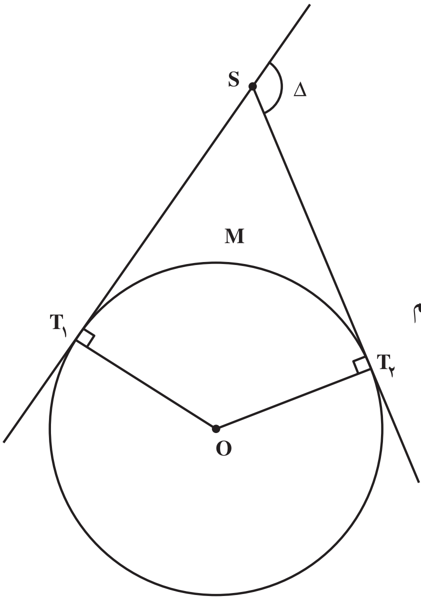
اولاً : زاویه‌ی $\angle T_۱OT_۲$ چه‌قدر است؟

ثانیاً : زاویه‌ی ظلّی $\angle ST_۱T_۲$ را به‌دست آورید.

ثالثاً : اگر شعاع دایره، $R = ۱۵۰$ متر باشد طول

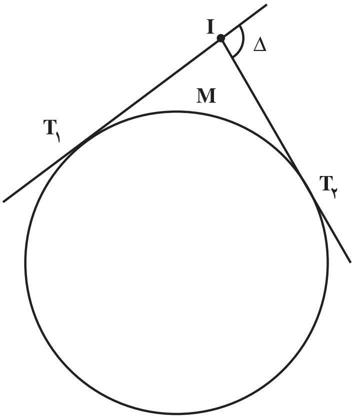
قوس $\widehat{T_۱MT_۲}$ را محاسبه کنید.

راهنمایی: هر دو زاویه که اضلاع آن دوبه‌دو برهم عمود باشند مساویند.



شکل ۸ــ۲۵

۹ــ از نقطه‌ی I شکل **۸ــ۲۶** مماس $IT_۱$ و $IT_۲$ را بر دایره‌ای به شعاع **۲۵۰** متر رسم کرده‌ایم. اگر زاویه‌ی انحراف $\Delta = ۱۱۰^\circ, ۳۰'$ باشد مطلوب است محاسبه‌ی طول مماس $IT_۱$ و اندازه‌ی کمان $\widehat{T_۱MT_۲}$.

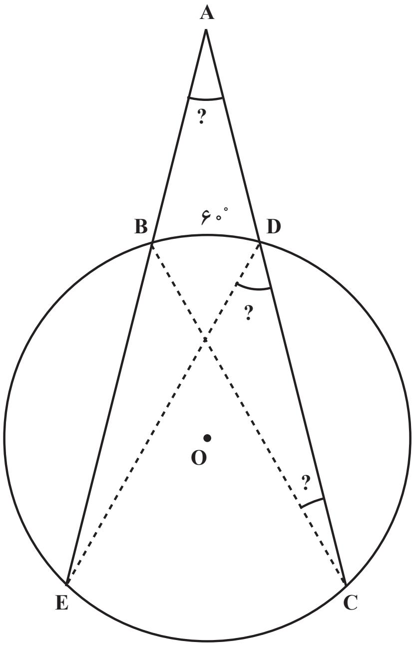


شکل ۸ــ۲۶

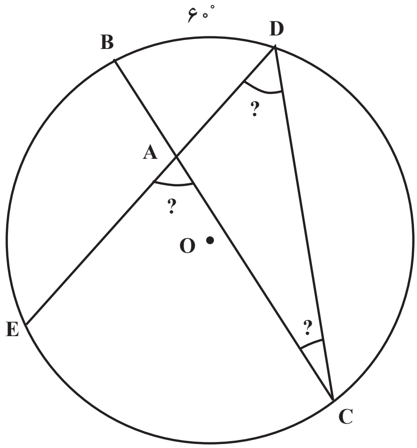
۱۰ــ در شکل‌های ۸ــ۲۷ و ۸ــ۲۸، دو وتر BC و DE یکدیگر را در نقطه‌ی A قطع کرده‌اند و $\widehat{BD} = ۶۰^\circ$ و $\widehat{CE} = ۱۰۰^\circ$.

اولاً هر یک از دو زاویه‌ی C و D چند درجه است؟

ثانیاً مقدار زاویه‌ی خارجی EAC از مثلث ADC چند درجه است؟



شکل ۸ـــ۲۸

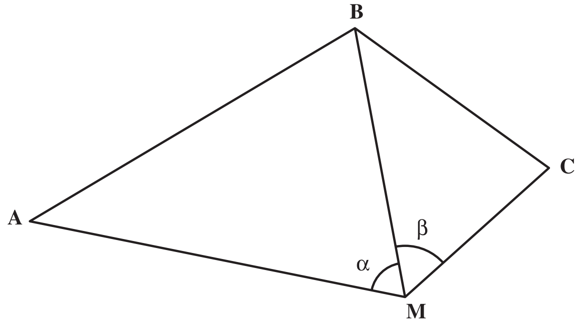


شکل ۸ـــ۲۷

آیا می‌دانید

ابوریحان بیرونی در تعریف دایره از فصل نخست کتاب التفهیم آورده است: «دایره چیست؟ شکلی است بر سطحی که گرد بر گرد او خطی بود که نام او محیط است و به میان او نقطه‌ای است که او را مرکز گویند و همه‌ی خط‌های راست که از مرکز بیرون آیند و به محیط رسند، هم چند (مساوی) یکدیگر باشند.»

۱۱ــ مطابق شکل ۸ــ۲۹ سه نقطه‌ی A ، B و C روی نقشه مفروض‌اند. می‌خواهیم محل نقطه‌ی M را طوری تعیین کنیم که $\angle AMB=\alpha$ و زاویه‌ی $\angle BMC=\beta$ شود. روش ترسیمی را برای به‌دست آوردن نقطه‌ی M شرح دهید ؛ سپس سه نقطه‌ی A ، B و C که در یک امتداد نباشند در روی کاغذ درنظر بگیرید. اگر $\alpha=۳۰^\circ$ و $\beta=۲۲^\circ ، ۳۰'$ باشد محل نقطه‌ی M را به روش ترسیم به‌دست آورید.



شکل ۸ــ۲۹

۱۲ــ بیضی‌ای که اندازه‌ی قطرهای آن به‌ترتیب ۶ و ۴ سانتی‌متر باشد رسم کنید (درصورتی‌که مرکز بیضی بر مبدأ مختصات و محورهای بیضی بر محورهای مختصات منطبق باشند) ؛ سپس فشردگی و خروج از مرکز بیضی را به‌دست آورید.

۱۳ــ در حوضی به شکل بیضی که نصف قطر بزرگ آن متر $a=۵$ و فاصله‌ی دو کانون بیضی ۶ متر است،

اولاً : نصف قطر کوچک آن را حساب کنید.

ثانیاً : روش ترسیم و پیاده‌کردن آن را بیان نمایید.

ثالثاً : فشردگی و خروج از مرکز بیضی را حساب کنید.

۱۴ــ در یک باغچه به شکل بیضی که قطرهای آن به‌ترتیب ۲۰ و ۱۲ متر است،

اولاً : فاصله‌ی کانونی آن‌را به‌دست آورید.

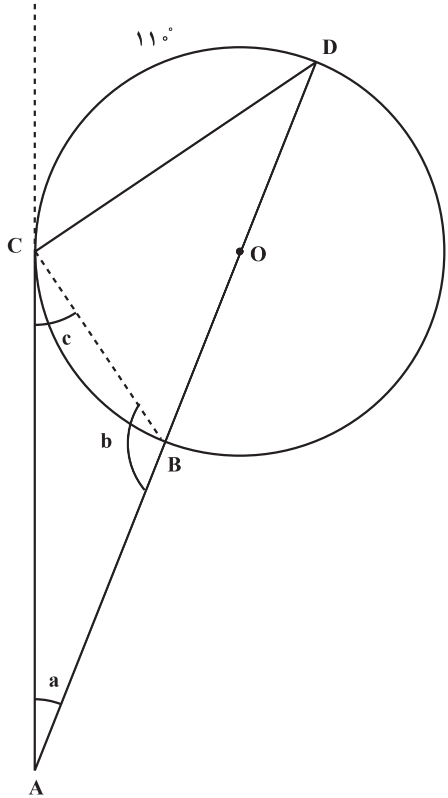
ثانیاً : خروج از مرکز آن را به‌دست آورید.

ثالثاً : مساحت بیضی را محاسبه نمایید.

۱۵ــ در یک بیضی هایفورد $a=۶۳۷۸۲۴۹$ و متر $b=۶۳۵۶۵۱۵$ است. فشردگی و خروج از مرکز آن را حساب کنید.

۱۶ــ اگر شعاع کره‌ی زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد، طول کمان یک درجه، یک دقیقه و یک ثانیه در روی زمین را به دست آورید.

۱۷ــ در شکل ۸ ــ ۳۰ مقدار زوایای a، b و c را به دست آورید. (خط AC بر دایره در نقطه‌ی C مماس است.)



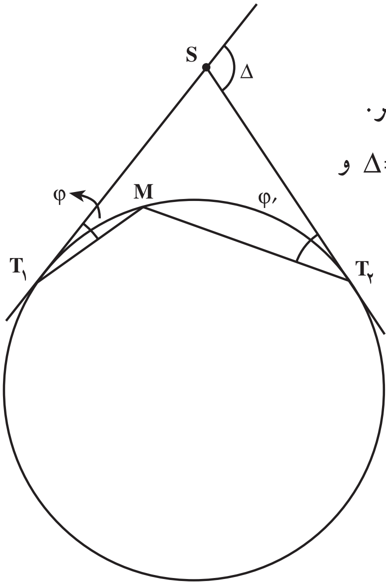
شکل ۸ ــ ۳۰

مسائل

مسأله‌ی ۱

موضوع: محاسبه‌ی یک زاویه از روی زوایای دیگر.

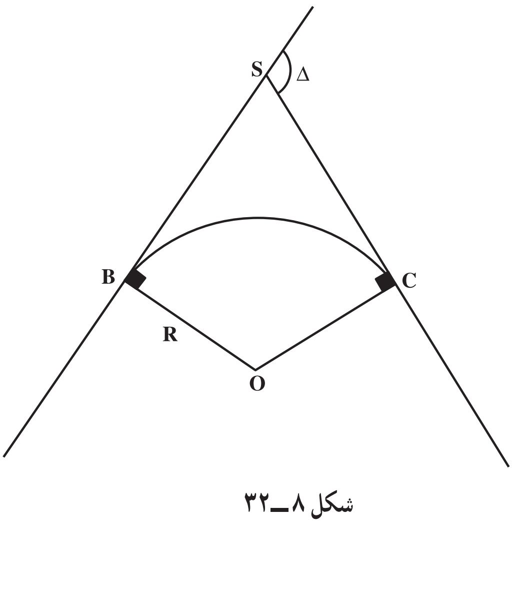
در این شکل ۸ــ۳۱ زاویه‌ی انحراف $\Delta = 36^\circ\ ,\ 25'$ و زاویه‌ی $\varphi = 12^\circ\ ,\ 18'$ نشان داده شده است. مطلوب است محاسبه‌ی زاویه‌ی φ'، $\hat{\varphi}' = M\hat{T}_2 S$.



شکل ۸ــ۳۱

مسأله‌ی ۲

موضوع: الف) محاسبه‌ی زاویه‌ی مرکزی برحسب زاویه‌ی انحراف Δ، ب) محاسبه‌ی طول قوس $\overset{\frown}{BC}$. در صورتی‌که زاویه‌ی انحراف $\Delta = 24^\circ, 30'$ و شعاع قوس ۴۲/ ۳۵متر باشد (شکل ۸ــ۳۲).



شکل ۸ــ۳۲

کارگروهی دانش‌آموزان

دانش‌آموزان هرگروه برای خود یک سرگروه تعیین کنید. هر یک اعضای درس را برای اعضاء بازگو کنند با دریافت تعدادی سؤال از هر یک از اعضاء، از گروه آزمون پیشرفت برگزار کنید، سؤالات را با همکاری یکدیگر تصحیح کرده و میزان یادگیری اعضاء را ارزیابی کنید.

مطالعه‌ی آزاد

نکته: آقای غیاث‌الدین جمشید کاشانی، معروف به جمشید کاشی بر نیمکت راهروی دادگاه غمگین نشسته است. قرار است دقایقی دیگر در حالی که لباس زندان بر تن دارد، برود و از خود دفاع کند. اما بهتر است که به او نخندید که مثلاً چه دفاعی؟ این را هم می‌دانیم، اما اتفاق است خبر که نمی‌کند آدم هم آدم است یک وقت دیدی خودت جای او قرار گرفتی. سراغش می‌روم و بعد از کلی تعارف و استدلال امیدوارش می‌کنم به این که بتواند از دادگاه تخفیف بگیرد. راضی که می‌شود، مصاحبه را شروع می‌کنم:

ــ آقای غیاث‌الدین جمشید کاشانی! آیا بهتر نیست شما قبل از آن که وصیت خود و آخرین حرف‌تان را در محضر عدالت بگویید، برای خواننده‌های ما توضیح بدهید که جرم‌تان چیست؟

ــ جرم من شکنجه بیش از حد است!

ــ اگر امکان دارد بیش‌تر توضیح بدهید. چه کسی را شکنجه کرده‌اید و هدف شما چه بوده است؟

ــ من یک زبان بسته را شکنجه کرده‌ام به خاطر این که محاسبات ریاضی‌دان‌ها دقیق شود، عدد زبان بسته‌ی پی (π).

ــ از نوع پاسخ‌دادن‌تان مشخص است که هنوز نسبت به این زبان بسته دشمنی دارید.

ــ بله درست است. به ما طوری یاد داده‌اند که این اعداد، شوم و نحس‌اند و بدبختی می آورند.

ــ چه کسانی؟

ــ استادهای ریاضی‌دان ما.

ــ اگر امکان دارد داستان را از اول برای ما تعریف کنید.

جمشید به این جا که رسید آهی کشید در فکر فرو رفت و این‌طور گفت :

ــ ببینید همه ما می‌دانیم در طبیعت، انسان چیزهایی تکراری می‌بیند، مثلاً دو تا، سه تا یا چند تا از هر چیز، سرتان را درد نیاورم مصری‌ها اعداد خرده را هم وارد معامله کردند. آن‌ها به همه اطمینان دادند که عدد لازم نیست همیشه صحیح باشد بلکه روی خرده‌ی اعداد هم می‌شود حساب کرد و خودتان می‌دانید که کسر را اختراع کردند.

یک پرتقال برای دو نفر یعنی یک تقسیم بر دو، به هر کدام چقدر می‌رسد؟

یک قسمت از دو قسمت ؛ پس کسر از تقسیم درست شد.

پس هر عدد درسته را هم می‌شود خردش کرد مثل صدتومانی که به پنج تا بیست‌تومانی یا چهار سکه بیست و پنج تومانی خرد می‌شود. این‌طوری همه‌ی اعداد را خرد و حقیر کردند. مثلاً اندازه‌ی محیط مربع نسبت به یک ضلعش چقدر است؟ همه می‌دانید ۴.

$$۴ = \frac{\text{اندازه‌ی محیط مربع}}{\text{اندازه‌ی ضلع مربع}}$$

یا اندازه‌ی مساحت مربع نسبت به ضلعش چقدر است؟ می‌شود خود ضلع.

$$\text{اندازه‌ی ضلع مربع} = \frac{\text{اندازه‌ی مساحت مربع}}{\text{اندازه‌ی ضلع مربع}}$$

یک روز یک معلم باهوش چینی برای تنبیه شاگردانش به آن‌ها مسأله‌ای داد که در هیچ کتابی قبل از آن نیامده بود اول کلی توضیح داد تا بچه‌ها را قانع کرد که دایره یک شکل گوگولی و ناز است چرا؟ چون تناسب اندام دارد (مثل خود چینی‌ها!). پس همه‌ی

دایره‌ها باید اندازه‌ی محیط‌شان به قطرشان نسبت ثابتی داشته باشد. چرا مربع داشته باشد و دایره نداشته باشد؟ پس اگر هر دایره‌ای را به همان اندازه که دلمان بخواهد بکشیم و محیط و قطرش را اندازه بگیریم و اندازه‌ی محیط را بر اندازه‌ی قطر تقسیم کنیم یک عدد ثابت می‌شود که بعدها یونانی‌ها این عدد ثابت را پی π نامیدند.

$$\pi = \frac{\text{اندازه‌ی محیط دایره}}{\text{اندازه‌ی قطر دایره}}$$

یعنی دیگر می‌دانیم قطر هر دایره را باید چند برابر کنیم تا محیط آن را به دست آوریم و برعکس اگر محیط دایره را داشته باشیم تقسیم بر چند کنیم تا اندازه‌ی قطرش را بفهمیم که البته معمولاً دومی، سخت‌تر می‌شود. سپس جمشید گفت: آن معلم چینی نمی‌دانست چه کار مهمی کرده است هر چند چینی‌ها همیشه فکر می‌کردند جواب ۳/۵ است. یونانی‌ها هم به دنبال این عدد گشتند اما هیچ کس مثل من شانس نیاورد. ما خیلی این در و آن در زدیم تا این که بالاخره گیر افتاد. من این عدد گم شده‌ی زبان بسته را تنها که گیر آوردم با ترفندهایی شکنجه کردم و از زیر زبانش حرف کشیدم.

ــ می‌شود بهتر توضیح بدهید؟

ــ ترفندهای مرا شما نمی‌فهمید فقط ریاضی‌دان‌ها می‌فهمند اما سعی می‌کنم اهمیت و هیجان داستان را کمی بیش‌تر به شما نشان دهم.

ــ خب حالا توضیح بدهید شما چه کاری انجام داده‌اید؟

ــ بنده ارقام عدد π را آن قدر دقیق حساب کردم که سه قرن بعد از من کسی نتوانست آن را دقیق‌تر کند.

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳$$

ــ ریاضی‌دان‌ها کلاً چه مدت این عدد را شکنجه داده‌اند؟

ــ این‌طور نمی‌شود جواب داد فقط می‌توان گفت هزار سال که روی شاخش است.

ــ به عنوان آخرین حرف یا وصیت چه چیزی برای گفتن دارید؟

ــ می‌خواستم به دیگران بگویم زرنگی هم حدی دارد، اما زیبایی نه، ریاضی گرچه حیله است اما از بس زیباست هیچ کس نمی‌تواند بعد از آن که دچارش شد یا

آلوده‌اش شد، ترکش کند. من هم نمی‌توانم به عنوان حرف آخر از کسانی که بعد از من به این دام می‌افتند می‌خواهم اگر خواستند از این‌گونه اعداد حرف بکشند بدانند چه سؤالاتی باید بپرسند که این طوری نه وقت خودشان را تلف کنند و نه جان و عمر آن بیچاره‌ها را.

من کم‌کم با غیاث‌الدین جمشید خداحافظی می‌کنم و او را با اتهاماتش تنها می‌گذارم بالاخره او احتیاج به تفکر دارد تا برای دفاع در دادگاه خود را آماده کند.

منبع : ماجراهای حسابی

سرگذشت : پیدایش اعداد

نویسنده : امید وهابی املشی

منابع فارسی

هندسه، تألیف، سرژلانگ جین مورو، ترجمه‌ی دکتر محمدعلی رضوانی.
دایرةالمعارف هندسه، تألیف محمدهاشم رستمی.
هندسه، سال دوم ریاضی فیزیک دبیرستان، تألیف احمد بیرشک و محمدطاهر معیری.
هندسه، سال دوم تجربی، تألیف محمود فصیحیان و محمود کرباسی.
هندسه، نظام جدید آموزش متوسطه سال اول، مؤلفان : زهرا گویا و سهیلا غلام‌آزاد.
هندسه، مقدمات ترسیم فنی، مؤلف : احمد متقی‌پور.
ریاضیات ۱ و ۲، نظام جدید آموزش متوسطه سال اول، مؤلف : دکتر اسماعیل بابلیان.
ریاضی، سال دوم راهنمایی، تألیف گروه ریاضی دانشگاه مشهد.
هندسه، رشته‌ی علوم ریاضی مراکز تربیت معلم، مؤلف : صفر باهمّت شیروانه‌ده.
هندسه، سال چهارم ریاضی فیزیک
هندسه، سال سوم علوم تجربی، مؤلفان : محسن حسام‌الدین و محمدهادی شهرستانی.
ریاضیات ۳ و۴، نظری و فنی و حرفه‌ای، مؤلفان : دکتر اسماعیل بابلیان و میرزا جلیلی.
هندسه‌ی تحلیلی، سال چهارم ریاضی فیزیک، مؤلفان : حسین غیور ــ حسین مجذوب‌زنجانی.
هندسه‌ی ۲، نظری، رشته‌ی ریاضی فیزیک سال دوم، مؤلفان : زهرا گویا و سهیلا غلام‌آزاد.
ریاضی سال اول، دوره‌ی راهنمایی، مؤلفان : گروه ریاضی دانشگاه مشهد.
ریاضی سال سوم، دوره‌ی راهنمایی، مؤلفان : گروه ریاضی دانشگاه مشهد.
ریاضیات عالی برای نقشه‌برداری، نویسنده غلامرضا نخعی‌زاده.

جزوه‌ی نقشه‌برداری مسیر، مؤلف : سلطان‌محمود کریمی.
نقشه و نقشه‌برداری، سازمان نقشه‌برداری کشور، مؤلفان : علی اسلامی‌راد و بابک شمعی.
مبانی نقشه‌برداری، نظام جدید متوسطه، فنی و حرفه‌ای، مؤلف : دکتر بهمن مقرب‌نیا.
نقشه‌برداری ۱، فنی و حرفه‌ای (گروه عمران)، مؤلفان : شمس نوبخت و یحیی مهرپویان.
نقشه‌برداری، تألیف مهندس شمس نوبخت.
نقشه‌برداری جدید، جلد ۱ و۲، تألیف دکتر حسن شمسی.
ژئودزی، تألیف مهندس علی نوری.
نقشه‌برداری معدن، سال سوم هنرستان، مؤلف : رحمت‌الله استوار.
ژئودزی ماهواره‌ای، تألیف مهندس علی نخلستانی.
مقدمه‌ای بر نجوم عالی، تألیف عباس ریاضی‌کرمانی.
مبانی حساب و دیفرانسیل و انتگرال، گرانویل، ترجمه‌ی محمود آق اولی.
عکاسی ۱، فنی و حرفه‌ای (گروه هنر) مؤلف : مجتبی آقایی سربرزه.
هیئت، سال پنجم ریاضی، مؤلف : سیدباقر هیوی.
نقشه‌برداری مقدماتی، تألیف دکتر قدرت‌الله تمدنی.
مسئله‌های تاریخی ریاضیات، ترجمه‌ی پرویز شهریاری.
هندسه‌ی دلپذیر، تألیف دکتر احمد شرف‌الدین.
هندسه‌ی مثلث‌ها، ترجمه‌ی ابوالقاسم قربانی.
مجلات نقشه‌برداری، نشریه‌ی علمی و فنی سازمان نقشه‌برداری.
کاتالوگ شرکت‌های لایکا ــ سوکیشا ــ پنتاکس ــ زایس. کرِن ــ نیکون،تاپ کن.
نقشه‌برداری، سال چهارم هنرستان، بهداشت محیط، مؤلف : بهمن مقرب‌نیا.

منابع خارجی

1 - A text book of Advanced Surveying Jawahar |a| sharma.

2 - A text book of Surveying a levelling R. A GOR 1994.

3 - Surveying volume 1 Dr K.R. ARORA.

4 - Surveying NARINDER SiNGH 1982.

5 - A text book of Surveying J. KAUSHIK 1988.

6 - ELEMENTARY SURVEYING Seventh Edition Russell C. Brinker paul Woif.

7 - Surveying JACK B. evtt.

8 - Site Surveying and Levelling John Clancy.