فصل اوّل

یادآوری

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ اصطلاحات، تعریف مفاهیم اولیه، گزاره، برهان، قضیه، اصل و مکان هندسی را توضیح دهد.

۲ــ زاویه را تعریف کند و انواع آن را توضیح دهد.

۳ــ حالات دو زاویه‌ی نسبت به‌هم را نام برده هریک را شرح دهد و خاصیت آن‌ها را بیان کند.

۴ــ واحدهای زاویه را نام برده، هر یک را تعریف کند ؛ هم‌چنین هر واحد را به واحدهای دیگر تبدیل نماید.

۵ــ فرجه و مسطحه‌ی فرجه را تعریف کند.

۶ــ شرط عمود بودن دو صفحه را توضیح دهد.

۷ــ عمود و مایل را در صفحه تعریف کند و قضایای مربوط به آن را بیان کرده فاصله‌ی نقطه تا خط را توضیح دهد.

۸ــ عمود و مایل در فضا را تعریف کرده شرط عمود بودن خط بر یک صفحه را توضیح دهد.

۹ــ مثلث را تعریف کند.

۱۰ــ انواع مثلث را توضیح دهد.

۱۱ــ مثال‌های حل شده در این فصل را فرابگیرد.

۱ــ۱ــ کلیات

برای شناخت هندسه باید با این نکات آشنا شد :

تعریف: تعریف مفهوم هندسی یعنی شناساندن آن به دیگران ؛ به گونه‌ای که صفات و ویژگی آن مفهوم را بتوان به اندازه‌ی لازم و کافی بیان نمود. از خصوصیات مهم هر تعریف آن است که جامع و مانع باشد.

مفاهیم اولیه یا تعریف نشده: هرتعریف با استفاده از مفاهیم تعریف‌های قبلی بیان می‌شود. برای مثال، درتعریف دو زاویه‌ی مجاور لازم است از قبل تعریف زاویه‌ی ضلع، صفحه و نظایر آن را بدانیم. بدین ترتیب، هرتعریف به یک یا چند تعریف قبلی بستگی دارد. بعضی از تعریف‌ها تعریف قبلی ندارند و خود اولین تعریف هستند. این‌گونه موارد را «تعریف نشده» می‌نامیم و بدون تعریف آن‌ها را می‌پذیریم. هر مفهوم تعریف نشده را «مفهوم اولیه» یا «مفهوم نخستین» می‌گویند ؛ مانند : نقطه، خط، صفحه و فضا.

گزاره: هر جمله‌ی خبری را «گزاره» می‌گویند. گزاره ممکن است به‌صورت درست و نادرست یا شرطی بیان شود. برای نمونه : مجموع دو عدد ۵ و ۷ عدد «۱۲» است (گزاره‌ی درست). حاصل‌ضرب دو عدد ۴ و ۵ عدد «۲۵» است (گزاره‌ی نادرست). اگر درس بخوانیم در آینده فرد مفیدی خواهیم شد (گزاره‌ی شرطی).

برهان: «برهان» عبارت است از استدلال برای اثبات درستی گزاره از طریق گزاره‌هایی که قبلاً درستی آن‌ها پذیرفته شده است.

قضیه: در هر گزاره‌ای که برای اثبات درست بودنش از برهان استفاده شود «قضیه» نامیده می‌شود. هر قضیه شامل دو قسمت : «فرض» و «حکم» است. قسمت نخست فرض قضیه، گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

قسمت دوّم حکم یا نتیجه‌ی قضیه، گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آن‌ها را می‌خواهیم ثابت کنیم ؛ مانند : «هر نقطه‌ی واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است» که قسمت اوّل (هر نقطه واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط) «فرض قضیه» و قسمت دوّم (از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است) «حکم یا نتیجه‌ی قضیه» است.

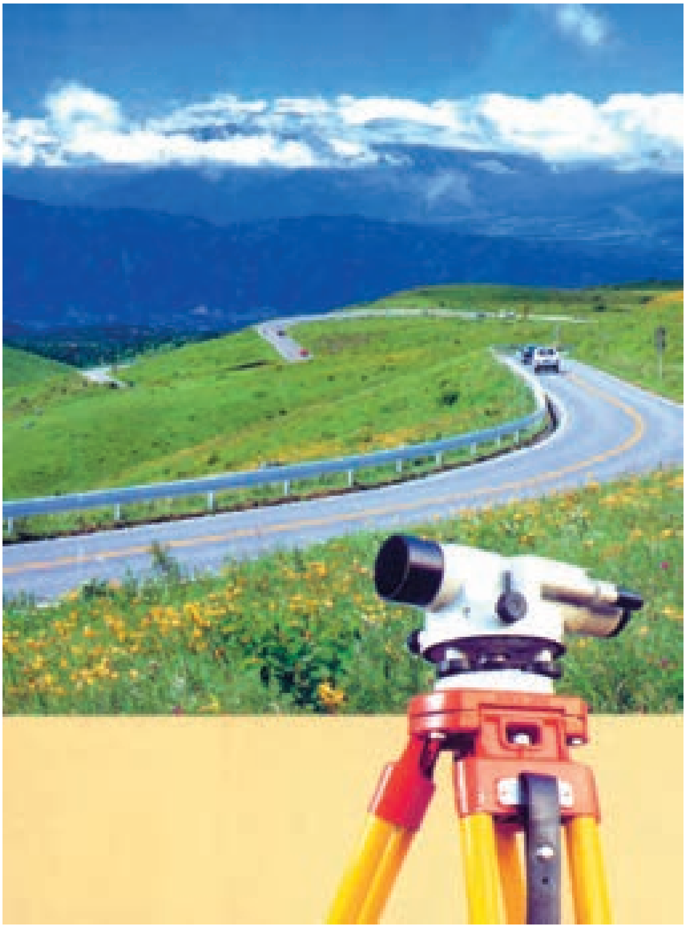
اصل: گزاره‌ای که درستی آن را بدون اثبات می‌پذیریم و برای اثبات قضیه‌ها به آن استناد می‌کنیم «اصل» نامیده می‌شود.

مثال: هر دو نقطه‌ی متمایز یک خط راست و تنها یک خط راست را مشخص می‌کنند یا از هر نقطه‌ی خارج یک خط فقط یک خط می‌توان موازی آن رسم کرد.

مکان هندسی: مکان مجموعه‌ی نقاطی است که همه‌ی آن نقاط دارای ویژگی هندسی مشترکی

باشند و هر نقطه که دارای چنین ویژگی باشد عضو آن مجموعه محسوب شود ؛ مانند تعریف دایره : دایره مکان هندسی نقاطی است از یک صفحه که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی ثابتی در آن صفحه مساوی باشند.

تذکر: در این کتاب که مطالب آن به‌صورت کاربردی است اثبات حکم هر قضیه مطرح نیست و هر قضیه بدون رعایت تقدم و تأخر به گونه‌ی کاربردی عنوان شده است.

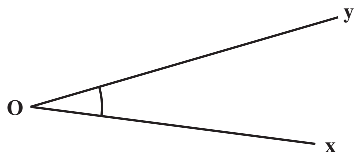


شکل ۱ــ۱

۱ــ۲ــ تعریف زاویه (Angle)

زاویه عبارت است از مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که به دو خط با مبدأ مشترک محدود باشند و آن دو نیم خط را شامل شوند.

مبدأ مشترک را «رأس زاویه» و هر یک از دو نیم‌خط را «یک ضلع زاویه» گویند ؛ مانند : زاویه‌ی xoy که آن‌را به‌صورت o # و یا xoy # نمایش می‌دهند (شکل ۱ــ۲).

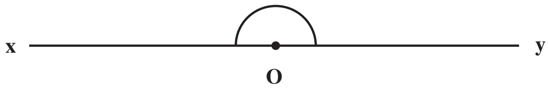


شکل ۱ــ۲

۱ــ۳ــ انواع زاویه

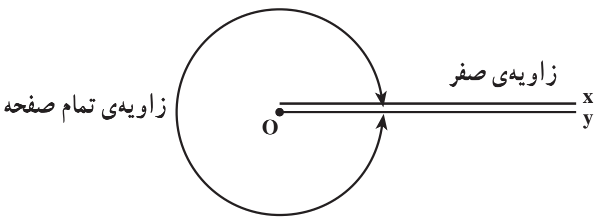
زاویه‌ی نیم‌صفحه، زاویه‌ی قائمه، زاویه‌ی حاده (تند)، زاویه‌ی منفرجه (باز)، زاویه‌ی صفر، زاویه‌ی کوژ (محدب) و زاویه‌ی کاو (مقعر).

زاویه‌ی نیم‌صفحه: زاویه‌ای است که دو ضلع آن در یک امتداد باشند ؛ مانند زاویه‌ی xoy # (شکل ۱ــ۳).



شکل ۱ــ۳

زاویه‌ی صفر: زاویه‌ای است که دو ضلع آن بر هم منطبق باشند و زاویه‌ی خارجی زاویه‌ی صفر را «زاویه‌ی تمام صفحه» گویند (شکل ۱ــ۴).

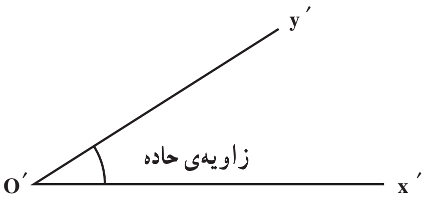


شکل ۱ــ۴

زاویه‌ی قائمه (Rectangle): نصف زاویه‌ی نیم‌صفحه را «زاویه‌ی قائمه» گویند (شکل ۱ـ۵).

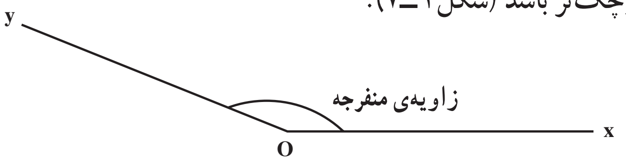
شکل ۱ـ۵

زاویه‌ی حاده یا زاویه‌ی تند: زاویه‌ای است که از زاویه‌ی قائمه کوچک‌تر است (شکل ۱ـ۶).



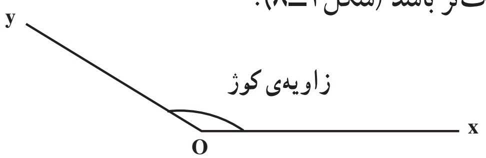
شکل ۱ـ۶

زاویه‌ی منفرجه یا زاویه‌ی باز: زاویه‌ای است که اندازه‌ی آن از زاویه‌ی قائمه بزرگ‌تر و از زاویه‌ی نیم‌صفحه کوچک‌تر باشد (شکل ۱ـ۷).



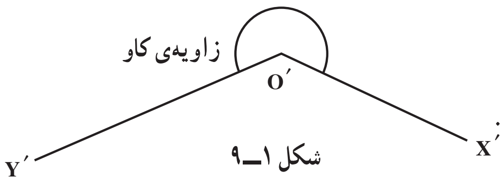
شکل ۱ـ۷

زاویه‌ی کوژ (محدب): زاویه‌ای است که از زاویه‌ی نیم‌صفحه کوچک‌تر باشد (شکل ۱ـ۸).



شکل ۱ـ۸

زاویه‌ی کاو (مقعر): زاویه‌ای است که از زاویه‌ی نیم‌صفحه بزرگ‌تر است (شکل ۱ـ۹).

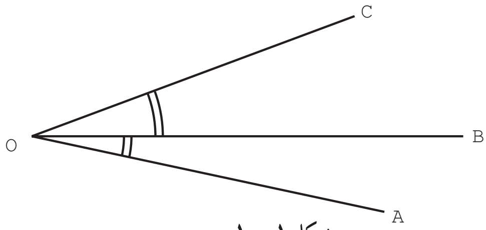


شکل ۱ـ۹

۱ــ۴ــ حالات دو زاویه نسبت به‌هم

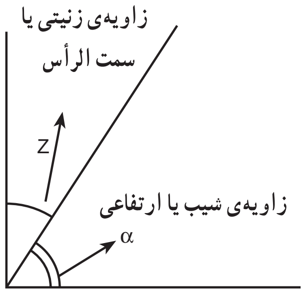
دو زاویه نسبت به‌هم ممکن است : مجاور، متمم، مکمل، مجانب و متقابل به رأس باشند.

دو زاویه‌ی مجاور : دو زاویه‌ای هستند که در رأس و یک ضلع مشترکند و دو ضلع غیرمشترک آن‌ها در دو طرف ضلع مشترکشان قرار دارد؛ مانند دو زاویه‌ی $\angle AOB$ و $\angle BOC$ (شکل ۱ــ۱۰).

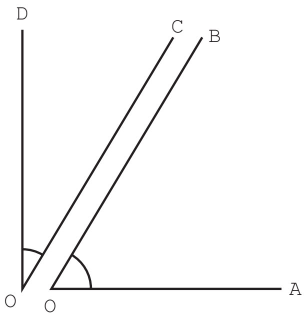


شکل ۱ــ۱۰

دو زاویه‌ی متمم : دو زاویه‌ای هستند که مجموع آن‌ها یک زاویه‌ی قائمه باشد؛ مانند دو زاویه‌ی متمم $\angle AOB$ و $\angle COD$ (شکل ۱ــ۱۱)، هم‌چنین دو زاویه‌ی $\angle Z$ و $\angle \alpha$، (شکل ۱ــ۱۲).



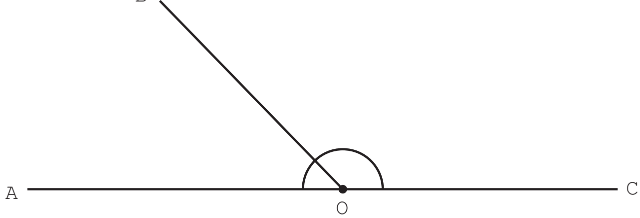
شکل ۱ــ۱۲



شکل ۱ــ۱۱

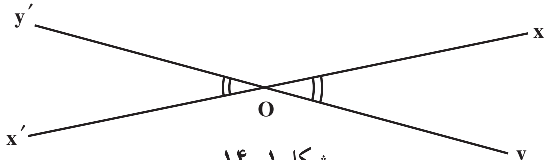
دو زاویه‌ی مکمل : دو زاویه‌ای هستند که مجموع آن‌ها ۱۸۰ درجه باشد.

دو زاویه‌ی مجانب : دو زاویه‌ی مجاوری است که مجموع آن‌ها °۱۸۰ باشد؛ مانند دو زاویه‌ی $\angle AOB$ و $\angle COB$ (شکل ۱ــ۱۳).



شکل ۱ــ۱۳

دو زاویه‌ی متقابل به رأس: دو زاویه‌ای است که در رأس، مشترک و هر ضلع یک زاویه در امتداد ضلع زاویه‌ی دیگر است و دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم برابرند ؛ مانند دو زاویه‌ی $\widehat{xoy}$ و $\widehat{x'oy'}$ (شکل ۱ــ۱۴).



شکل ۱ــ۱۴

۱ــ۵ــواحدهای زاویه

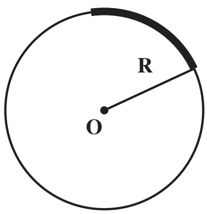
برای اندازه‌گیری زاویه واحدهایی را تعریف کرده‌اند که از آن‌جمله است : درجه، گراد، رادیان.

تعریف درجه (Degree): زاویه‌ی مقابل به $\frac{۱}{۳۶۰}$ پیرامون دایره را «درجه» گویند. اگر درجه را به ۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک دقیقه می‌گویند و هرگاه یک دقیقه را به ۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک ثانیه می‌نامند. برای مثال کمان سی‌وشش درجه و بیست و چهار دقیقه و پانزده ثانیه به‌صورت : ″۱۵,′۲۴,°۳۶ نمایش داده می‌شود.

(° : درجه، ′ :دقیقه و ″ : ثانیه)

گراد (Gon): زاویه‌ی مقابل به $\frac{۱}{۴۰۰}$ محیط دایره را «گراد» گویند و $\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد را «دقیقه‌ی گرادی» و $\frac{۱}{۱۰۰}$ دقیقه‌ی گرادی را «ثانیه‌ی گرادی» گویند. عدد گراد به‌صورت اعشاری نوشته می‌شود. به‌طوری که ارقام صحیح نشان‌دهنده‌ی «گراد» و دو رقم اول اعشاری نشان‌دهنده‌ی «دقیقه‌ی گرادی» و ارقام سوم و چهارم اعشاری نشان‌دهنده‌ی «ثانیه‌ی گرادی» است ؛ مانند : ۸۵ درجه‌ی گرادی و ۴۳ دقیقه و ۷۵ ثانیه. عدد : **۸۵/۴۳۷۵** با حرف gr نمایش داده می‌شود.

رادیان(Radian): اندازه‌ی زاویه‌ی مقابل به قوسی از پیرامون یک دایره که برابر شعاع همان دایره باشد یک «رادیان» گویند.



شکل ۱ــ۱۵

تبدیل واحدهای زاویه به یک‌دیگر: برای تبدیل واحدهای زاویه به یک‌دیگر ــ با توجه به تعاریف آن‌ها ــ از این فرمول استفاده می‌شود :

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}$$

تذکر: هر نوع واحد زاویه با یک نماد مشخصی نمایش داده می‌شود ؛ مانند : درجه به حرف «D»، گراد به حرف «G» و رادیان به حرف «R».

مثال ۱ــ۱: زاویه‌ی α که توسط زاویه‌یاب درجه‌ای اندازه‌گیری شده برابر $\alpha=۲۵^\circ,۴۲',۳۰''$ می‌باشد می‌خواهیم بدانیم زاویه فوق برابر چند گراد و چند رادیان است؟

راهکار کلی: ما برای حل این گونه مسائل از فرمول کلی $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}$ که D نماد درجه و G گراد و R رادیان می‌باشد استفاده می‌کنیم و برای حل، هر پارامتر را که معلوم است به جای خود قرار داده و مجهولات دیگر را به‌دست می‌آوریم.

روش حل: معلومات طبق فرض مسئله $D=۲۵^\circ,۴۲',۳۰''$ و مجهولات R و G هستند حال ابتدا برای به‌دست آوردن گراد رابطه $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}$ را در نظر می‌گیریم و به جای D مقدار $۲۵^\circ,۴۲',۳۰''$ را قرار داده و مجهول G را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{۲۵^\circ,۴۲',۳۰''}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Rightarrow ۱۸۰\times G=۲۰۰\times(۲۵^\circ,۴۲',۳۰'')$$

$$G=\frac{۲۰۰\times(۲۵^\circ,۴۲',۳۰'')}{۱۸۰}=۲۸/۵۶۴۸ \quad \text{گراد}$$

(**تذکر:** در محاسبه این فرمول از ماشین‌حساب استفاده کرده مُد درجه را به کار می‌بریم)

سپس برای محاسبه رادیان (R) در فرمول $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$ به جای D مقدار $۲۵^\circ,۴۲',۳۰'$ را قرار داده و مقدار R (رادیان) را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۲۵^\circ,۴۲',۳۰''}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{(۲۵^\circ,۴۲',۳۰'')\times\pi}{۱۸۰}=۰/۴۴۰۶۹ \text{رادیان}$$

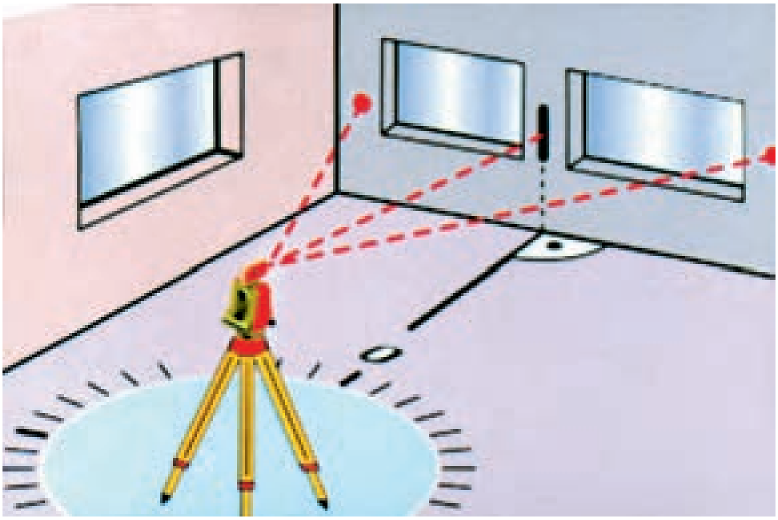
بحث و بررسی: از این مثال نتیجه‌گیری می‌کنیم که اگر ما با زاویه یا بهای درجه‌ای یا گرادی کار کنیم با این رابطه می‌توانیم معادل آن را با واحدهای دیگر به‌دست آوریم و در محاسبات و فرمول‌های نقشه‌برداری از آن استفاده کنیم.

۱ــ۶ــ تعریف فرجه

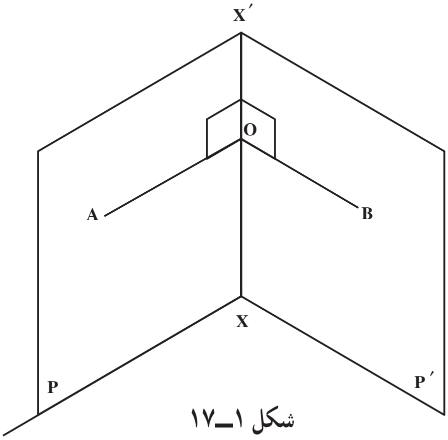
مجموعه‌ای از نقاط فضا که بین دو نیم‌صفحه با مرز مشترک محدود باشد «فرجه» نام دارد.

مرز مشترک دو صفحه را «یال فرجه» و هر نیم‌صفحه را «وجه فرجه» و زاویه‌ی بین دو نیم‌صفحه را «اندازه‌ی فرجه» می‌نامند.

مسطحه‌ی فرجه: زاویه‌ی فرجه یا زاویه‌ی بین دو صفحه را «مسطحه‌ی فرجه» گویند. اگر از نقطه‌ی O روی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ نیم‌خط OA داخل صفحه‌ی P و نیم‌خط OB داخل صفحه‌ی P′ را عمود بر فصل مشترک xx′ رسم کنیم زاویه‌ی $A\hat{O}B$ «مسطحه‌ی فرجه» نامیده می‌شود (شکل ۱ــ۱۷).

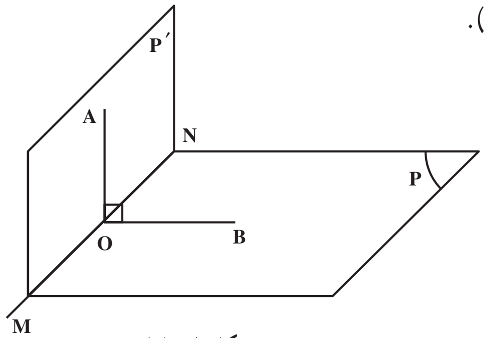


شکل ۱ــ۱۶ــ نمایش اندازه‌گیری زاویه‌ی افقی



شکل ۱ــ۱۷

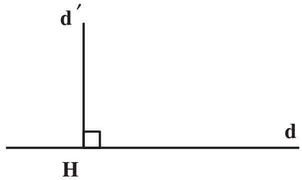
دو صفحه‌ی عمود برهم: دو صفحه را وقتی عمود برهم گویند که مسطحه‌ی فرجه‌ی آن قائمه باشد (شکل ۱ــ۱۸).



شکل ۱ــ۱۸

۱ــ۷ــ عمود و مایل

تعریف خط عمود بر یک خط: هرگاه زاویه‌ی بین دو خط d و ′d قائم باشد آن‌ها نسبت به‌هم عمودند.

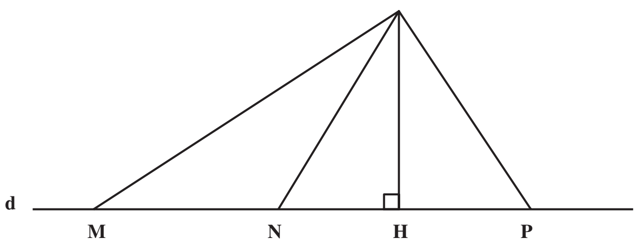


شکل ۱ــ۱۹

اصل: از یک نقطه‌ی خارج یک خط فقط یک خط می‌توان بر آن عمود رسم کرد و محل تلاقی خط عمود ′d را بر d (نقطه‌ی H) «پای عمود» گویند.

۱ــ۸ــ عمود و مایل در صفحه

در یک صفحه از یک نقطه، مانند O، می‌توان بی‌نهایت خط رسم کرد که خط d را مطابق شکل ۱ــ۲۰ قطع کنند و از این بی‌نهایت خط فقط یک خط مانند OH عمود بر خط d هستند و بقیه‌ی خطوط نسبت به d مایل بوده نقاط M و N پای مایل‌های OM و ON هستند.



شکل ۱ــ۲۰

قضیه:

الف) طول عمود از طول هر مایلی کوچک‌تر است.

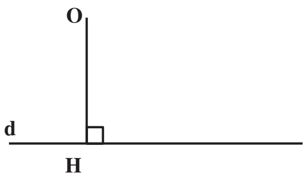
ب) اگر پای هر دو مایل از پای عمود به یک فاصله باشد طول آن دو مایل برابرند و به عکس.

ج)از هر دو مایل مایلی بزرگ‌تر است که پایش از پای عمود دورتر باشد.

شکل ۱ــ۲۱ــ یک نمونه از کاربرد خاصیت عمود و مایل در نقشه‌برداری

اندازه‌گیری طول افقی: اگر در مترکشی در حالتی که یک‌طرف متر در یک نقطه‌ی ثابت (روی بلندی) و طرف دیگر آن در امتداد ریسمان شاغولی بالا و پایین برده شود تا کم‌ترین اندازه را بخوانیم در این‌صورت امتداد متر افقی است زیرا طبق قضیه عمود کوتاه‌تر از مایل است بنابراین امتداد متر بر امتداد ریسمان شاغول عمود است و در نتیجه افقی می‌باشد.

فاصله‌ی نقطه تا خط: عبارت است از طول عمودی که از آن نقطه بر خط فرود آید (مطابق شکل ۱ــ۲۲ طول OH).

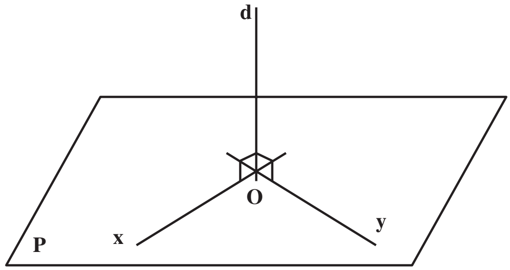


شکل ۱ــ۲۲

۱ــ۹ــعمود و مایل در فضا

تعریف خط عمود بر یک صفحه: قضیه: هرگاه خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای عمود باشد بر آن صفحه عمود است.

قضیه: هرگاه خطی بر صفحه‌ای عمود باشد بر تمام خطوط آن صفحه عمود است. «از یک نقطه فقط یک خط می‌توان بر صفحه عمود کرد.»

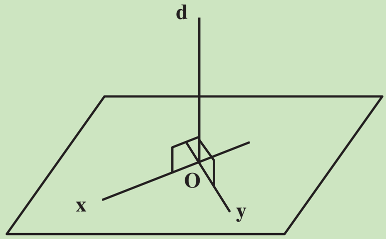


شکل ۱ــ۲۳

اثبات قضیه: می‌دانیم مطابق شکل ۳۹ــ۱ از هر نقطه مانند O خارج صفحه‌ی P بی‌نهایت خط می‌توان رسم کرد که تنها یک خط مانند OH عمود بر صفحه‌ی P است و بقیه‌ی خطوط نسبت به صفحه‌ی P مایل بوده، نقطه‌ی H پای عمود OH و نقاط M و N پای مایل‌های OM و ON هستند.

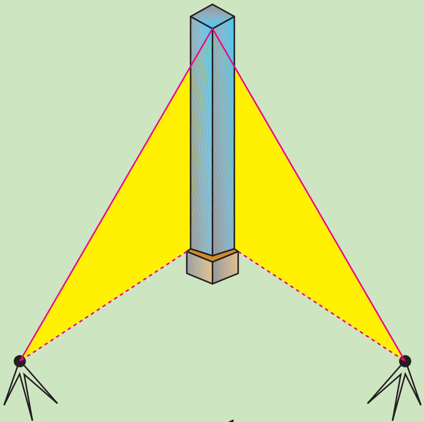
مثال ۱ــ۲: کاربرد خاصیت خط عمود بر یک صفحه در برپایی یک ستون قائم. می‌خواهیم یک ستون فلزی ساخته شده را روی صفحه ستون به‌صورت قائم نصب و جوشکاری نماییم.

راهکار کلی: می‌دانیم طبق قضیه وقتی یک خط بر یک صفحه عمود است که بر دو خط متقاطع از صفحه عمود باشد یعنی مطابق شکل زیر تنها عمود بودن ستون od بر خط oy کافی نیست بلکه باید بر خط ox نیز عمود باشد و در عمل با استفاده از دو دوربین زاویه‌یاب به‌صورت زیر اجرا می‌کنیم.

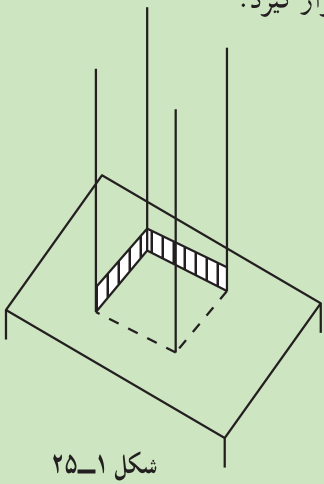


شکل ۱ــ۲۴

روش حل: ابتدا (به‌وسیله دو عدد نبشی به‌صورت شکل ۱ــ۲۵) محل ستون را در روی صفحه ستون مشخص می‌کنیم و سپس ستون را با جرثقیل در محل خود قرار داده و برای تثبیت آن به شکل قائم هم‌زمان از دو زاویه‌یاب طبق شکل مستقر می‌کنیم و هر دو دوربین را به یک لبه ستون نشانه‌روی کرده و امتداد قائم تار رتیکول آن‌ها را روی لبه ستون قرار می‌دهیم. وقتی ستون به طور صحیح و دقیق عمود بر صفحه ستون است که امتداد قائم تار رتیکول هر دو زاویه‌یاب درست بر یک لبه ستون قرار گیرد.



شکل ۱ــ۲۶

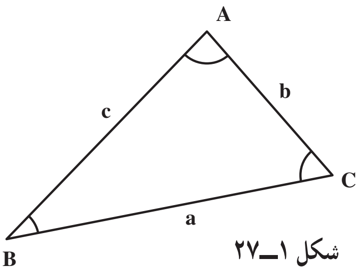


شکل ۱ــ۲۵

بحث و بررسی: نکته مهمی که برای نصب ستون عمود بر صفحه یا سطح تراز وجود دارد حداقل باید امتداد ستون از دو طرف کنترل شود یا به عبارت دیگر در یک زمان دو دوربین زاویه‌یاب باید مستقر و ستون را کنترل نمود.

۱ــ۱۰ــتعریف مثلث (Triangle)

اگر سه خط دو به دو یک‌دیگر را قطع کنند؛ شکل ایجاد شده را «مثلث» می‌نامند. به عبارت دیگر اگر سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست را دو به دو به یک‌دیگر وصل کنیم؛ شکل به‌دست آمده را مثلث گویند (شکل ۱ــ۲۷).



شکل ۱ــ۲۷

سه ضلع و سه زاویه‌ی هر مثلث را «اجزای اصلی مثلث» می‌نامند.

اندازه‌ی هر ضلع مثلث را با حرف کوچک رأس مقابل به آن نمایش می‌دهند.

در هر مثلث همواره اندازه‌ی یک ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است مثلاً $a < b + c$

در هر مثلث مجموع زوایای داخلی برابر ۱۸۰ درجه (یا ۲۰۰ گراد) می‌باشد.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

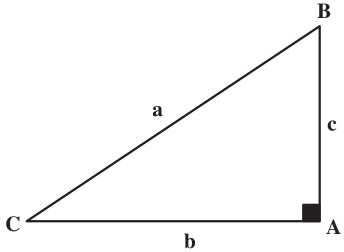
انواع مثلث

مثلث قائم‌الزاویه: اگر دو ضلع مثلث بر هم عمود باشند؛ مثلث را «قائم‌الزاویه» می‌نامند؛ بنابراین، در مثلث قائم‌الزاویه یکی از زوایا قائمه است (شکل ۱ــ۲۸).

$$\hat{A}=90^\circ$$

$$\hat{B}+\hat{C}=90^\circ$$

$a > b$ و $a > c$



شکل ۱ــ۲۸

یک مثلث قائم‌الزاویه در سه حالت زیر معلوم و قابل ترسیم است:

الف ــ وتر و یک ضلع معلوم

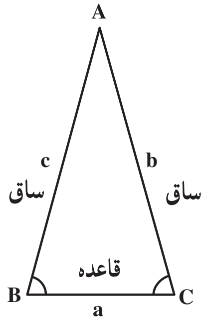
ب ــ وتر و یک زاویه

ج ــ دو ضلع مجاور زاویه‌ی قائمه

مثلث متساوی‌الساقین: اگر دو ضلع مثلثی با هم برابر باشند؛ مثلث را «متساوی‌الساقین» گویند (شکل ۱ــ۲۹).

$b = c$

$\hat{B}=\hat{C}$



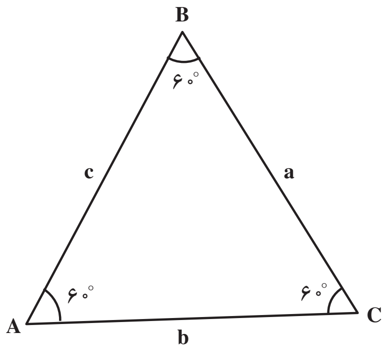
شکل ۱ــ۲۹

مثلث متساوی‌الاضلاع: اگر سه ضلع مثلث با هم برابر باشند ؛ مثلث را «متساوی‌الاضلاع» می‌نامند.

تذکر: در هر مثلث متساوی‌الاضلاع سه زاویه با هم برابرند و هر یک مساوی ۶۰ درجه است (شکل ۱ــ۳۰).

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ$$

$$a = b = c$$



شکل ۱ــ۳۰

خودآزمایی

۱ــ برای شناساندن مفهوم هندسی به دیگران چه باید کرد و چه شرایطی را باید درنظر گرفت؟

۲ــ هریک از این عبارات را چنان کامل کنید که یک گزاره‌ی درست یا یک حکم درست حاصل شود :

الف) بعضی از تعریف‌ها تعریف قبلی ندارند و خود ..... هستند. این‌گونه موارد را ..... می‌نامیم و بدون تعریف آن‌ها را می‌پذیریم.

ب) نقطه، خط، صفحه و فضا از مفاهیم ..... هستند.

ج) یک جمله‌ی ..... را گزاره می‌گویند.

د) مجموع دو عدد ۶ و ۴ عدد ۱۵ می‌شود، یک گزاره‌ی ..... است.

هـ) استدلال برای اثبات درستی یک ..... به کمک گزاره‌هایی که قبلاً درستی آن‌ها پذیرفته شده ..... گویند.

و) هر گزاره‌ای که برای اثبات درست بودنش از ..... استفاده شود ..... نامیده می‌شود.

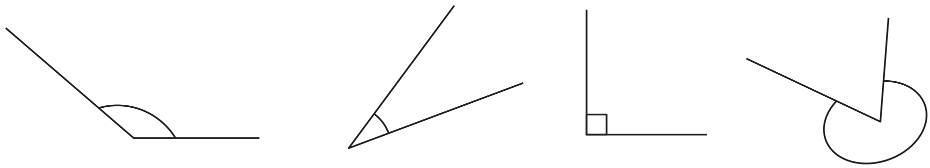
۳ــ در تمرین‌های زیر گزاره‌های درست را با حرف «د» و گزاره‌های نادرست را با حرف «ن» مشخص کنید.

الف) اصل گزاره‌ای است که درستی آن را با اثبات می‌پذیریم. □

ب) از هر نقطه خارج یک خط می‌توان بیش از یک خط موازی آن رسم کرد. □

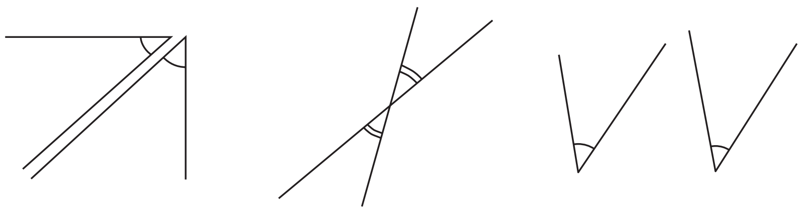
ج) مکان هندسی، مجموعه نقاطی است که همه‌ی آن نقاط دارای ویژگی هندسی مشترکی باشند. □

۴ــ در شکل ۱ــ۳۱ زاویه‌های کوژ و کاو را معین کنید.



شکل ۱ــ۳۱

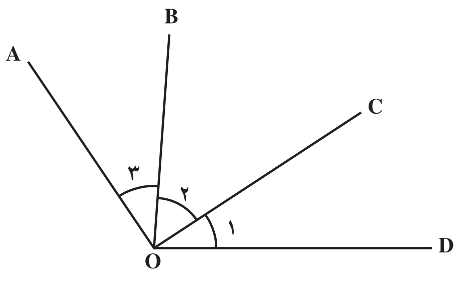
۵ــ در شکل‌های زیر کدام‌یک از دو زاویه نسبت به هم مجاور، متقابل یا مجانب هستند؟



«الف»　　　«ب»　　　«ج»

شکل ۱ــ۳۲

۶ــ با استفاده از خاصیت دو زاویه‌ی متمم اگر ضلع AO عمود بر OC و BO عمود بر OD باشد ثابت کنید : $\angle AOB = \angle COD$ یعنی $\hat{۳} = \hat{۱}$



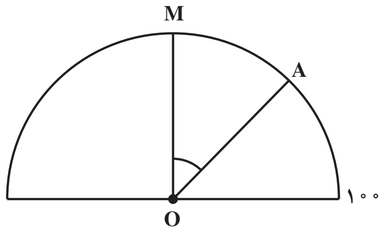
شکل ۱ــ۳۳

۷ـ دو زاویه‌ی شیب و زنیتی در دوربین‌های زاویه‌یاب نسبت به‌هم چگونه‌اند؟ اگر با یک دوربین زاویه‌یاب زاویه زنیتی آن ۸۵°,۲۳′ باشد، زاویه‌ی شیب آن چند درجه است؟

۸ـ زاویه‌ی فراز و نشیب را تعریف کنید و کاربرد آن‌ها را در عمران بنویسید.

۹ـ ۳۵°,۲۷′ چند گراد و چند رادیان است؟

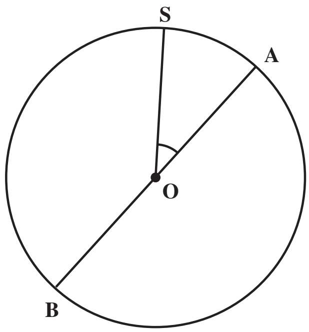
۱۰ـ مطابق شکل ۱ـ۳۴ که لمب قائمی را نمایش می‌دهد اگر زاویه‌ی گراد ۴۶/۵۸ = MOA # باشد زاویه‌ی شیب چند درجه است؟



شکل ۱ـ۳۴

۱۱ـ آیا دو زاویه‌ی ۱۷۶ گراد و ۲۱°,۳۶′ مکمل یک‌دیگر هستند؟

۱۲ـ مطابق شکل ۱ـ۳۵ زاویه‌ی SOA # ۲۳°,۴۵′ است. زاویه‌ی مقابل به کمان SAB # چند گراد و چند رادیان است؟

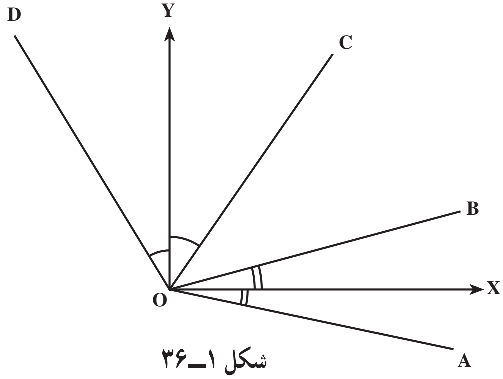


شکل ۱ـ۳۵

۱۳ـ ضلع‌های غیرمشترک دو زاویه‌ی مجاور بر هم عمودند اگر یکی از آن دو زاویه برابر ۳۰ گراد باشد، زاویه‌ی دیگر چند درجه است؟

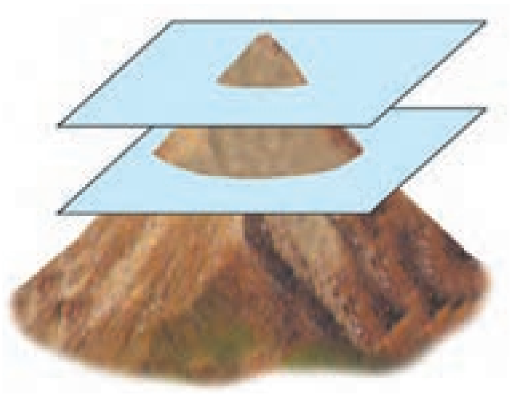
۱۴ـ از چهار زاویه‌ی مجاور α، %، & و θ که حول نقطه‌ی M تشکیل شده‌اند زاویه‌های $\alpha=$ ۵۸ گراد، ۸۷°,۳۰′ =% و $\frac{۲\pi}{۳}$ =& رادیان هستند. اندازه‌ی زاویه‌ی θ چند درجه است؟

۱۵ــ زاویه‌ی قائمه‌ی xoy # داده شده است اگر ox نیم‌ساز زاویه‌ی AOB # و oy نیز نیم‌ساز زاویه‌ی COD # باشد، ثابت کنید که زاویه‌های AOC # و BOD # مکمل هستند (شکل ۱ــ۳۶).



شکل ۱ــ۳۶

۱۶ــ در شکل ۱ــ۳۷، قله‌ی کوه با صفحات موازی برش خورده است. چرا مقاطع و محیط‌های آن‌ها با یک‌دیگر موازی‌اند؟ اگر صفحات، متساوی‌الفاصله باشند فصل مشترک صفحات موازی با سطح کوه منحنی‌هایی را تشکیل می‌دهند. این منحنی‌ها در نقشه‌برداری چه نامیده می‌شود و چه کاربردی دارد؟



شکل ۱ــ۳۷

۱۷ــ آیا می‌توان مسطحه‌ی هر فرجه را با دوربین زاویه‌یاب اندازه‌گیری کرد؟ اصولاً چه نوع زاویه‌هایی را می‌توان به وسیله‌ی زاویه‌یاب اندازه‌گیری کرد؟

۱۸ــ برای برپا نمودن یک ستون به‌صورت عمود بر صفحه‌ی افق چه شرایطی باید برقرار

باشد؟ چگونه و با چه وسایلی باید این کار را انجام داد؟

۱۹ــ قضیه‌ی طول عمود کوتاه‌تر از طول مایل است. چه خاصیتی در مترکشی سطح شیب‌دار دارد که می‌توان از آن استفاده نمود؟

کارگروهی

دانش‌آموزان کلاس را به گروه‌های کوچک تقسیم کنید. برای هر گروه به صورت چرخشی در هر هفته سرگروه تعیین کنید. در هرگروه دانش‌آموزان به زبان خودشان درس را بازگو کنند و برای ارزیابی میزان یادگیری برای یکدیگر سؤال طرح کنند و پاسخ‌های دریافتی را ارزیابی کنند.

سه مسأله مهم دیگری که به نظر شما لازم بود در این بخش آورده می‌شد ولی جای آن خالی است.

فصل دوم

تصویر (Projection)

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ تصویر قائم یک نقطه بر یک خط راست را توضیح دهد.

۲ــ تصویر یک پاره‌خط بر یک خط راست را توضیح دهد.

۳ــ اندازه‌ی طول تصویر یک پاره‌خط را محاسبه کند.

۴ــ تصویر یک نقطه را بر یک صفحه تعریف کرده، فاصله‌ی یک نقطه از صفحه‌ی تصویر را توضیح دهد.

۵ــ تصویر یک پاره‌خط بر یک صفحه را تعریف کرده، روش اندازه‌گیری طول این تصویر را توضیح دهد.

۶ــ فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی را تعریف کرده، کاربرد آن را در نقشه‌برداری شرح دهد.

۷ــ زاویه‌ی شیب یا زاویه‌ی ارتفاعی را تعریف نموده، کاربردهای آن‌ها را در نقشه‌برداری بیان کند.

۸ــ تصویر یک زاویه بر یک صفحه را تعریف کند.

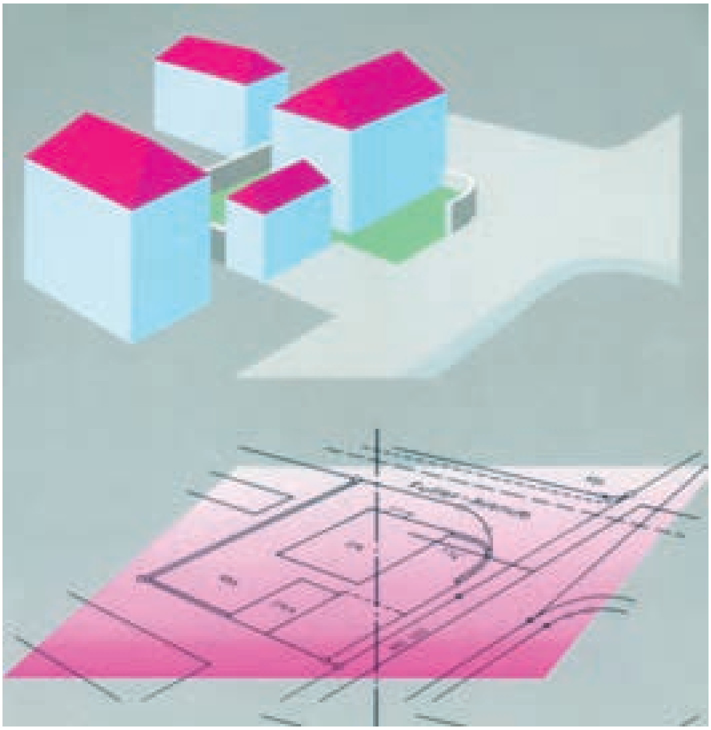
۹ــ زاویه‌ی افقی را تعریف کرده، کاربرد آن را در نقشه‌برداری توضیح دهد.

۱۰ــ زاویه‌ی زنیتی و زاویه‌ی سمت الرأسی را تعریف کرده، رابطه‌ی بین آن دو را بیان کند.

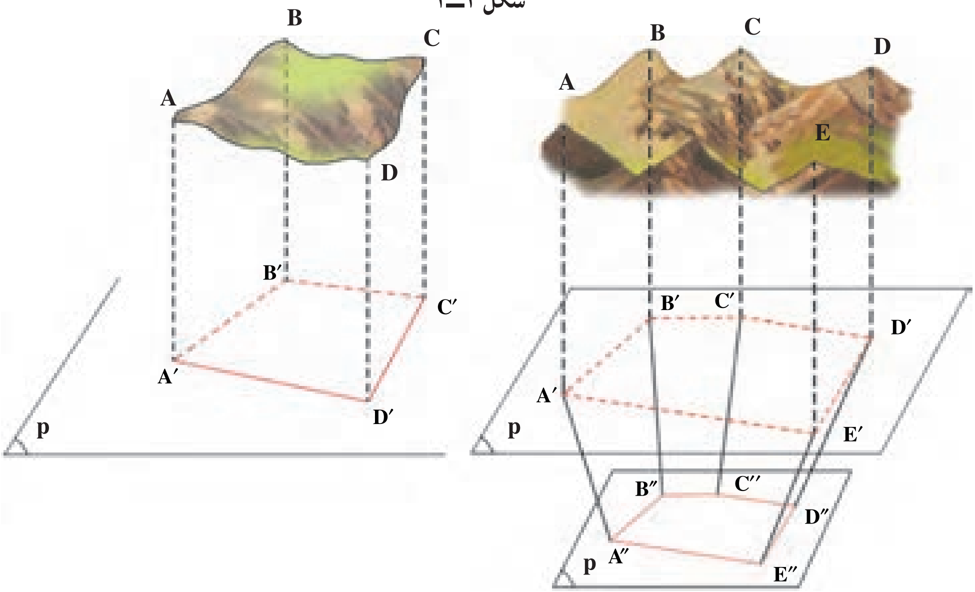
۱۱ــ با دانستن زاویه‌ی شیب یک امتداد بتواند زاویه‌ی زنیتی همان امتداد را محاسبه کند.

۱۲ــ با دانستن زاویه‌ی زنیتی یک امتداد بتواند زاویه‌ی شیب همان امتداد را محاسبه کند.

۱۳ــ مثال‌های حل شده‌ی فصل را فرا بگیرد.



شکل ۲ــ۱



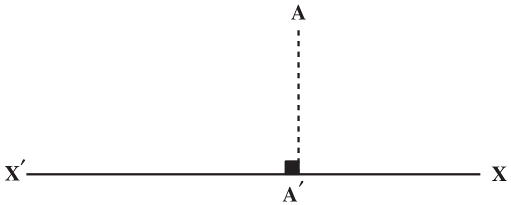
شکل ۲ــ۲ــ نقشه‌ی یک منطقه، تصویر افقی و کوچک شده‌ی سطح منطقه و عوارض آن بر روی یک صفحه‌ی افقی است.

۲ــ۱ــ تصویر قائم یک نقطه بر خط راست (Orthogonal Projection)

از نقطه‌ی A خطی بر $x'x$ عمود می‌کنیم نقطه‌ی A' پای عمود را «تصویر قائم» و نقطه‌ی A بر خط $x'x$ و عمود AA' را «مصوّر نقطه‌ی A» می‌نامند.

چون در این کتاب تنها تصویر قائم مورد نظر است از این پس هرجا سخن از تصویر قائم به‌میان آید برای اختصار کلمه‌ی «تصویر» را به‌کار می‌بریم و منظور از تصویر یک شکل، تصویر قائم آن شکل خواهد بود.

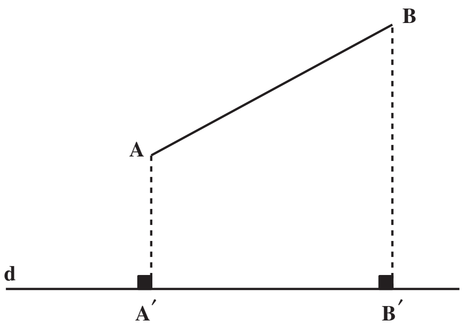
تذکر: تصویر هر نقطه روی خط $x'x$ بر خود منطبق است.



شکل ۲ــ۳

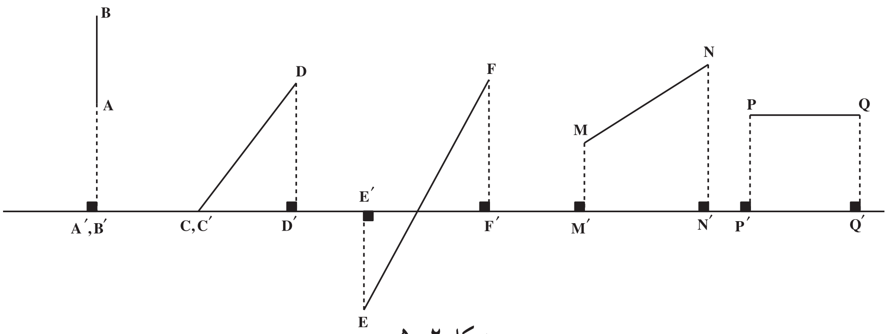
۲ــ۲ــتصویر پاره‌خط بر خط راست

اگر تصویر پاره‌خط AB بر خط d عمود نباشد تصویر آن پاره‌خط بر خط d پاره‌خطی است که دو سر آن تصاویر دو سر پاره‌خط مفروض باشند (شکل ۲ــ۴). در شکل ۲ــ۵ پاره‌خط $A'B'$ تصویر پاره‌خط AB بر خط d است.



شکل ۲ــ۴

اگر پاره‌خط AB بر d عمود باشد، تصویر همه‌ی نقطه‌های AB یکی خواهد بود ؛ درنتیجه تصویر پاره‌خط AB یک نقطه می‌شود.

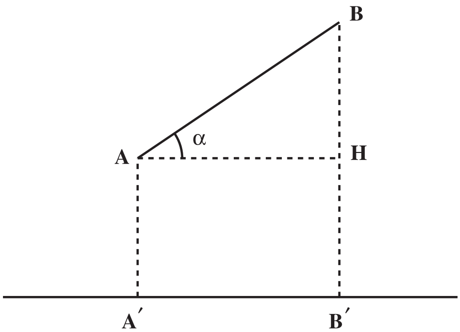


شکل ۲ــ۵

۲ــ۳ــ اندازه‌ی تصویر (مقدار جبری تصویر یک پاره‌خط بر یک خط)

می‌خواهیم اندازه‌ی $A'B'$ را مطابق شکل زیر به‌دست آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{BAH}$ داریم:

$$\cos\alpha = \frac{AH}{AB} \qquad «۱»$$



شکل ۲ــ۶

درنتیجه: $AH = AB\cos\alpha$ ؛ چون $A'B' = AH$ است.

بنابراین با جای‌گزینی در رابطه‌ی ۱ : $A'B' = AB\cos\alpha$ است. از این‌رو، مقدار جبری تصویر یک پاره‌خط بر یک خط برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌ی پاره‌خط در کسینوس زاویه‌ی بین پاره‌خط و تصویر آن.

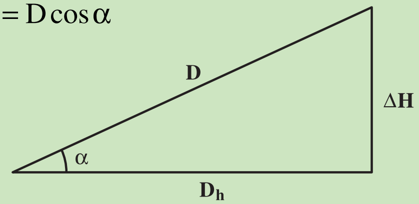
مثال ۲ــ۱: محاسبه طول افقی (تصویر افقی روی صفحه تراز) در صورتی‌که طول مایل و زاویه شیب آن معلوم باشند.

اندازه طول زمینی در سطح شیب‌دار که با افق زاویه $\alpha = ۴۶°,۲۵',۳۶''$ می‌سازد ۲۴۹/۳۲ متر است مقدار آن در روی سطح افق چه‌قدر است؟

راهکار کلی: برای به‌دست آوردن طول افقی از روی زاویه شیب و طول مایل طبق فرمول و

شکل زیر به‌دست می‌آید مطابق شکلD طول مایل و D_h طول افقی و α زاویه شیب می‌باشد طبق تعریف کسینوس زاویه حاده در مثلث قائم‌الزاویه برابر است با ضلع مجاور بر وتر بنابراین :

$$\cos\alpha = \frac{D_h}{D} \Rightarrow D_h = D\cos\alpha$$



شکل ۲ـ۷

در این فرمول مقدار D و α معلومند و D_h طول افقی از فرمول فوق محاسبه می‌شود.

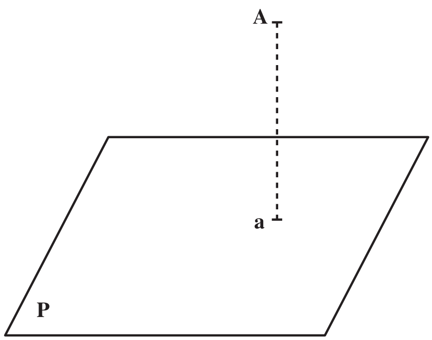
روش حل: از فرمول $D_h = D\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم مقدار D طول مایل معلوم و برابر است با ۲۴۹/۳۲ متر و مقدار زاویه شیب $۴۶°,۲۵',۳۶''$ می‌باشد پس از قراردادن در رابطه فوق و با استفاده از ماشین حساب مقدار طول افقی برابر می شود با

$$D_h = ۲۴۹/۳۲\cos(۴۶°,۲۵',۳۶'') = ۱۷۱/۸۵ \text{ متر}$$

بحث و بررسی: در نقشه‌برداری برای محاسبه مساحت یا برداشت و پیاده کردن نقاط طول افقی مورد نیاز می‌باشد بنابراین لازم است یا به صورت مستقیم یا مسئله فوق (غیرمستقیم) طول افق را به‌دست آوریم.

۲ـ۴ـ تصویر یک نقطه بر یک صفحه

اگر از نقطه‌ی A واقع در خارج صفحه خطی بر صفحه (تصویر) عمود کنیم و پای عمود را a بنامیم، نقطه‌ی a را «تصویر قائم نقطه‌ی A» می‌نامند (شکل۲ـ۸).

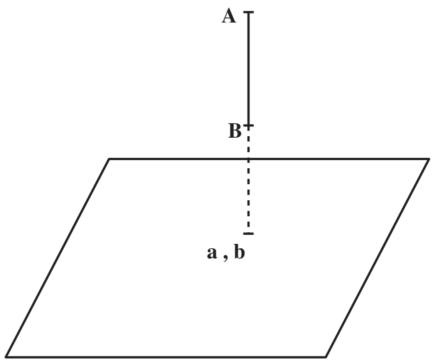


شکل ۲ـ۸

قضیه: هر نقطه فقط یک تصویر بر روی یک صفحه‌ی تصویر دارد.

۲ــ۵ــ فاصله‌ی یک نقطه تا صفحه‌ی تصویر

فاصله‌ی هر نقطه تا صفحه‌ی تصویر برابر است با طول عمودی که از آن نقطه بر آن صفحه رسم شود. در شکل ۲ــ۹ فاصله Aa است.

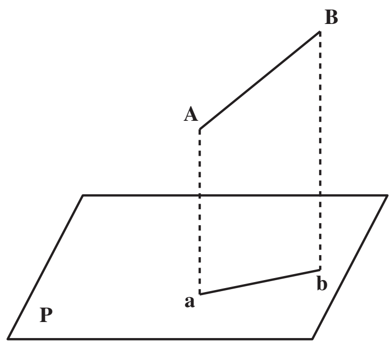


شکل ۲ــ۹

تذکر: اگر خط AB عمود بر صفحه‌ی تصویر باشد تصویر خط AB یک نقطه است.

۲ــ۶ــ تصویر یک پاره‌خط بر یک صفحه

تصویر پاره‌خط AB بر صفحه‌ی P عبارت است از پاره‌خط ab بر روی صفحه‌ی تصویر که از تصویر انتهای دو سر پاره‌خط AB به‌دست آمده باشد (شکل ۲ــ۱۰).



شکل ۲ــ۱۰

۲ــ۷ــ اندازه‌ی تصویر یک پاره‌خط بر یک صفحه

مطابق شکل ۲ــ۱۱ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $B\overset{\Delta}{A}H$ داریم :

$$\cos\alpha = \frac{AH}{AB}$$

درنتیجه :

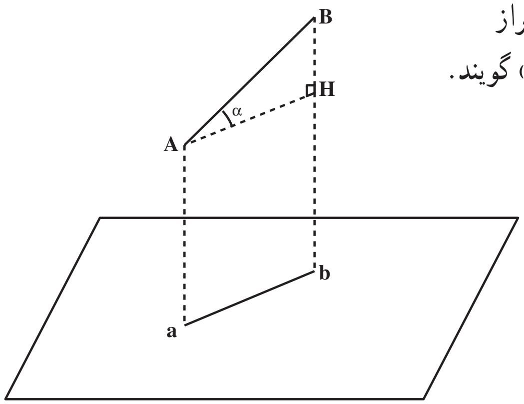
$$AH = AB\cos\alpha$$

چون چهارضلعی AHab یک مستطیل است، بنابراین : $AH = ab$ است.

درنتیجه :

$$ab = AB\cos\alpha$$

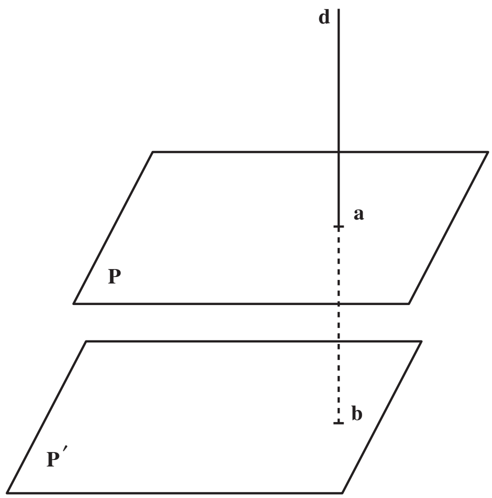
تذکر: اگر صفحه‌ی P موازی سطح تراز باشد زاویه‌ی α را «زاویه‌ی شیب خط AB» گویند.



شکل ۲ــ۱۱

۲ــ۸ــ فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی

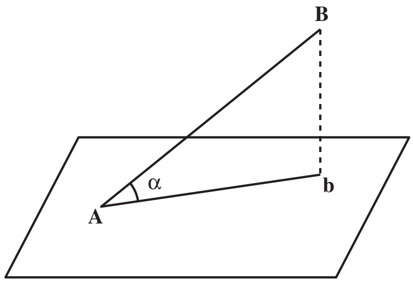
خط d را عمود بر دو صفحه‌ی موازی P و ′P رسم می‌کنیم ؛ خط d صفحه‌ی P را در نقطه‌ی a و صفحه‌ی ′P را در نقطه‌ی b قطع می‌کند. طول ab را «فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی» گویند (شکل ۲ــ۱۲).



شکل ۲ــ۱۲

۲ــ۹ــتعریف زاویه‌ی شیب و یا زاویه‌ی ارتفاعی (Slope Angle)

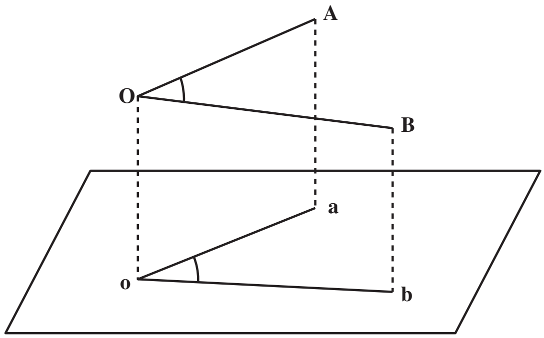
زاویه‌ای که هر پاره‌خط یا هر امتداد با تصویر خود روی صفحه‌ی افق می‌سازد را «زاویه‌ی شیب یا زاویه‌ی ارتفاعی آن پاره خط» گویند.



شکل ۲ــ۱۳

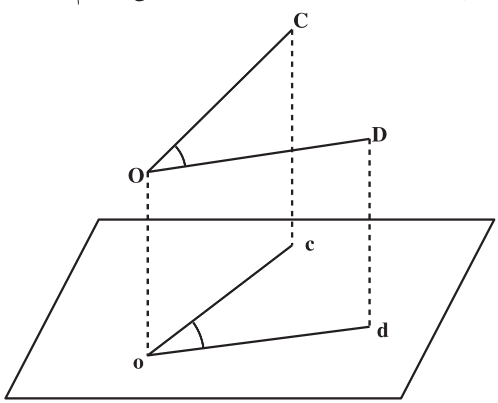
۲ــ۱۰ــتصویر یک زاویه بر یک صفحه

تصویر هر زاویه بر صفحه‌ی تصویر به وضعیت صفحه‌ی زاویه نسبت به صفحه‌ی تصویر بستگی دارد. اگر صفحه‌ی زاویه با صفحه‌ی تصویر موازی باشد؛ تصویر زاویه با خود زاویه مساوی می‌شود (شکل ۲ــ۱۴).



شکل ۲ــ۱۴

اگر صفحه‌ی زاویه نسبت به صفحه‌ی تصویر مایل باشد، مانند زاویه‌ی COD # برای به‌دست آوردن تصویر زاویه، تصاویر نقاط D ،O و C را بر روی صفحه‌ی تصویر به‌دست می‌آوریم. نقاط d ،o و c زاویه‌ی cod # بوده تصویر زاویه نیز COD # است (شکل ۲ــ۱۵).

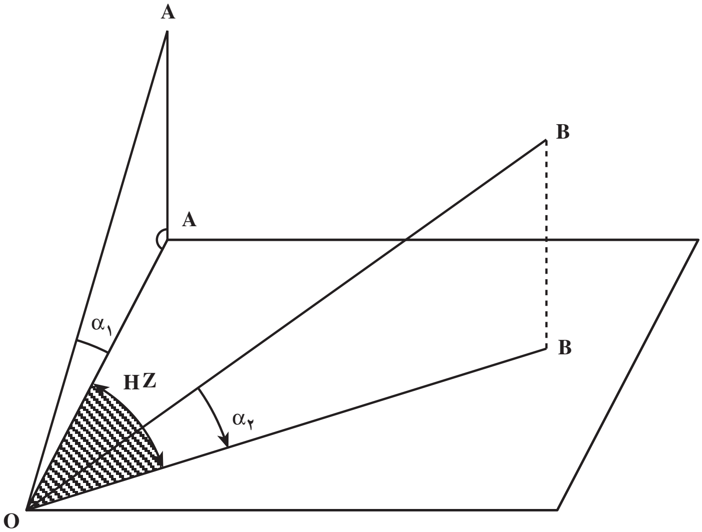


شکل ۲ــ۱۵

تذکر مهم: اگر صفحه‌ی P یک صفحه‌ی افقی باشد، تصویر زاویه‌ی COD # را «زاویه‌ی افقی» گویند. (صفحه‌ی افقی صفحه‌ای است که عمود بر امتداد شاغولی باشد.)

۲ــ۱۱ــ نمایش زاویه‌ی افقی (Horizontal Angle) و شیب (Slope Angle)

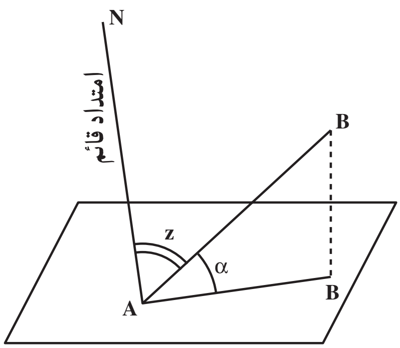
زاویه‌ی HZ (شکل ۲ــ۱۶) «زاویه‌ی افقی» و زوایای α_1 و α_2 را «زوایای شیب» گویند.



شکل ۲ــ۱۶

۲ــ۱۲ــ تعریف زاویه‌ی زنیتی یا سمت‌الرأسی (Zenith Angle)

زاویه‌ای که امتداد AB با امتداد قائم بر صفحه‌ی افق گذرنده از A پدیدار می‌سازد «زاویه‌ی زنیتی یا سمت‌الرأسی» گویند. می‌دانیم که مجموع زوایای شیب و زنیتی ۹۰ درجه است: درجه $\hat{\alpha}+\hat{z}=90^\circ$ (شکل ۲ــ۱۷).



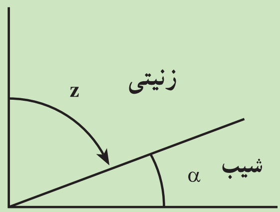
شکل ۲ــ۱۷

مثال ۲ــ۲: تبدیل زوایای زنیتی به زاویه‌ی شیب یا ارتفاعی

با دوربین تئودولیت (زاویه‌یاب زنیتی) پس از نشانه روی مقدار لمب قائم آن $۸۴^\circ, ۳۷', ۲۴''$ قرائت شده است مقدار زاویه ارتفاعی آن را به‌دست آورید و یا به عبارت دیگر در فرمول‌های تاکئومتری به جای α چه مقدار را قرار دهیم.

راهکار کلی: می‌دانیم لمب قائم دوربین‌های تئودولیت به‌دوگونه ساخته می‌شود : ۱ــ صفر لمب قائم در امتداد افق است که در این حالت زاویه ارتفاعی یا شیب اندازه‌گیری می‌شود. ۲ــ صفر لمب قائم در امتداد قائم است که در این صورت زاویه‌ی زنیتی به‌دست می‌آید و این دو مقدار با هم برابر نیستند و در ربع اول دو زاویه زنیتی و ارتفاعی متمم یکدیگرند.

$$\alpha + z = ۹۰ \Rightarrow \alpha = ۹۰ - z$$

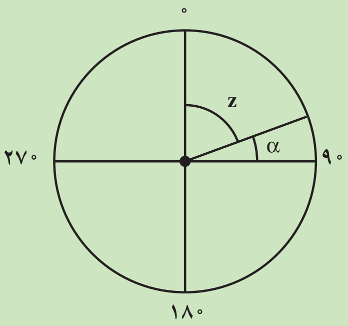


شکل ۲ــ۱۸

روش حل: در این مسئله طبق شکل زاویه قرائت شده زنیتی می‌باشد. بنابراین برای به‌دست آوردن زاویه ارتفاعی از رابطه $\alpha = ۹۰ - z$ استفاده می‌کنیم به‌طوری که مقدار $z = ۸۴^\circ, ۳۷', ۲۴''$ و مقدار α مجهول است در نتیجه :

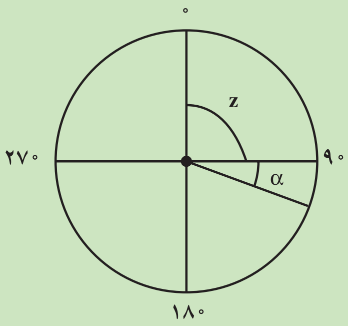
$$\alpha = ۹۰ - ۸۴^\circ, ۳۷', ۲۴'' = ۵^\circ, ۲۲', ۳۶''$$

بحث و بررسی: نتیجه می‌گیریم برای به‌دست آوردن مقدار زاویه شیب α از روی زاویه‌ی زنیتی z با توجه به شکل‌ها و حالات مختلف زیر آن‌را به‌دست آورد.



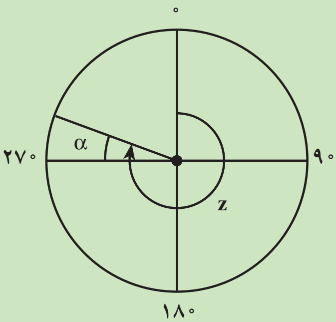
$\alpha = ۹۰ - z$

α بالای افق مثبت



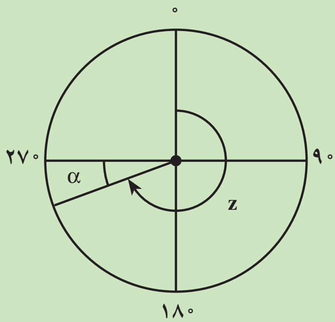
$\alpha = ۹۰ - z$

α زیر افق منفی



$\alpha = z - 270^\circ$

زاویه‌ی α بالای افق مثبت



$\alpha = z - 270^\circ$

α زیر افق منفی

شکل ۲ــ۱۹

خودآزمایی

۱ــ در چه صورت تصویر شکل F بر یک محور یا بر یک صفحه، منحصر به یک نقطه است؟

۲ــ در چه صورت تصویر شکل F بر صفحه، یک خط راست است؟

۳ــ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) تصویرهای دو خط متوازی بر هر صفحه دو خط متوازی‌اند. ☐

ب) اگر تصویرهای دو خط بر یک صفحه موازی باشند آن دو خط متوازی‌اند. ☐

ج) تصویرهای دو پاره‌خط متساوی بر هر صفحه دو پاره‌خط متساوی‌اند. ☐

د) اگر تصویرهای دو پاره‌خط بر یک صفحه متساوی باشند آن دو پاره‌خط متساوی‌اند. ☐

هـ) اگر صفحه‌ی شکل مسطح بر صفحه‌ی تصویر عمود باشد تصویر قائم آن شکل منحصر به‌یک خط راست است. ☐

۴ــ ثابت کنید اندازه‌ی تصویر هر پاره‌خط بر یک خط برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌ی پاره‌خط در کسینوس زاویه‌ی بین پاره‌خط و تصویر آن.

۵ــ آیا به‌وسیله‌ی شاغول و ریسمان می‌توان یک نقطه را بر صفحه‌ی افق یا صفحه‌ی تراز، تصویر نمود؟ چرا؟

۶ــ تصویر هر زاویه روی صفحه‌ی افقی را زاویه‌ی...... گویند. این زاویه را به‌وسیله‌ی چه دوربینی اندازه‌گیری می‌کنند؟

۷ــ اندازه‌ی طول زمینی در سطح شیب‌دار که با افق زاویه‌ی $30^\circ, 28'$ می‌سازد ۱۲۸/۲۵ متر است. مقدار آن در روی سطح افق چه‌قدر است؟

کارگروهی دانش‌آموزان

۱ــ برای این فصل هم مانند صفحه ۱۹ دانش آموزان درس را به زبان خود برای اعضای گروه با نظارت سرگروه خود بازگو کنند و با طرح سؤالات مربوط به درس میزان یادگیری گروه را ارزیابی کنند.

۲ــ پنج پرسش که قالب آن با متن پرسش‌های ۱ تا ۷ متفاوت باشد طرح کنید.