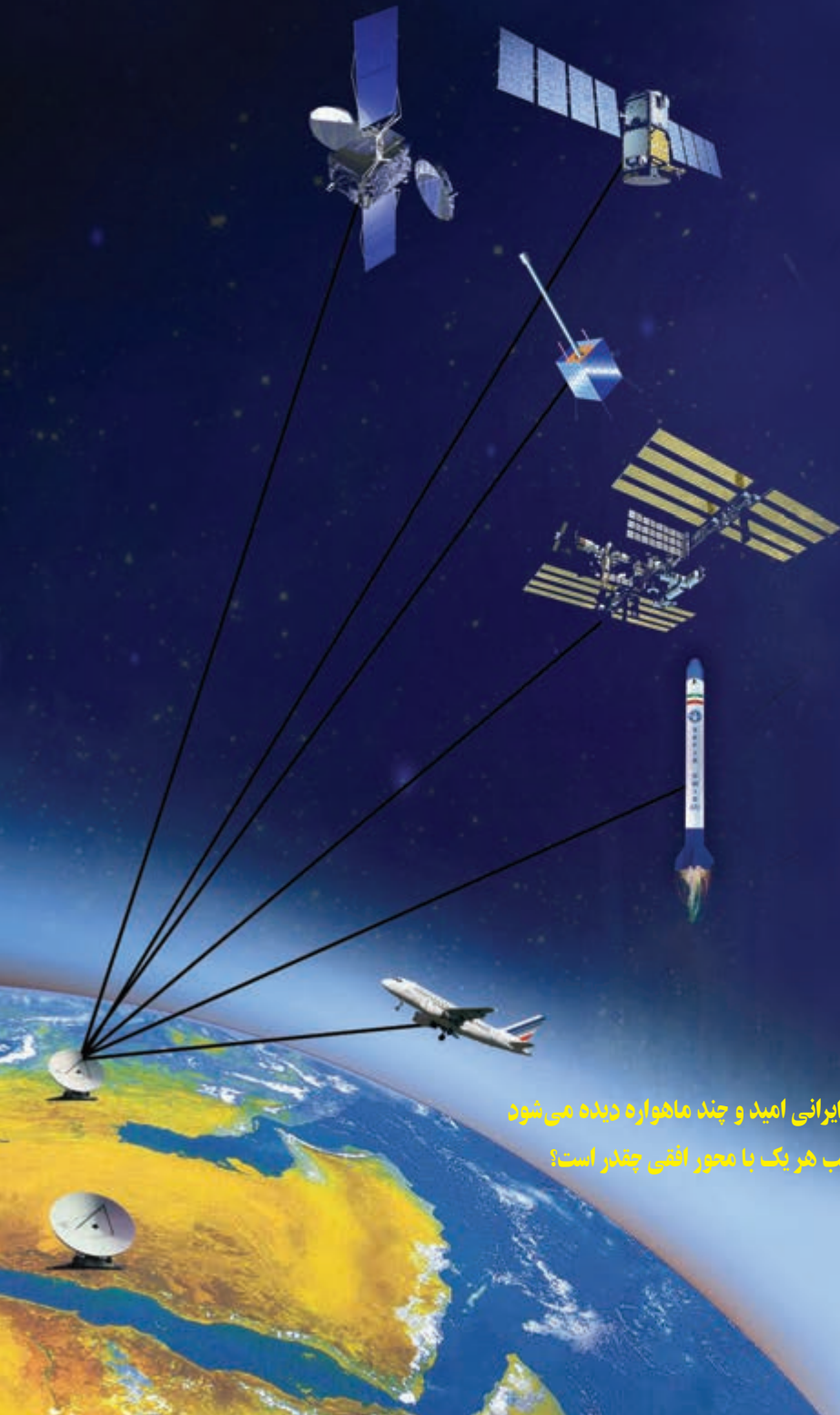


نسبت های مثلثاتی



در شکل بالا هواپیما، ماهواره بر ایرانی امید و چند ماهواره دیده می شود
به نظر شما در یک لحظه شیب هر یک با محور افقی چقدر است؟

طرح یک مسئله

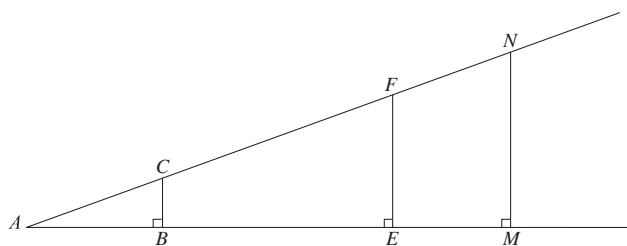
امروز در کلاس درس ریاضی، معلم گفت:

شما که ریاضی را خوب یاد گرفته اید توانایی های بسیاری در زندگی به دست آورده اید. شما کارهایی می توانید انجام دهید که دیگران نمی توانند. مدیر مدرسه گفته است که طناب تیرک پرچم مدرسه مدتی است که پوسیده شده است و لازم است طناب جدیدی برای آن بخریم ولی نمی دانیم طول تیرک پرچم چقدر است؟ من گفتم که دانش آموزان کلاس ریاضی من، ریاضی را خوب یاد گرفته اند و می توانند برای شما طول این تیرک را به دست آورند.

آیا شما می توانید طول تیرک پرچم یا بلندی ساختمان مدرسه خود را حساب کنید؟ برای این کار چه اطلاعاتی را نیاز دارید؟

معمولاً یک مسئله راه حل های متعددی دارد و هر یک از شما ممکن است راه خاص خود را بیابد. یکی از راه های حل مسئله بالا، مقایسه طول اشیای بزرگ با طول اشیای کوچک است. فعالیت زیر ابزار مناسبی برای مقایسه طول ها فراهم می کند.

فعالیت



۱- یک زاویه با رأس A مانند روبه رو رسم شده است. روی یک ضلع این زاویه چند نقطه دلخواه مانند B و E و M در نظر گرفته شده است و از این نقاط عمودهایی بر این ضلع رسم شده است که ضلع دیگر را در نقاطی که به ترتیب C و F و N نامیده ایم قطع کرده اند.

با اندازه گیری های مستقیم درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

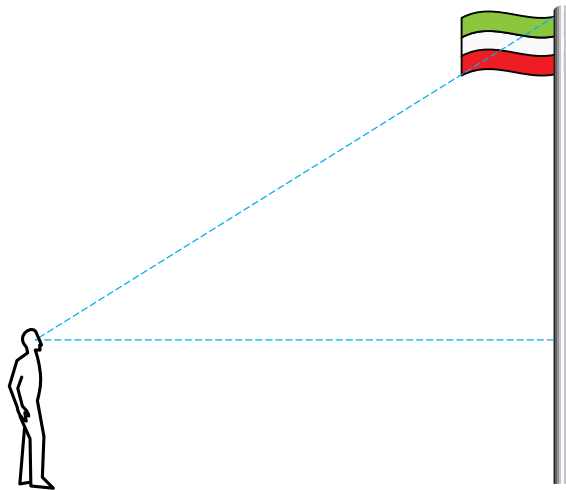
$$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE} = \frac{MN}{AM} \quad , \quad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{AF} = \frac{MN}{AN} \quad , \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{AM}{AN}$$

۲- با رسم همین شکل با زاویه های دیگر و نقاط دیگر، درستی تساوی های بالا را بررسی کنید.

نسبت های بالا اعدادی هستند که فقط به زاویه انتخاب شده بستگی دارند.

تاثرات زاویه

به مسئله اصلی بازمی‌گردیم. احمد یکی از شاگردان علاقه‌مند کلاس بود و می‌خواست توانایی خود را در حل مسئله اندازه‌گیری طول تیرک پرچم بیازماید. او به نزدیکی تیرک پرچم رفت و مدتی به آن نگاه کرد و از خود پرسید مجهول مسئله چیست و برای یافتن آن، چه اطلاعاتی لازم است؟ او وضعیت مسئله را در یک شکل به صورت زیر در ذهن خود تجسم کرد.

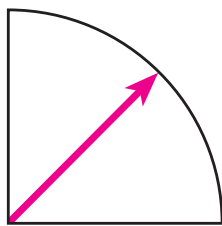


او گفت من طول قد خود را می‌دانم و فاصله‌ام را هم با تیرک پرچم می‌توانم به دست آورم و اگر بدانم با چه زاویه‌ای نوک تیرک را می‌بینم، این اطلاعات برای حل مسئله باید کافی باشد. بهتر است همراه احمد فعالیت زیر را انجام دهیم تا معلوم شود او تا چه حد در حل مسئله موفق خواهد بود.



فعالیت

۱- یک ربع دایرهٔ مقوایی شبیه یک نقاله نصف شده بسازید و روی مرکز ربع دایره یک عقربهٔ نازک مقوایی دیگر با پونس بچسبانید.



۲- به حیاط بروید^۱ و در فاصله‌ای مشخص شده از تیرک پرچم بایستید و در حالتی که یک ضلع ربع دایره به صورت افقی است، عقربهٔ آن را در حالتی قرار دهید که نوک تیرک را نشان دهد. محل عقربه را روی محیط ربع دایره علامت

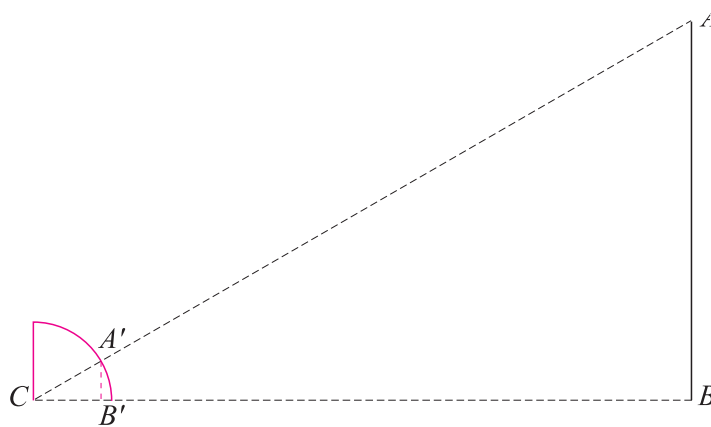
۱- در صورتی که امکان این کار را ندارید، در کلاس بمانید و ارتفاع تخته یا دیوار را اندازه بگیرید.

بزنید. فاصله ضلع افقی ربع دایره تا سطح زمین تقریباً به اندازه قد شما خواهد بود.

۳- حال به کلاس برگردید و ربع دایره مقوایی را روی یک کاغذ بگذارید. مرکز ربع دایره را C و محل علامت گذاری شده روی محیط ربع دایره را A' بنامید. از A' خط عمود بر ضلع افقی ربع دایره را رسم کنید تا این ضلع را در نقطه ای قطع کند و این نقطه را B' بنامید. در مثلث قائم الزاویه CA'B'، طول ضلع های A'B' و CB' را مستقیماً با خط کش اندازه گیری کنید.

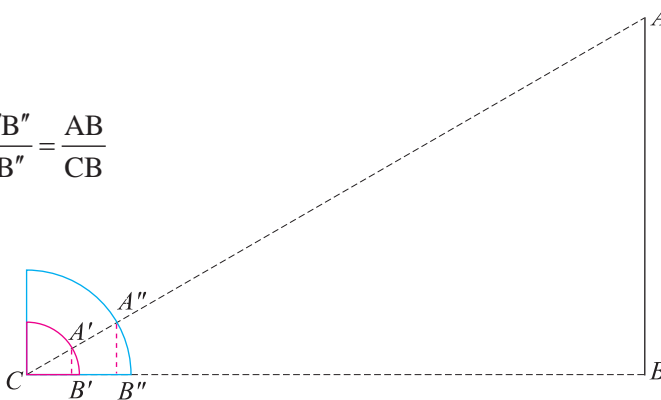
احمد یک ربع دایره به شعاع ۱۰ سانتی متر ساخته بود و عقربه او با ضلع افقی ربع دایره زاویه ۲۳ درجه ساخته بود. فاصله او با تیرک پرچم ۱۷ متر بود و قد احمد ۱/۶۵ متر بود.

۴- با استفاده از شکل زیر و نتایج فعالیت صفحه ۱۴۰ طول تیرک پرچم را حساب کنید.

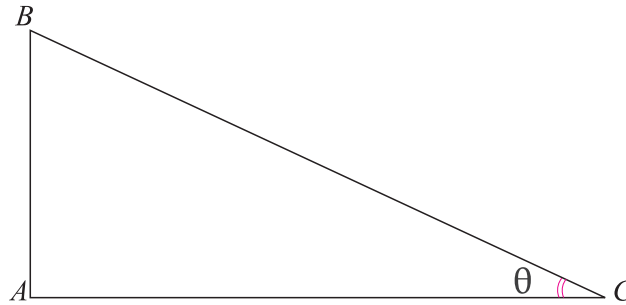


در انجام این فعالیت، هریک از شما ممکن است ربع دایره مقوایی خود را بسازد که احتمالاً هم اندازه نیستند. آیا این مطلب در محاسبه طول تیرک پرچم تأثیری خواهد داشت؟ برای مثال، فرض کنید حسن یکی دیگر از دانش آموزان است و ربع دایره ای ساخته است که شعاع آن دو برابر شعاع ربع دایره احمد است. با این فرض که حسن و احمد هم قد هستند و حسن در همان نقطه ای که احمد ایستاده بود، ایستاده است، محاسبات این دو نفر چه تفاوتی با هم خواهد داشت؟ شکل زیر نشان می دهد که این دو نفر نسبت های متفاوتی را تشکیل می دهند، ولی این دو نسبت مساوی اند.

$$\frac{A'B'}{CB'} = \frac{A''B''}{CB''} = \frac{AB}{CB}$$

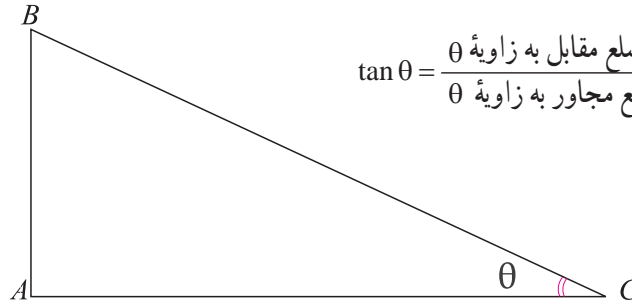


همان طور که مشاهده می‌شود، احمد از نسبت $\frac{A'B'}{CB'}$ و حسن از نسبت $\frac{A''B''}{CB''}$ برای حل مسئله استفاده می‌کند و مقدار این دو نسبت مساوی‌اند. در فعالیت صفحه ۱۴۰ دیدیم که این نسبت، عددی است که فقط بستگی به زاویه تشکیل شده در رأس C دارد. بنا به تعریف، این نسبت را تانژانت آن زاویه می‌نامند. در یک مثلث قائم‌الزاویه مانند زیر که یک زاویه آن θ نامیده شده است، ضلع AB را ضلع روبه‌رو به این زاویه و ضلع AC را ضلع مجاور به این زاویه می‌نامند.



اگر θ یک زاویه حاده (تند) باشد، تانژانت آن را با $\tan\theta$ نشان می‌دهند^۱. تعریف تانژانت نشان می‌دهد که:

در یک مثلث قائم‌الزاویه، اگر θ یک زاویه حاده آن باشد، $\tan\theta$ برابر است با تقسیم طول ضلع مقابل به θ به طول ضلع مجاور به θ .



$$\tan \theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } \theta}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } \theta} = \frac{AB}{AC}$$

برای مثال، $\tan 26^\circ$ تقریباً برابر 0.487 است، یعنی $\tan 26^\circ \approx 0.487$.

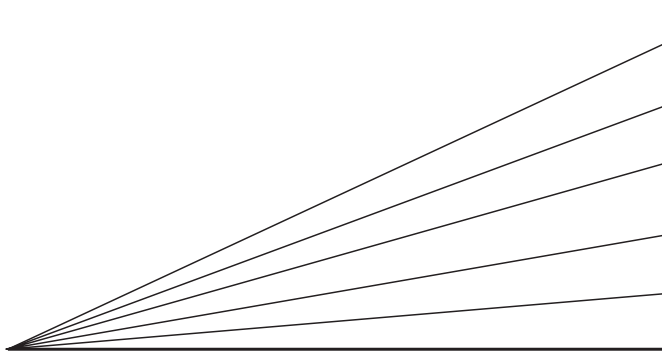


تمرین در کلاس

- یک جدول تشکیل دهید که در آن تانژانت زاویه‌های 23° ، 30° ، 40° ، 45° و 60° درجه به طور تقریبی با رسم مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری مستقیم با خط‌کش و محاسبه نسبت‌ها، محاسبه شده باشند.
- با توجه به جدول، اگر زاویه حاده‌ای بزرگ شود تانژانت آن چه تغییری خواهد کرد؟

^۱ \tan مخفف لغت انگلیسی tangent است. در برخی کتاب‌ها تانژانت را با tg نیز نشان می‌دهند.

۳- شکل زیر زاویه‌های متفاوتی را نشان می‌دهد که ضلع مجاور به آن‌ها ثابت است ولی ضلع روبه‌روی به آن‌ها متفاوت است. درستی ادعای خود در بند (۲) را از طریق شکل نشان دهید.



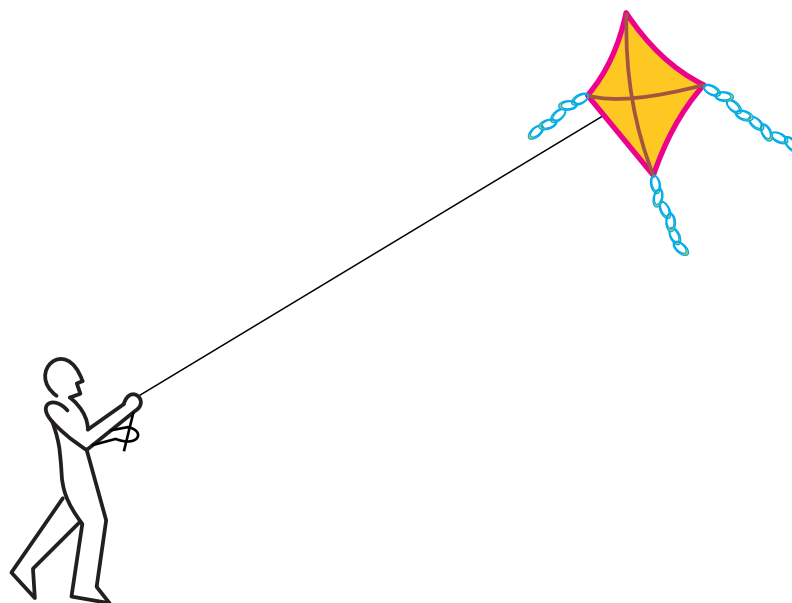
۴- اگر زاویه‌ای به صفر نزدیک شود تا نزدیکی آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی

جمشید بن مسعود بن محمود طیب کاشانی ملقب به غیاث‌الدین در سال ۷۹۰ ق در کاشان متولد شد. او یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان، منجمان و زیج‌نویسان ایرانی دوره اسلامی است. او ریاضی‌دانی هوشمند، مخترع، نقاد و صاحب افکار عمیق و مسلط بر آثار ریاضی‌دانان قبل از خود بود. او در فن محاسبه و به کار بستن روش‌های تقریبی بسیار توانمند بود. او برای اولین بار محاسبه عدد π تا شانزده رقم اعشار و محاسبه $\sin 1^\circ$ تا بیست و دو رقم اعشار را انجام داده است. او در محاسبه عدد π که با دقت 10^{-17} است از ابزار مقدماتی در محاسبات که از مرز جذرگرفتن تجاوز نمی‌کند، استفاده نموده است و به قول تاریخ‌نگاران ریاضیات اروپا این اثر را شاهکار فن محاسبه نامیدند. او در محاسبه $\sin 1^\circ$ با استفاده از تشکیل معادله جبری و استفاده از قضایای هندسی و حل معادله به روش تکرار که در ریاضیات حال حاضر بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد به محاسبه پرداخته است. او روشی برای محاسبه ریشه n ام یک عدد صحیح بیان می‌کند که ریاضی‌دانان اروپایی در قرن نوزدهم آن را ابداع کرده و به روش «روفینی – هورنر» معروف است. او کسرهای اعشاری را به صورت روش مند معرفی و به کار برد. از او آثار بسیاری از جمله در رساله محیطیه، رساله وتر و جیب، مفتاح الحساب و ... را می‌توان نام برد. او در سال ۸۳۲ ق در رصدخانه سمرقند درگذشته است.

پس از حل مسئله یافتن طول تیرک پرچم، معلم مسئله دیگری را مطرح ساخت که شباهت بسیاری به مسئله اول داشت.

معلم پرسید: اگر شما بادبادکی را به هوا بفرستید، آیا می‌توانید بفهمید که چقدر از سطح زمین فاصله گرفته است؟



احمد گفت: هر چقدر نخ بیشتری را رها کرده باشیم بادبادک بالاتر رفته است، اگر بدانیم چقدر نخ فرستاده شده است می‌توانیم بفهمیم بادبادک چقدر بالا رفته است. (آیا این فکر احمد درست بود؟)
حسن گفت: اما اگر شدت باد کم شود، هر چقدر هم که نخ فرستاده باشیم بادبادک پایین می‌آید و زاویه راستای نخ با سطح زمین کم می‌شود، پس فقط با دانستن مقدار نخ فرستاده شده نمی‌توان فهمید بادبادک چقدر بالا رفته است.

معلم گفت: پس چه چیز دیگری را برای حل این مسئله باید بدانیم؟

احمد گفت: به نظر می‌رسد زاویه نخ با سطح زمین هم مهم است و اگر این زاویه را بدانیم شاید بتوانیم فاصله بادبادک تا سطح زمین را محاسبه کنیم.

آیا شما می‌توانید دلیل درستی حدس احمد را بیان کنید؟ فرض کنید ۴۵ متر نخ رها شده است و زاویه نخ با سطح زمین ۳۹ درجه باشد و فاصله دست کسی که بادبادک را هوا کرده است از سطح زمین یک متر و پنجاه و پنج سانتی‌متر باشد.

در فعالیت زیر شما می‌توانید شیوه یافتن ارتفاع بادبادک را بیابید.

فعالیت

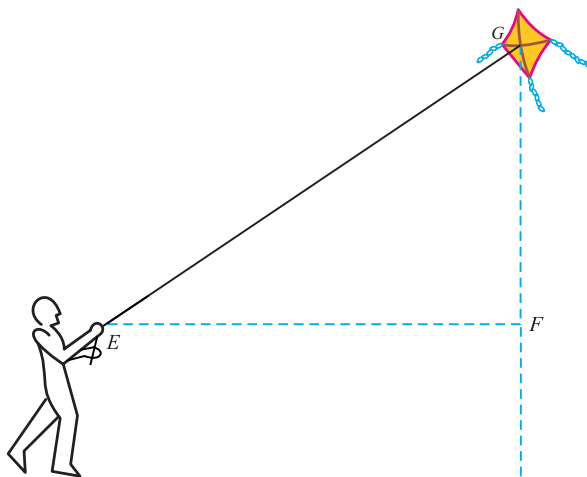


۱- یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید که یک زاویه آن 39° درجه باشد. رأس قائمه را A و رأس مربوط به زاویه 39° درجه را B و رأس دیگر را C بنامید.

۲- با اندازه‌گیری مستقیم، نسبت $\frac{AC}{CB}$ را حساب کنید و آن را t بنامید. با مروری بر فعالیت صفحه 14° نتیجه بگیرید که این نسبت بستگی به کوچکی یا بزرگی مثلث قائم‌الزاویه‌ای که رسم کرده‌اید ندارد.

۳- مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر بگیرید که وتر آن نخ بادبادک و یک ضلع آن خط موازی زمین و ضلع دیگر آن خط عمود از بادبادک به سطح زمین است. طبق شکل زیر رأس‌های آن نام‌گذاری شده‌اند، نتیجه بگیرید:

$$t = \frac{FG}{EG}$$

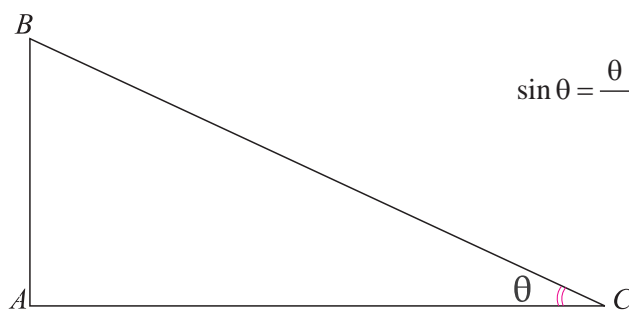


۴- با استفاده از تساوی بالا و دانستن مقدار t و مقدار EG و فاصله دست کسی که بادبادک را هوا کرده تا زمین، ارتفاع بادبادک را حساب کنید.

در حل مسئله بالا عدد t که عددی وابسته به زاویه 39° درجه بود، نقش مهمی را بازی کرد. این عدد را سینوس زاویه 39° درجه می‌نامند.

اگر زاویه حاده‌ای باشد، و مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که یک زاویه آن θ باشد، حاصل تقسیم طول ضلع روبه‌رو به زاویه θ به طول وتر را، سینوس θ می‌نامند و با $\sin\theta$ نشان می‌دهند.

فعالیت صفحه 14° نشان می‌دهد، این مقدار بستگی به کوچکی یا بزرگی مثلث رسم شده ندارد و فقط به زاویه θ بستگی دارد.



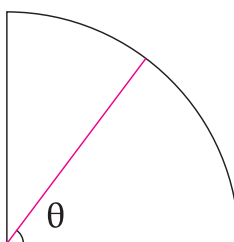
$$\sin \theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

برای مثال، $\sin 39^\circ$ تقریباً برابر است با $0/629$ ، یعنی $\sin 39^\circ \approx 0/629$.



تمرین در کلاس

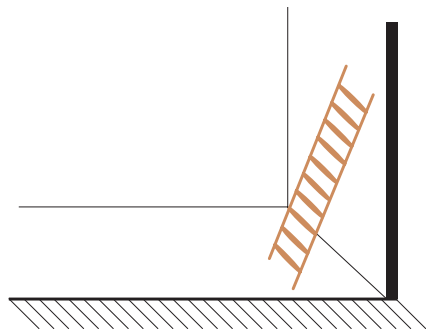
- ۱- یک جدول تشکیل دهید که در آن سینوس زاویه‌های 23° ، 30° ، 40° ، 45° و 60° درجه به طور تقریبی با رسم مثلث قائم الزاویه و اندازه‌گیری مستقیم با خط‌کش و محاسبه نسبت‌ها، محاسبه شده باشند.
- ۲- با رسم یک ربع دایره به شعاع ۱، برای یک زاویه حاده θ که در زیر نشان داده شده است، $\sin \theta$ را به صورت طول یک پاره خط، در شکل نشان دهید.



- ۳- در شکل بالا، اگر زاویه θ بزرگ شود سینوس آن چه تغییری خواهد کرد؟ از روی شکل و جدول درستی ادعای خود را نشان دهید.
- ۴- اگر زاویه θ به صفر نزدیک شود سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.
- ۵- اگر زاویه θ به 90° درجه نزدیک شود سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

کسینوس زاویه

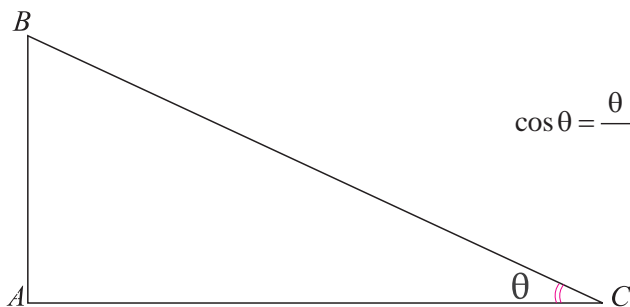
فرض کنید نردبانی را برای رفتن به پشت بام به دیوار تکیه داده ایم. شما می توانید فاصله پای نردبان که بر زمین قرار دارد را تا دیوار حساب کنید. هم چنین زاویه ای که نردبان با سطح زمین می سازد را هم می توانید اندازه بگیرید. آیا با این اطلاعات می توانید طول نردبان را حساب کنید؟



در اکثر مسائل هندسی که زاویه در آن ها نقش مهمی را بازی می کند تاثرات و سینوس زاویه ها در محاسبات بسیار کارگشا هستند. در حل مسئله بالا، عدد دیگری که آن هم از طریق یک زاویه تعیین می شود نقش اصلی را بازی می کند. این عدد را کسینوس زاویه می نامند.

اگر زاویه حاده ای باشد، و مثلث قائم الزاویه ای رسم کنیم که یک زاویه آن θ باشد، حاصل تقسیم طول ضلع مجاور به زاویه θ به طول وتر را، کسینوس θ می نامند و با $\cos\theta$ نشان می دهند.

فعالیت صفحه ۱۴۰ نشان می دهد، این مقدار بستگی به کوچکی یا بزرگی مثلث رسم شده ندارد و فقط به زاویه θ بستگی دارد.



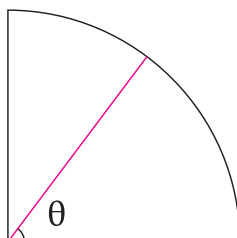
$$\cos\theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

مثلاً، $\cos 27^\circ$ تقریباً برابر است با $0/891$ ، یعنی $\cos 27^\circ \approx 0/891$.



تمرین در کلاس

۱- با رسم یک ربع دایره به شعاع ۱، برای یک زاویه حاده θ که در زیر نشان داده شده است، $\cos\theta$ را به صورت طول یک پاره خط، در شکل نشان دهید.



۲- اگر زاویه حاده θ بزرگ شود کسینوس آن چه تغییری خواهد کرد؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

۳- اگر زاویه حاده θ به صفر نزدیک شود کسینوس آن به چه عددی نزدیک می شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

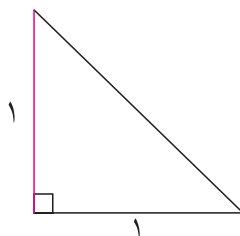
۴- اگر زاویه حاده θ به 90° درجه نزدیک شود کسینوس آن به چه عددی نزدیک می شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

برای زاویه های حاده، از طریق نسبت های طول اضلاع مثلث های قائم الزاویه، اعدادی را ساختم که تانژانت و سینوس و کسینوس این زاویه ها نام داشت. این اعداد را نسبت های مثلثاتی می نامند و در محاسبات هندسی نقش مهمی دارند.



تمرین در کلاس

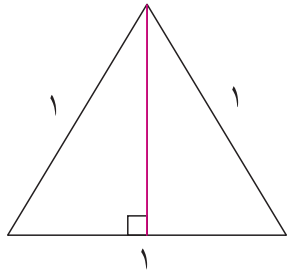
در زیر یک مثلث قائم الزاویه رسم شده است که طول اضلاع مجاور قائمه آن برابر ۱ است.



۱- نشان دهید که زاویه های حاده این مثلث ۴۵ درجه است و طول وتر این مثلث را محاسبه کنید.

۲- سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه ۴۵ درجه را به دست آورید.

در زیر یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱ رسم شده است. ارتفاع، میانه و نیمساز مربوط به هر رأس بر هم منطبق اند و یکی از آن‌ها در یکی از رأس‌ها رسم شده است و دو مثلث قائم‌الزاویه مساوی به دست آمده است.



- ۳- طول اضلاع و زاویه‌های این مثلث‌های قائم‌الزاویه را حساب کنید.
 ۴- سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه‌های 30° و 60° درجه را به دست آورید.

با حل تمرین بالا، می‌توانید جدول زیر را که نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 30° ، 45° و 60° درجه را نشان می‌دهد، به دست آورید.

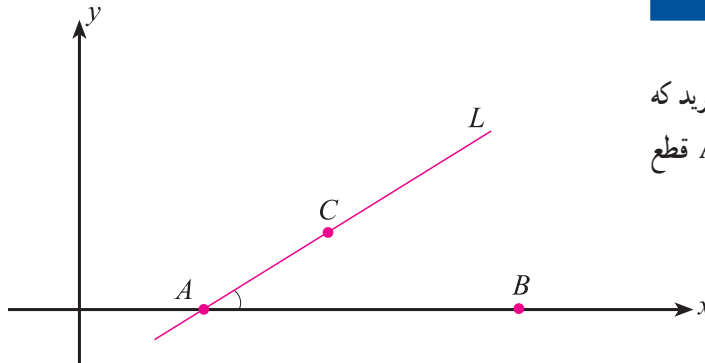
زاویه	30°	45°	60°
سینوس	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
کسینوس	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
تانژانت	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$

توجه کنید

$$\sin(2\theta) \neq 2\sin\theta \quad , \quad \sin(30^\circ) + \sin(45^\circ) \neq \sin(30^\circ + 45^\circ)$$

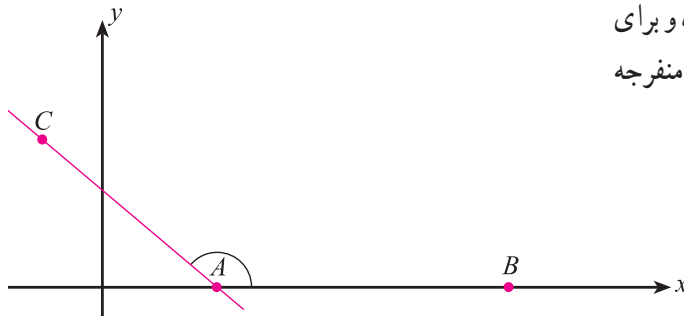
شیب خط و تانژانت

خطی مانند L در صفحه در نظر بگیرید که محور x ها را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کند.

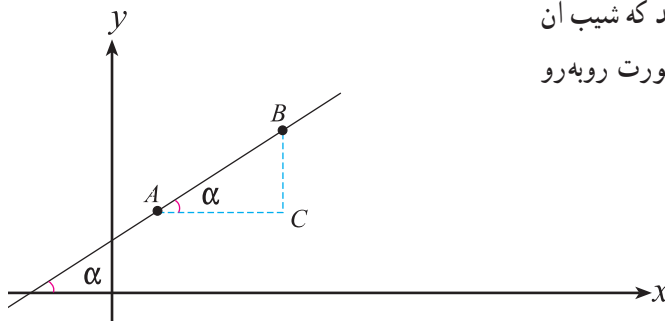


سمت راست نقطه A روی محور x ها نقطه‌ای مانند B انتخاب می‌کنیم و بالای محور x ها روی خط L نقطه‌ای مانند C انتخاب می‌کنیم. زاویه بین دو نیم خط AB و AC را زاویه بین خط L و محور x ها می‌نامند. برای

خط‌های با شیب مثبت این زاویه حاده و برای خط‌های با شیب منفی این زاویه منفرجه (باز) است.



خطی به معادله $y=mx+b$ در نظر بگیرید که شیب آن مثبت باشد. شکل کلی این خط به صورت روبه‌رو است.



یادآوری می‌کنیم که شیب این خط برابر است با $\frac{BC}{AC}$ ، از طرف دیگر می‌دانید که این نسبت همان تانژانت زاویه بین این خط و محور افقی است. بنابراین:

شیب هر خط که با محور افقی زاویه حاده می‌سازد، همان تانژانت زاویه بین خط و محور افقی است، یعنی $\tan \alpha = m$.

m را ضریب زاویه خط $y=mx+b$ نیز می‌نامند.

روابط بین نسبت های مثلثاتی

از آن جا که هر کدام از سینوس و کسینوس و تانژانت^۱ زاویه ها به صورت یک نسبت در یک مثلث به دست می آیند، آن ها را نسبت های مثلثاتی می نامند. این مقادیر بی ارتباط به هم نیستند و اگر یکی از آن ها را بدانیم، دو تای دیگر را می توان به دست آورد.

تمرین در کلاس



- یک مثلث قائم الزاویه رسم کرده و زاویه های حاده آن را θ و α بنامید. می دانید $\alpha + \theta = 90^\circ$.
- ۱- نشان دهید $\cos \alpha = \sin \theta$ و $\cos \theta = \sin \alpha$.
 - ۲- برای زاویه حاده θ نشان دهید $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$ و $\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$.

دو زاویه که جمع آن ها 90° درجه شود، زاویه های متمم می نامند. در مثلث های قائم الزاویه، زاویه های حاده آن متمم یکدیگرند. تمرین بالا نشان می دهد که سینوس یک زاویه با کسینوس متمم آن زاویه مساوی است، هم چنین کسینوس یک زاویه با سینوس متمم آن زاویه مساوی است.

فعالیت



- یک زاویه حاده رسم کنید و آن را θ بنامید.
- ۱- یک مثلث قائم الزاویه روی اضلاع زاویه θ به گونه ای رسم کنید که وتر آن طول ۱ داشته باشد. رأس قائمه را C و رأس زاویه θ را A و رأس دیگر را B بنامید.
 - ۲- از روی تعریف نسبت های مثلثاتی نتیجه بگیرید:

$$AC = \cos \theta, \quad CB = \sin \theta, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$$

۳- نشان دهید برای زاویه حاده θ داریم $0 < \sin \theta < 1$ و $0 < \cos \theta < 1$.

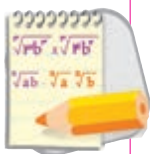
۱- برای زاویه ها یک نسبت مثلثاتی دیگر نیز به نام کتانژانت تعریف می شود که در این کتاب نیامده است. کتانژانت یک زاویه θ را با $\cot \theta$ نشان می دهند

و به صورت $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ تعریف می کنند.

برای سادگی، در نوشتن توان‌های عبارت‌هایی مانند $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ به جای $(\sin\theta)^2$ می‌نویسیم $\sin^2\theta$ یا به جای $(\cos\theta)^3$ می‌نویسیم $\cos^3\theta$. توجه داشته باشید که $\sin^2\theta$ به معنای (\sin^2) است.

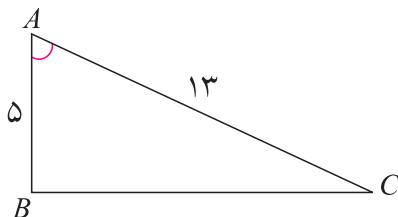
توجه کنید

$$\sin^2\theta \neq \sin\theta^2$$



مسائل

۱- در مثلث قائم‌الزاویه زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه رأس A را حساب کنید.



۲- مقدار عددی هر یک از عبارت‌های سمت چپ را به مساوی آن در سمت راست نظیر کنید.

$\sin^2(7^\circ) + \cos^2(7^\circ)$	$\frac{1}{2}$
$\sin(45^\circ) + \cos(45^\circ)$	۲
$\frac{1}{\sin(3^\circ)}$	$\sqrt{2}$
	۱

۳- مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید.

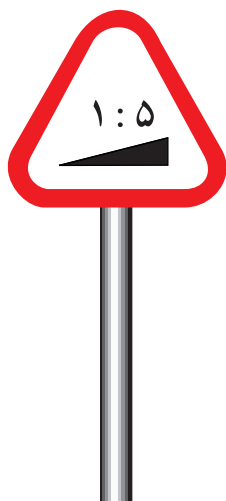
$$A = \frac{2\cos^2(3^\circ) - 2\sin(3^\circ)}{2\tan(45^\circ) + 3\cos^2(6^\circ)}$$

۴- طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه 10° سانتی‌متر و سینوس یکی از زاویه‌های آن $\frac{3}{5}$ است. محیط این مثلث چند سانتی‌متر است؟

۵- یک عدد مثبت کوچک‌تر از ۱ انتخاب کنید و آن را a بنامید. یک زاویه حاده α بسازید که $\sin\alpha = a$ و یک زاویه حاده β بسازید که $\cos\beta = a$.

۶- اگر نردبانی را به دیوار تکیه داده باشیم و فاصله پای نردبان تا دیوار ۱ متر و ۲۵ سانتی‌متر شده باشد و زاویه نردبان با سطح زمین 36° درجه باشد، طول نردبان چقدر است؟ آیا ارتفاع دیوار را هم می‌توانید حساب کنید؟ آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

۷- هواپیمایی می‌خواهد از روی باند بلند شود. ابتدا 30° متر روی باند حرکت می‌کند تا سرعت لازم را پیدا کند. سپس، با زاویه 45° درجه از زمین بلند می‌شود، وقتی به بالای انتهای باند می‌رسد، 14° متر ارتفاع گرفته است. طول کل باند چقدر است؟



۸ - تابلویی در جاده وجود دارد که شیب جاده را به صورت (۱:۵) نشان می‌دهد. معنای این تابلو آن است که هر ۵ متر که به طور افقی جلو رفته باشیم، یک متر ارتفاع جاده اضافه می‌شود. زاویه‌ای که جاده با افق می‌سازد چقدر است؟ (از رسم مثلث و مقاله استفاده کنید.)

۹ - خط $۳x - \sqrt{۳}y = ۱$ با جهت مثبت محور x ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱۰ - معادله خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x زاویه ۶° درجه بسازد و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند.

۱۱ - درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\cos 3^\circ < \cos 4^\circ$

ب) $\tan 7^\circ < \tan 8^\circ$

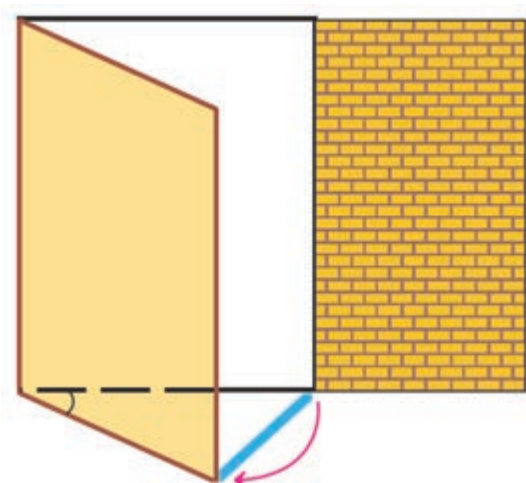
ج) $\sin 2^\circ < \sin 5^\circ$

د) $\cos 7^\circ = \sin 2^\circ$

ه) $\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ = 1$

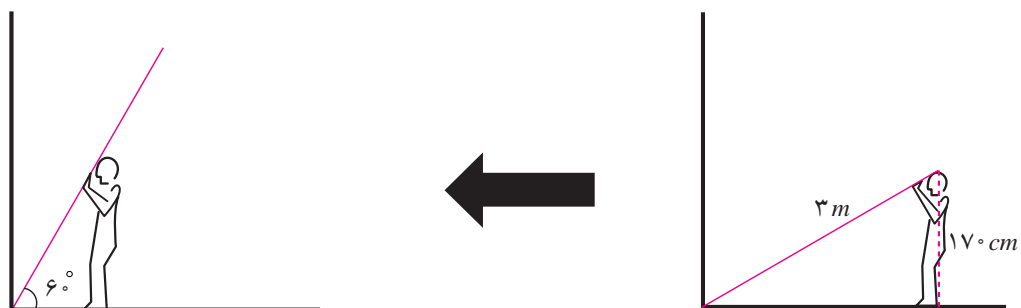
و) $\cos 6^\circ = 2 \cos 3^\circ$

ز) $\frac{\sin 35^\circ}{\sin 55^\circ} = \tan 35^\circ$



۱۲ - میله‌ای فلزی داریم که می‌خواهیم برای باز نگه داشتن یک در، طبق شکل روبه‌رو از آن استفاده کنیم. عرض در ۷° سانتی‌متر است. طول میله چقدر باشد تا زاویه بین در و دیوار ۴° درجه شود؟ اگر طول میله ۶° سانتی‌متر باشد، چه زاویه‌ای بین در و دیوار ایجاد می‌شود؟ (از رسم مثلث و مقاله استفاده کنید.)

۱۳- فردی با قد یک متر و هفتاد سانتی متر می خواهد میله ای به طول ۳ متر را طبق شکل زیر با زاویه 60° درجه بلند کند. او ابتدا یک سر میله را به دیوار تکیه می دهد و میله را تا قد خود بالا می آورد. او آن قدر به سمت دیوار حرکت می کند تا زاویه میله با سطح زمین 60° درجه شود. او چقدر به سمت دیوار حرکت کرده است؟



۱۴- معنای عبارت های $\sin^2\theta$ ، $\sin\theta^2$ و $\sin^2\theta$ را توضیح دهید و بایک مثال برای θ تفاوت آن ها را نشان دهید.



