

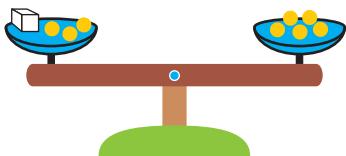
معادلات درجه اول و معادله خط



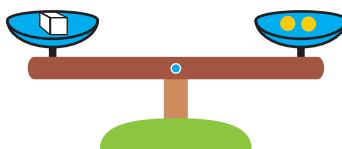
به نظر شما بالا رفتن از پله‌ای که می‌ینید آسان‌تر است یا بالا رفتن از سطح شیبداری که در کنار آن است؟
نسبت بالا رفتن از آن‌ها به مسافت افقی طی شده در آن‌ها چه قدر است؟

معادله

شکل زیر یک ترازوی دوکفه‌ای را نشان می‌دهد که در دو طرف آن چند وزنه‌یک کیلوگرمی و یک جسم با وزن نامعلوم قرار داده شده تا ترازو به حالت تعادل درآید.

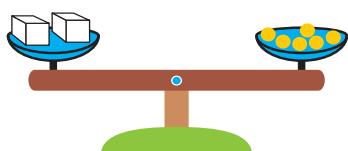


به تعادل درآمدن ترازو به معنای آن است که وزن اجسام قرار گرفته در دو کفه ترازو مساوی است. پس، اگر وزن نامعلوم جسم را x بنامیم، عبارت ریاضی بیان کننده این وضعیت $x+3=5$ است. مقدار x چقدر است که این تساوی برقرار شده است؟ برای پاسخ به این سؤال، می‌توانیم از هر دو کفه ترازو سه وزنه‌یک کیلوگرمی را برداریم؛ که در این صورت باز هم ترازو در حالت تعادل باقی می‌ماند.

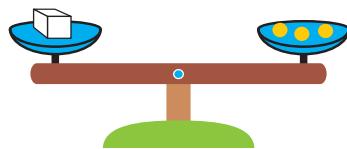


این عمل به معنای آن است که اگر از طرفین تساوی $x+3=5$ عدد ۳ را کم کنیم باز هم تساوی برقرار می‌ماند. یعنی $x+3-3=5-3$ ، پس $x=2$. ترازو نیز نشان می‌دهد که جسم ۲ کیلوگرم وزن دارد. از این مشاهدات می‌توان نتیجه گرفت که اگر از طرفین یک تساوی، عدد یکسانی را کم کنیم یا به آن اضافه کنیم باز هم تساوی برقرار می‌ماند. به عبارت دیگر :

$$\begin{aligned} &\text{اگر } a+c=b+c, \text{ آن گاه } a=b \\ &\text{اگر } a-c=b-c, \text{ آن گاه } a=b \end{aligned}$$



شکل رویه‌رو ترازوی را نشان می‌دهد که در یک طرف آن دو جسم یکسان با وزن نامعلوم و در طرف دیگر آن ۶ وزنه‌یک کیلوگرمی قرار دارد و ترازو به حالت تعادل درآمده است.

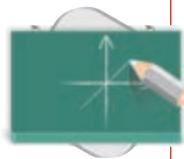


اگر وزن نامعلوم جسم را با x نشان دهیم، عبارت ریاضی بیان کننده این وضعیت $2x = 6$ است. اگر وزن های هر طرف ترازو را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم و از هر کفه ترازو، نیمی از وزن آن را برداریم باز هم تعادل برقرار می ماند زیرا نصف دو وزن مساوی باز هم مساوی اند.

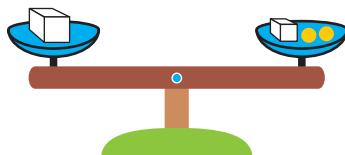
این عمل به معنای آن است که در تساوی $2x = 6$ ، طرفین را بر ۲ تقسیم کرده ایم و باز هم تساوی برقرار مانده است. یعنی $\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$ ، پس $x = 3$. ترازو نیز نشان می دهد وزن جسم ۳ کیلوگرم است. اگر طرفین یک تساوی را در عددی ضرب یا بر عدد مخالف صفری تقسیم کنیم، باز هم تساوی برقرار می ماند. به عبارت دیگر :

اگر $ac = bc$ ، آن گاه $a = b$

اگر $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ و c مخالف صفر باشد، آن گاه $a = b$



محسن آقا مغازه دار است. روزی یک مشتری از او نمک خواست. محسن آقا در مغازه دو بسته نمک، یکی کوچک و یکی بزرگ داشت اما وزن آنها را نمی دانست؛ فقط می دانست که وزن بسته کوچک تر نصف وزن بسته بزرگ تر است. بنابراین بسته بزرگ ترا در یک کفه، و بسته کوچک ترا در کفه دیگر ترازو قرار داد و در کفه دوم آن قدر وزنه گذاشت تا ترازو به حال تعادل درآمد. وزنه های



مورد نیاز برای به تعادل درآمدن ترازو دو وزنه یک کیلوگرمی بود.
۱- آیا می توانید با توجه به شکل توضیح دهید که وزن هر یک از بسته های نمک چقدر است؟

۲- رابطه ریاضی بین وزن هایی را که در دو کفه ترازو قرار دارند، بنویسید و وزن هر بسته را به دست آورید.

۳- رابطه ریاضی دیگری برای حل همین مسئله بنویسید و مسئله را حل کنید.

در عملیات بالا، برای یافتن وزن نامعلوم یک جسم، مقدار وزن نامعلوم را با یک نماد مانند x نشان دادیم و یک تساوی بر حسب x به دست آوردیم. این گونه تساوی ها را معادله، و مقدار نامعلوم را مجھول معادله و یافتن مجھول را حل معادله می نامند. حل یک معادله، با عملیات ریاضی و ساختن یک معادله ساده تر انجام می شود. معادلاتی نظیر معادلاتی که در این فصل روی آنها کار خواهیم کرد، با عملیات زیر که آنها را

عملیات جبری ساده می‌نامند، می‌توان حل کرد.

۱- جمع طرفین معادله با مقدارهای مساوی،

۲- کم کردن مقدارهای مساوی از طرفین معادله،

۳- ضرب طرفین معادله در مقدارهای مخالف صفر مساوی،

۴- تقسیم طرفین معادله بر مقدارهای مساوی مخالف صفر.

با انجام عملیات جبری ساده و محاسبات معمولی می‌توان به معادله‌ای رسید که مجھول معادله در یک طرف و مقادیر معلوم در طرف دیگر قرار گیرند و با این اعمال، معادله حل خواهد شد.

مثال : معادله $10x - 4 = 1$ را حل کنید.

$$10x - 4 = 1$$

$$10x - 4 + 4 = 1 + 4$$

$$10x = 5$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{5}{10}$$

$$x = \frac{5}{10} = 0.5$$

مثال : معادله $2(3x + 4) = -1 - 3x$ را حل کنید.

$$2(3x + 4) = -1 - 3x$$

$$6x + 8 = -1 - 3x$$

$$6x + 8 + 3x = -1 - 3x + 3x$$

$$9x + 8 = -1$$

$$9x + 8 - 8 = -1 - 8$$

$$9x = -9$$

$$x = \frac{-9}{9} = -1$$

مثال : معادله $\frac{2}{5}(x - 4) = 2x + 1$ را حل کنید. برای حل یک مسئله معمولاً راه‌های متفاوتی را می‌توان در پیش گرفت. برای مثال این معادله را با دو روش حل می‌کنیم.

روش اول

$$\frac{2}{5}(x - 4) = 2x + 1$$

$$\frac{5}{2} \times \frac{2}{5}(x - 4) = \frac{5}{2} \times (2x + 1)$$

$$x - 4 = 5x + \frac{5}{2}$$

روش دوم

$$\frac{2}{5}(x - 4) = 2x + 1$$

$$\frac{2}{5}x - \frac{8}{5} = 2x + 1$$

$$\frac{2}{5}x - \frac{8}{5} - 2x = 1$$

$$x - 4 - 5x = 5x + \frac{2}{5} - 5x$$

$$-4x - 4 = \frac{2}{5}$$

$$-4x - 4 + 4 = 4 + \frac{2}{5}$$

$$-4x = \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{\frac{6}{5}}{-4} = -\frac{1}{20}$$



توضیح در ریاضی

۱- معادله $81 = 8(2x - 7) + 3$ را حل کنید و در هر مرحله از حل، درستی عملیات خود را با ذکر دلیل توضیح دهید.

۲- این معادله را از راه دیگری حل کنید. در هر مرحله، علت درستی عملیات خود را توضیح دهید.



فعالیت

۱- چهار معادله زیر را حل کنید.

$$(الف) 2x - 6 = 12 \quad (ب) 3x - 6 = 12 + x$$

$$(ج) 4x - 12 = 24 \quad (د) x - 3 = 6$$

۲- جواب این معادلات با هم چه رابطه‌ای دارند؟

۳- هر کدام از این معادلات را با اعمال جبری ساده، به ترتیب زیر از یک دیگر به دست آورید.

$$(الف) \rightarrow (د) \rightarrow (ج) \rightarrow (ب) \rightarrow (الف)$$

معادلاتی را که با عملیات جبری ساده، از روی هم به دست می‌آیند

معادلات هم ارز می‌نامند.

معادلات هم ارز جواب‌های یکسانی دارند. برای حل یک معادله، سعی می‌کنیم که یک معادله هم ارز با آن به دست آوریم که شکل ساده‌ای داشته باشد.

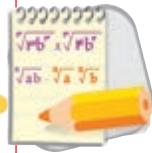
اگر مجھول معادله‌ای را با x نشان داده باشیم و پس از ساده کردن به صورت $ax + b = 0$ درآید، به طوری که $a \neq 0$ ، آن را یک معادله درجه اول می‌نامند.

در معادله $a \cdot x + b = 0$ اعداد مشخصی هستند و برای حل آن، طرفین این معادله را با $-b$ - جمع می‌کنیم و به معادله $a \cdot x = -b$ می‌رسیم. سپس با تقسیم طرفین بر a ، نتیجه می‌شود $x = -\frac{b}{a}$.

توجه کنید

$$x = \frac{-b}{a} \text{ برابر است با } 2x = -2$$

$$x = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \text{ برابر است با } -2x = 1$$



مسئلہ

۱- با یک خط، هر معادله در جدول (۱) را به عبارت فارسی بیان کننده همان معادله، در جدول (۲) (در صورت وجود) وصل کنید.

جدول (۱)

$2 - \frac{x}{3} = -2$
$\frac{y}{2} = 3y$
$\frac{x}{2} + 5 = x - 2$
$\frac{a}{2} = 3a$
$\frac{x}{3} - 2 = -2$

جدول (۲)

نصف عددی با عدد پنج جمع شده است و برابر تفیق ۲ از آن عدد شده است.

حاصل تقسیم عددی بر ۳ را از ۲ کم کرده ایم، حاصل برابر (-2) شده است.

نصف عددی برابر سه برابر همان عدد است.

۲- معادلات زیر را حل کنید.

$$1) 16 - 4y = 0$$

$$2) 100 = 50 - 4d$$

$$3) \frac{a-3}{4} = 2$$

$$4) 7 - 2e = 19 - 4e$$

$$5) 2/5 + 0/3x = -1/1$$

$$6) 4(5 - 2y) = 5/6y$$

$$7) \frac{12 - 5c}{5} = -\frac{1}{10}$$

- ۳- مجموع سه عدد زوج متوالی ۴۲ می باشد. این اعداد را به دست آورید.
- ۴- از تعداد ییسکویتی که مریم داشت نیم را به مادرش و نیم بقیه را به برادرش داد. برای خودش ۵ ییسکویت باقی ماند. تعداد ییسکویتهای اولیه او چند تا بوده است؟
- ۵- به ازای چه مقداری از t ، تساوی $\frac{2t+1}{t-1} = 0$ برقرار می شود.



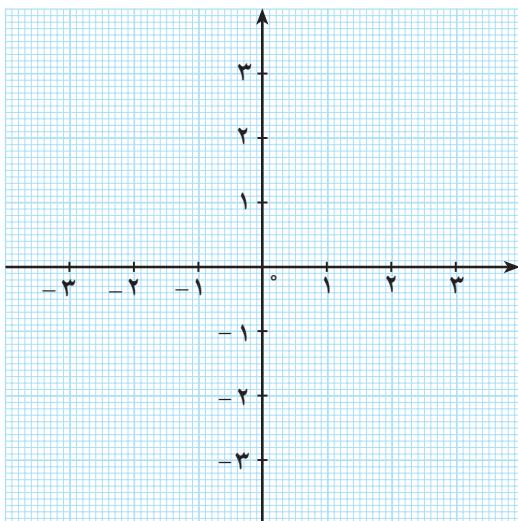
مسئله زیر در کتاب **مفتاح المعاملات باب چهلام** آمده است:

بازرگانی یک درهم به غلامش داد و گفت که به بازار برو و به اندازه یک درهم خریزه بخر و به باربر بده تا بیاورد. هزینه بیست خریزه یک درهم است و باربر شصت خریزه را با یک درهم به مقصد می رساند. غلام رفت و خریزه خرید و به همراه باربر آورد. غلام چند خریزه آورده است؟

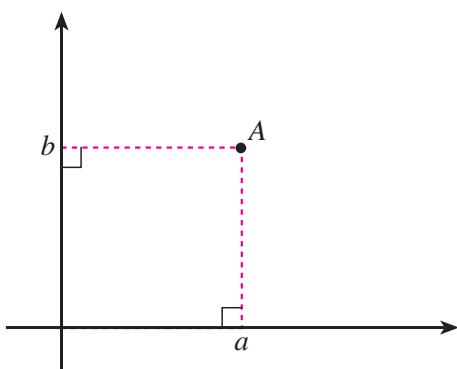


دستگاه مختصات

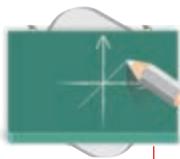
دو محور عمود بر هم در صفحه رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو محور را مبدأ این مختصات در نظر می‌گیریم. پاره خط واحد هر دو محور را یکسان در نظر می‌گیریم. این مختصات را یک دستگاه مختصات برای صفحه می‌نامیم.



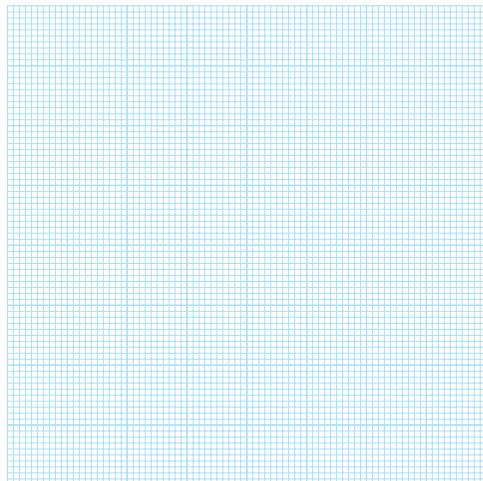
از یک نقطه دلخواه مانند A در صفحه، خط‌هایی را عمود بر این دو محور رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط‌ها با محورها اعدادی را نشان می‌دهند که مختصات نقطه A نامیده می‌شوند.



در شکل بالا زوج $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ مختصات نقطه A است، a را طول نقطه A و b را عرض نقطه A می‌نامند. در این شکل، محور افقی را محور طول‌ها و محور عمودی را محور عرض‌ها می‌نامند.



تئوری درستگاه



- ۱- یک دستگاه مختصات در صفحه رسم کنید.
- ۲- نقاطی در صفحه بیابید که مختصات آنها $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشند و به ترتیب آنها را، A، $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ و D، $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ بنامید.
- ۳- خط گذرنده از دو نقطه A و D را رسم کنید و بررسی کنید که کدام یک از نقاط به مختصات $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد.
- ۴- در مورد طول و عرض نقاطی که روی این خط قرار دارند چه حدسی می‌زنید؟
- ۵- نقاطی که طول آنها مثبت و عرض آنها صفر است را روی شکل مشخص کنید.
- ۶- مختصات نقاطی که روی محور طول‌ها و سمت چپ محور عرض‌ها هستند، چه ویژگی دارند؟
- ۷- نقاطی که عرض‌های آنها منفی و طول آنها صفر است را روی شکل مشخص کنید.
- ۸- مختصات نقاطی که روی محور عرض‌ها و بالای محور طول‌ها هستند، چه ویژگی دارند؟
- ۹- نقاطی از صفحه را که طول و عرض آنها مثبت است روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را ربع اول می‌نامند).
- ۱۰- نقاطی از صفحه را که طول آنها منفی و عرض آنها مثبت است، روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را ربع دوم می‌نامند).
- ۱۱- نقاطی از صفحه را که طول آنها منفی و عرض آنها منفی است، روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را ربع سوم می‌نامند).
- ۱۲- نقاطی از صفحه را که طول آنها مثبت و عرض آنها منفی است، روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را ربع چهارم می‌نامند).



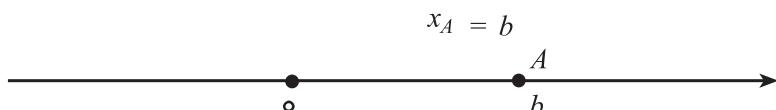
فاصله بین دو نقطه

روی محور اعداد، مبدأ O و نقطه نظیر ۴ را A و نقطه نظیر ۶ را B بنامید.



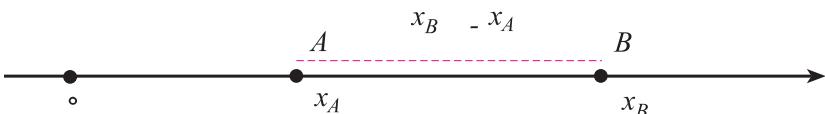
- ۱- طول پاره خط های OA و OB چقدر است؟
- ۲- طول پاره خط AB چقدر است؟ فاصله دو نقطه نظری 4 و 6 از یکدیگر چقدر است؟
- ۳- دو عدد مثبت دلخواه x و y به صورت $y < x$ در نظر بگیرید. نقاط نظری این دو عدد را روی محور اعداد به ترتیب C و D بنامید. طول پاره خط های OC و OD چقدر است؟
- ۴- طول پاره خط CD چقدر است؟ فاصله نقاط نظری x و y از یکدیگر چقدر است؟

اگر A یک نقطه روی محور اعداد باشد که نظری عدد b است، b را طول نقطه A می‌نامند و آن را با x_A نشان می‌دهند.



اگر A و B دو نقطه روی محور اعداد باشند که A سمت چپ B قرار دارد، داریم :

$$\text{فاصله } B \text{ و } A = x_B - x_A$$

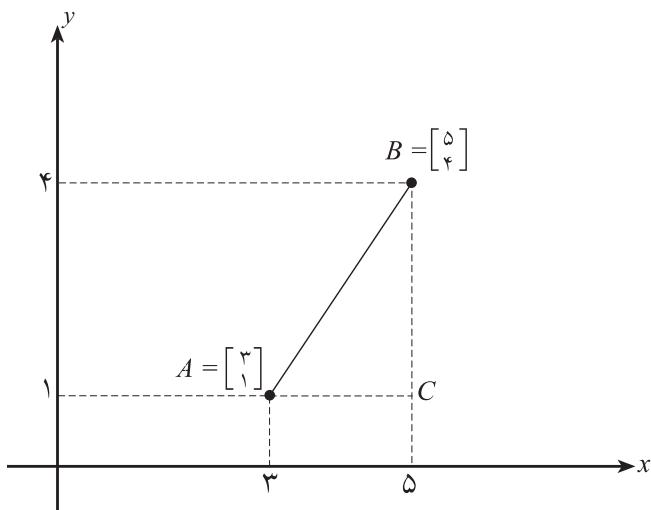


به طور کلی، برای دو نقطه A و B روی محور اعداد، بدون توجه به آن که کدام نقطه سمت چپ دیگری است، فاصله بین این دو نقطه برابر است با $|x_A - x_B|$.

اگر دو نقطه A و B روی محور y ها قرار داشته باشند، فاصله A تا B چقدر است؟

اگر بخواهیم فاصله دو نقطه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ را در صفحه بیابیم، ابتدا این نقاط را در صفحه مشخص

می‌کنیم. طبق شکل زیر یک مثلث قائم الزاویه تشکیل می‌دهیم.

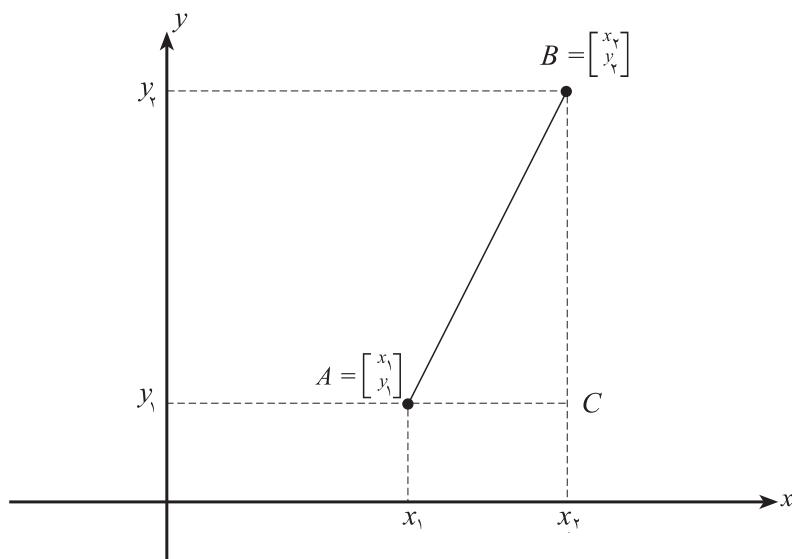


فاصله بین دو نقطه A و B، طول پاره خط AB، یعنی وتر مثلث قائم الزاویه ACB است. طول AC برابر ۵ و طول BC برابر ۳ است، پس با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم :

$$\text{طول AB} = \sqrt{(5-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

به طور کلی، برای یافتن فاصله دو نقطه دلخواه $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ می توانیم مانند بالا عمل کنیم.

فرض کنید که این دو نقطه در صفحه به شکل زیر باشند و طبق شکل زیر یک مثلث قائم الزاویه تشکیل می دهیم.



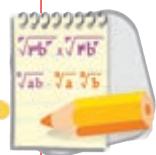
پاره خط AB وتر مثلث قائم الزاویه ACB است. طول AC برابر $x_2 - x_1$ و طول BC برابر $y_2 - y_1$ است، پس داریم :

$$\text{طول AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

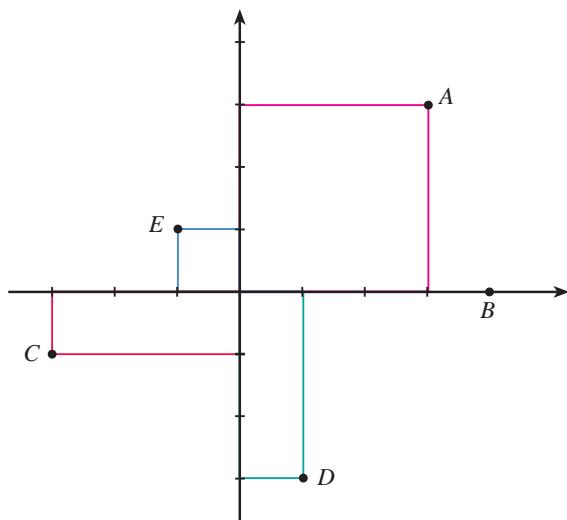
مثال : فاصله دو نقطه $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ را یابید.

با جایگذاری در فرمول فاصله دو نقطه داریم :

$$\text{B و A} = \sqrt{(-3-2)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$



۱- در شکل زیر مختصات نقاط داده شده را به دست آورید و فاصله نقطه A تا هر یک از نقاط دیگر را محاسبه کنید.



۲- سه نقطه $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ رأس‌های یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

- الف) مثلث را رسم کنید.
- ب) طول اضلاع و محیط این مثلث را به دست آورید.
- ج) نوع این مثلث را از لحاظ متساوی الساقین بودن یا قائم‌الزاویه بودن مشخص کنید.

رابطهٔ خطی

برخی پدیده‌ها با هم رابطه دارند. برای مثال، میزان آب رودخانه‌ها با میزان باران آمده رابطه دارد. میزان توانایی جسمانی شما با میزان ورزشی که می‌کنید رابطه دارد. نمره امتحانی شما با میزان تلاش شما در یادگیری دروس رابطه دارد. پایه تحصیلی که در آن مشغول تحصیل هستید با سن شما رابطه دارد. به همین ترتیب موارد بسیاری را می‌توانید بیابید که با هم رابطه داشته باشند.



۱- در تساوی زیر به جای مرع، علامت یکی از چهار عمل اصلی را قرار دهید.

$$\dots \square \dots = 10$$

۲- در نقطهٔ چین سمت چپ، یک عدد دلخواه قرار دهید، سپس در نقطهٔ چین دیگر عددی قرار دهید که تساوی برقرار باشد.

۳- آیا برای انتخاب عدد اول محدودیتی وجود دارد؟

۴- آیا برای عدد دوم اجباری وجود دارد؟

در فعالیت بالا، هر نقطهٔ چین جای یک عدد را نشان می‌داد و می‌توانستیم آن‌ها را با دو نماد مانند \times و \wedge نشان دهیم. تساوی بالا نیز یک معادله را نشان می‌دهد، با این تفاوت که در آن دو مجهول وجود دارد که یکی را به انتخاب خود می‌توانستیم تعیین کنیم ولی دیگری از طریق حل معادله مشخص می‌شد. تشخیص رابطهٔ بین چیزهایی که با آن‌ها سروکار داریم، نقشی اساسی در زندگی ما دارند. در فعالیت‌های زیر یک نوع ساده از روابط‌ها مورد بررسی قرار خواهد گرفت.



سارا و اکرم دو خواهر هستند. وقتی اکرم به دنیا آمد، سارا ۴ ساله بود.

۱- وقتی سارا ۷ ساله شود، اکرم چند سال خواهد داشت؟

۲- وقتی اکرم ۲۰ ساله شود، سارا چند ساله خواهد شد؟

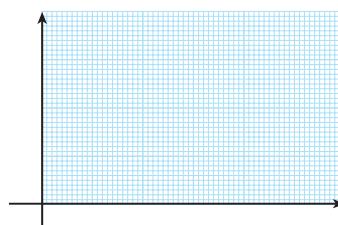
۳- اگر سن اکرم را با y و سن سارا را با x نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین این دو مقدار وجود دارد؟

۴- اگر اکرم ۵ سال بزرگ‌تر شود، سارا چند سال بزرگ‌تر می‌شود؟ اگر اکرم ۸ سال بزرگ‌تر شود، سارا چند سال بزرگ‌تر می‌شود؟

۵- جدول زیر را کامل کنید.

سن سارا	۴	۷	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۱۴	<input type="text"/>	<input type="text"/>
سن اکرم	۰	<input type="text"/>	۵	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۱۳	<input type="text"/>

سن اکرم



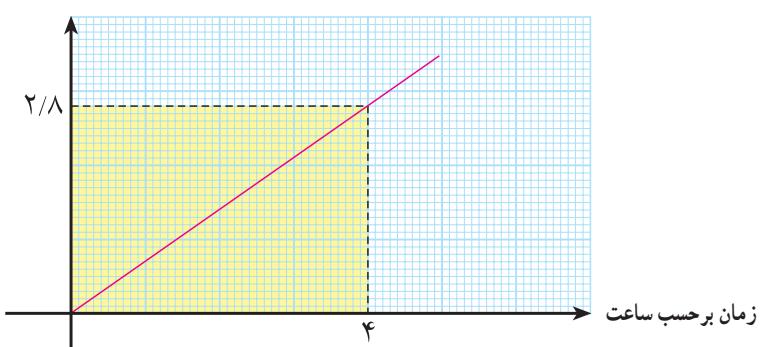
۶- نقاط این جدول را در شکل مقابل مشخص و به هم وصل کنید. چه شکلی به دست می آید؟

نمودار بالا، رابطه بین سن سارا و سن اکرم را نشان می دهد. از آن جا که این رابطه به صورت $y = x + 4$ یا $y = x - 4$ باشد، نمودار بالا را نمودار معادله $y = x$ نیز می نامند. در فعالیت زیر فرض بر این است که نمودار رابطه داده است و از طریق آن می خواهیم با بیان ریاضی آن رابطه و تشکیل جدول آن رابطه، به سوالات مطرح شده پاسخ دهیم.



یک خودرو از زاهدان به طرف کرمان حرکت کرده است. نمودار رابطه بین زمان و مسافتی که خودرو طی می کند به شکل زیر است. محور افقی، نشان دهنده زمان و محور عمودی نشان دهنده مسافت طی شده توسط خودرو است. هر یک واحد روی محور افقی معادل یک ساعت و هر یک واحد روی محور عمودی معادل ۱۰۰ کیلومتر است.

مسافت بر حسب ۱۰۰ کیلومتر



از روی نمودار صفحهٔ قبل به سؤالات زیر جواب دهید.

۱- این خودرو ۴ ساعت پس از حرکت چند کیلومتر با زاهدان فاصله دارد؟

۲- جدول زیر را کامل کنید.

ساعت	۰	۲	۴	۶
فاصله تازاهدان	۰			

۳- اگر x نشان‌دهنده مقدار زمان گذشته (برحسب ساعت) از شروع حرکت و y نشان‌دهنده مسافت طی شده توسط خودرو (برحسب کیلومتر) باشد، چه رابطه‌ای بین x و y وجود دارد؟ معادله آن را بنویسید.

۴- اگر فاصله بین زاهدان و کرمان 540 کیلومتر باشد، چند ساعت طول می‌کشد تا این خودرو به کرمان برسد؟ درستی جواب خود را از طریق نمودار و معادله‌ای که به دست آورده‌اید، نشان دهید. آیا بین این دو جواب تفاوتی وجود دارد؟

۵- این خودرو هر ساعت چند کیلومتر راه می‌رود؟ هر دو ساعت چند کیلومتر راه می‌رود؟ نسبت مسافتی که خودرو طی می‌کند به زمان گذرانده شده چقدر است؟ آیا این نسبت ثابت است؟

در تمامی این فعالیت‌ها با مقدارهایی روبه‌رو بوده‌ایم که با یکدیگر رابطه داشته‌اند. اگر بین مقادیر دو متغیر رابطه برقرار باشد و یکی از آن‌ها را x و دیگری را با y نشان دهیم، بیان ریاضی رابطه بین x و y به صورت معادله‌ای برحسب x و y است. در مثال سن سارا و اکرم این رابطه به شکل $y = x + 4$ بود. در مثال زمان و مسافت طی شده، این رابطه به صورت $y = 7x$ بود.

نمودار همه رابطه‌ها در مثال‌های بالا به صورت خط بودند. در حالت‌هایی که نمودار رابطه بین دو مقدار به صورت خط باشد، گوییم آن دو مقدار به طور خطی به هم مرتبط‌اند و با هم رابطه خطی دارند.

مثال: کارگری ساعتی 1500 تومان دستمزد می‌گیرد. رابطه بین ساعت‌های کار این کارگر و دستمزدی که می‌گیرد یک رابطه خطی است. اگر x میزان ساعت کاری و y دستمزد او باشد، این رابطه به صورت $y = 1500x$ است. ویرگی مشترک رابطه‌های خطی آن است که نسبت افزایش یک متغیر به افزایش (یا کاهش) متغیر دیگر مقداری ثابت است. موارد بسیاری هم وجود دارد که رابطه بین دو متغیر، خطی نیست.



رابطه بین طول ضلع یک مربع و مساحت آن را در نظر بگیرید. طول ضلع مربع را با x و مساحت آن را با y نشان دهید.

۱- رابطه بین x و y را با یک معادله بنویسید.

۲- جدول زیر را کامل کنید.

x	1	2	3	4	5
y		9			

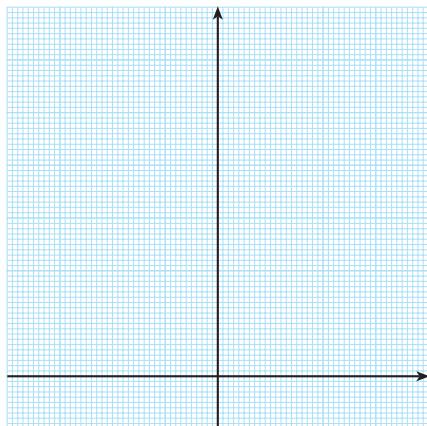
۳- در محورهای مختصات، هر واحد روی محور افقی را نمایش طول ضلع مرتع بحسب سانتی متر و هر واحد روی محور عمودی را نمایش مساحت مرتع بحسب سانتی متر مربع در نظر بگیرید و نقاط به دست آمده در جدول را در صفحه معین کنید.

۴- میزان افزایش مساحت مرتع از ۱ به ۲ افزایش می‌باید حساب کنید. این میزان را وقتی طول ضلع مرتع از ۲ به ۳ افزایش می‌باید حساب کنید. این میزان را وقتی طول ضلع مرتع از ۴ به ۵ افزایش می‌باید حساب کنید. آیا نسبت افزایش مساحت مرتع به افزایش طول ضلع مرتع مقدار ثابتی است؟

۵- اگر بخواهیم این نقاط را به هم وصل کنیم، آیا می‌توان با یک خط همه این نقاط را به هم وصل کرد؟

۶- با کامل کردن جدول زیر، نمودار معادله $y = x^2$ را برای مقادیر مثبت x با دقت مناسب رسم کنید.

x	۰	$\frac{۰}{۲}$	$\frac{۰}{۵}$	$\frac{۰}{۸}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۸}$	۲	$\frac{۲}{۲}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۲}{۶}$	$\frac{۲}{۸}$	۳
x^2					$\frac{۱}{۴۴}$		$\frac{۲}{۵۶}$	$\frac{۳}{۲۴}$		$\frac{۵}{۷۶}$		$\frac{۷}{۸۴}$			



۷- از جدول بالا کمک بگیرید و جدول زیر را کامل کنید.

x	-۳	-۲/۸	-۲/۶	-۲/۴	-۲/۲	-۲	-۱/۸	-۱/۶	-۱/۴	-۱/۲	-۱	...
x^2												

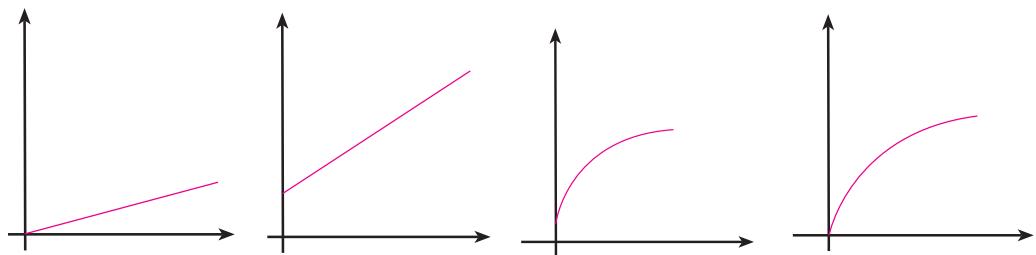
۸- با استفاده از جدول بالا، نمودار معادله $y = x^2$ را برای مقادیر مثبت و منفی x رسم کنید.

به عنوان مثالی دیگر، به رابطه بین سن و قد یک فرد، از نوزادی تا مرحله بلوغ و پس از آن، توجه کنید. میزان افزایش قد نوزاد در سال های اولیه زندگی با میزان افزایش قد در سن های بالاتر یکسان نیست.



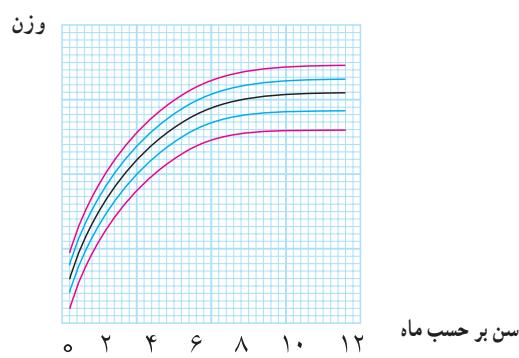
تمرین در کلاس

۱- در شکل های زیر محور افقی نشان دهنده زمان بر حسب ماه و محور عمودی نشان دهنده طول قد یک انسان بر حسب متر می باشد. کدام یک از نمودارهای زیر می تواند نمودار رشد قد یک انسان در طول زمان باشد؟



۲- محل برخورد نمودار با محور y ، نشان دهنده چیست؟

محققان با بررسی فرایند و مراحل رشد کودکان نمودارهایی تنظیم کرده اند. پژوهشگران اطفال از این نمودارها برای بررسی وضعیت رشد کودکان استفاده می کنند.



حل یک مسئله

دانشآموزان مدرسه‌ای تصمیم گرفتند تا در روز نیکوکاری یک بازار خیریه به نفع نیازمندان برگزار کنند. قرار سد در این بازار یک روزه، شربت بفروشند و سود آن را برای نیازمندان مصرف کنند. آنها یک بسته صد تایی لیوان یک بار مصرف به مبلغ هزار تومان و مقداری پودر شربت خریدند. هزینه خود شربت، بدون در نظر گیری قیمت لیوان‌ها، هر لیوان 90° تومان می‌شود و پودر شربت‌های استفاده نشده به فروشگاه پس داده می‌شود.

یکی از دانشآموزان پیشنهاد کرد که هر لیوان شربت را 125° تومان بفروشیم تا سود کافی بیریم. دانشآموز دیگری گفت: اگر به اندازه کافی شربت نفوذشیم ممکن است ضرر کنیم. دانشآموزان تصمیم گرفتند برای تشخیص وضعیت سود و ضرر این کار از معلم ریاضی خود کمک بگیرند.

معلم گفت که ابتدا جدولی تشكیل دهید که در آن به ازای هر تعداد لیوان فروخته شده، میزان هزینه مصرف شده و درآمد حاصل از فروش و سود (یا ضرر) معلوم شده باشد. جدول زیر را جدول هزینه – درآمد می‌نامیم.

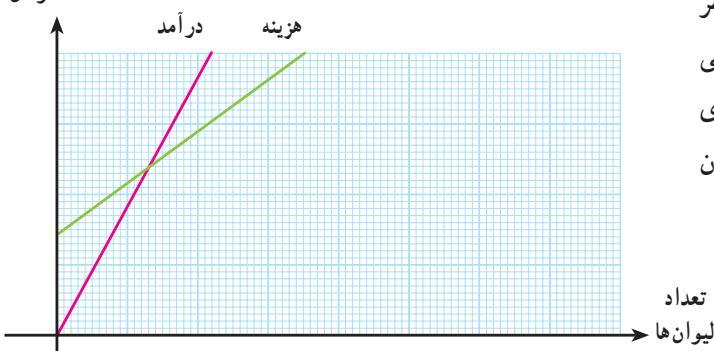
جدول

تعداد لیوان‌های فروخته شده	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
هزینه صرف شده						
درآمد حاصل از فروش						
سود یا ضرر						

معلم سپس گفت: شما با این جدول می‌توانید تشخیص دهید چه وقت ضرر کرده‌اید و چه وقت سود برده‌اید.
آیا می‌توانید از روی این جدول تشخیص دهید با چه میزان فروش نه سود کرده‌اید و نه ضرر؟

معلم گفت: برای تشخیص بهتر وضعیت هزینه و درآمد حاصل از این کار، نمودار مربوط به هزینه و درآمد را مانند نمودار رویه‌رو در یک صفحه رسم کنید. محور افقی را تعداد لیوان‌های فروخته شده و محور عمودی را یک بار هزینه و یک بار درآمد در نظر

بگیرید. هریک واحد روی محور افقی را معادل 1° لیوان^۱ و هریک واحد روی محور عمودی را معادل 100° تومان در نظر بگیرید.



۱- اگرچه تعداد لیوان‌ها عدد حسابی است و نمودار واقعی گسسته است، ولی برای درک بهتر روابط، مناسب است نمودار را یک خط پیوسته فرض کنیم.

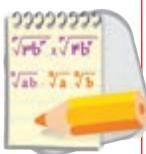
معلم پرسید نقطه تقاطع این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟
 دانش‌آموزان گفتند در این نقطه میزان هزینه و درآمد مساوی خواهد شد.
 معلم پرسید : آیا می‌توانید حساب کنید این نقطه، با چه تعداد لیوان فروخته شده، رخ می‌دهد؟



نمودارهای مربوط

حل مسئله بالا را با پاسخ‌گویی به سؤالات زیر کامل کنید.

- ۱- جدول هزینه - درآمد را کامل کنید.
- ۲- نمودارهای مربوط به این جدول را رسم کنید.
- ۳- حداقل چند لیوان شربت باید فروخته شود تا سود برد شود؟
- ۴- اگر تمام ۱۰۰ لیوان شربت فروخته شود، چه مقدار سود برد می‌شود؟
- ۵- اگر هر لیوان ۱۵۰ تومان فروخته شود با رسم نمودار درآمد جدید، به سؤالات بالا در این حالت جدید پاسخ دهید.



مسائل

۱- قیمت هر بلیط تئاتر ۲۰۰۰ تومان است. اگر x تعداد میهمانان و y مجموع هزینه‌ها باشد :

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y					

الف) جدول مقابل را تکمیل کنید.

ب) چه رابطه‌ای بین x و y وجود دارد؟

ج) چرا هیچ مقدار کسری در جدول وجود ندارد؟

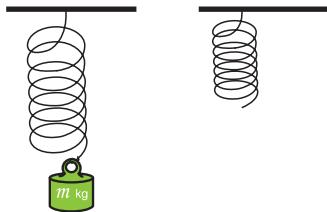
د) نمودار متناظر جدول فوق را رسم کنید.

- ۲- در یک مستطیل به طول ۳ و عرض ۲ سانتی‌متر، اگر طول آن را x سانتی‌متر افزایش دهیم مساحت آن از معادله زیر به دست می‌آید.

$$= 6 + 2x \text{ مساحت (سانتی‌مترمربع)}$$

الف) توضیح دهید، اعدادی که در معادله هستند، چه چیزی را نشان می‌دهند.

ب) اگر طول مستطیل را $\frac{3}{2}$ سانتی‌متر افزایش داده باشیم مساحت مستطیل چه قدر می‌شود؟



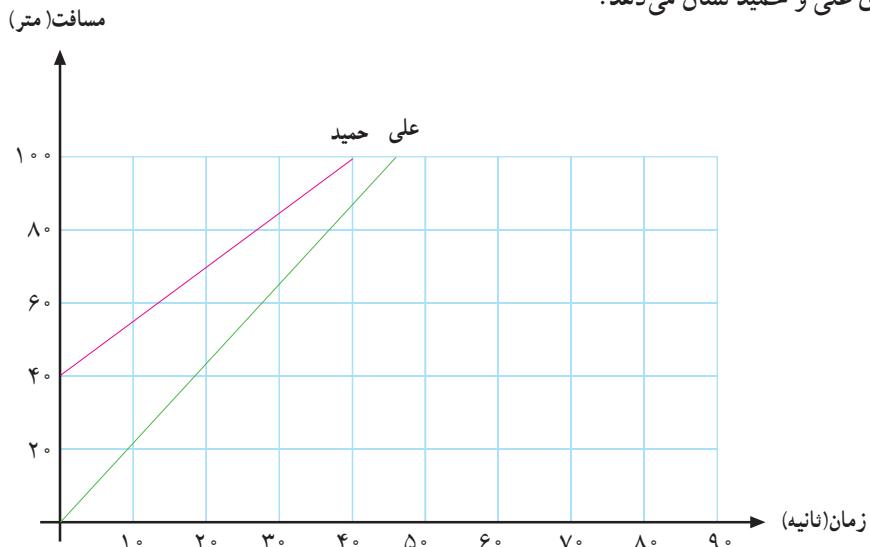
۳- طول یک فنر در حالتی که وزنه‌ای به آن آویزان نشده است، ۸ سانتی متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم m کیلوگرم به آن آویزان می‌کنیم، طول آن برحسب سانتی متر از رابطه $L=8+0.5 m$ به دست می‌آید.

الف) اگر جسمی به جرم $\frac{3}{72}$ کیلوگرم به آن آویزان کنیم، طول فنر چند میلی متر افزایش می‌یابد؟

ب) چه وزنه‌ای به فنر آویزان کنیم تا طول آن به 123 میلی متر برسد؟

۴- یک سوسمار در فصل بهار بین 30° تا 70° تخم می‌گذارد و حدود 90 روز طول می‌کشد تا نوزادان سوسمار سر از تخم بیرون آورند. طول هر نوزاد تقریباً 30 سانتی متر است. در سال‌های اولیه زندگی، به طور متوسط هر سال $\frac{22}{5}$ سانتی متر به طول هر بچه سوسمار اضافه می‌شود. پس از چه مدت طول نوزاد سوسمار به 80 سانتی متر می‌رسد؟

۵- علی و برادر کوچک‌ترش حمید، با هم یک مسابقه دو 100 متر دادند. چون حمید کوچک‌تر بود، علی به او اجازه داد جلوتر بایستد. نمودار زیر چگونگی مسافت طی شده نسبت به زمان سپری شده از شروع مسابقه را برای علی و حمید نشان می‌دهد.



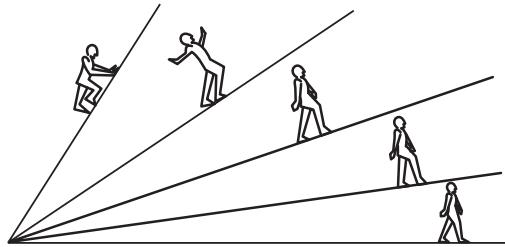
با توجه به نمودار بالا که پس از پایان مسابقه رسم شده است، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) در شروع مسابقه، حمید چند متر جلوتر از علی ایستاده بوده است؟

ب) چند ثانیه طول کشیده است تا علی و حمید به انتهای خط مسابقه برسند؟

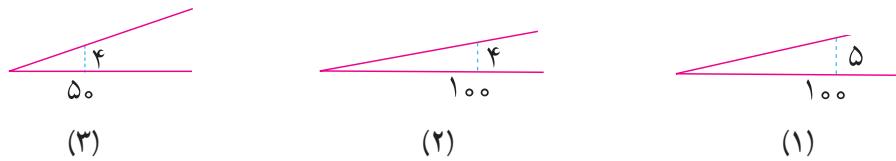
ج) چه کسی برنده شده است؟

د) اگر حمید و علی دویدن را از یک نقطه شروع می‌کردند، چه کسی برنده می‌شد و چند ثانیه زودتر به خط پایان می‌رسید؟

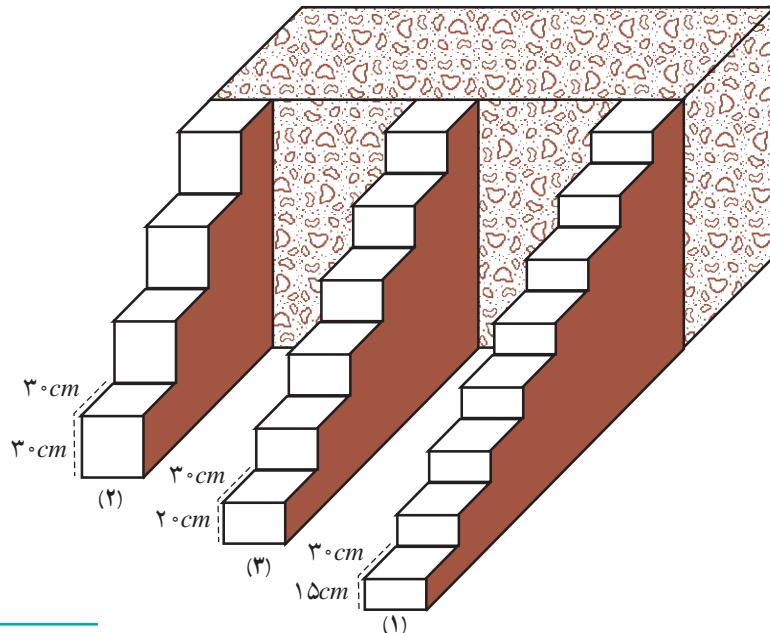


وقتی به کوه می‌روید، از سرپالایی‌های متفاوتی بالا می‌روید. بالارفتن از برخی سرپالایی‌ها آسان و از برخی دیگر مشکل است. راه رفتن روی زمینی که نه سرپالایی باشد و نه سرپالایی‌نی، از همه آسان‌تر است. این وضعیت را در بالارفتن از پله‌ها نیز مشاهده می‌کنید، چون همه پله‌ها مثل هم نیستند. آیا احساس کرده‌اید که بالارفتن از برخی پله‌ها آسان‌تر از بالارفتن از پله‌های دیگر است؟

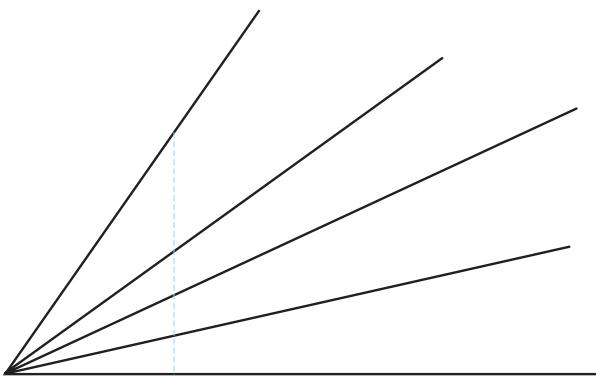
فرض کنید سه خیابان سرپالایی داریم که به هنگام بالارفتن از آنها، در اولی به‌ازای هر 100 متر که در راستای افقی جلو می‌رویم، 5 متر ارتفاع ما زیاد می‌شود، و در دومی به‌ازای هر 100 متر که در راستای افقی جلو می‌رویم، 4 متر ارتفاع ما زیاد می‌شود، و در سومی به‌ازای هر 50 متر که در راستای افقی جلو می‌رویم، 4 متر ارتفاع ما زیاد می‌شود. بالارفتن از کدام خیابان آسان‌تر است؟



در زیر سه نمونه پله آورده شده است. بالارفتن از کدام یک آسان‌تر است؟



میزان سربالایی بودن یک خیابان را می‌توانیم با نسبت «مقدار افزایش ارتفاع» به «مقدار مسافت افقی طی شده» اندازه‌گیری کنیم. این نسبت را شیب می‌نامند.



$$\text{شیب} = \frac{\text{مقدار افزایش ارتفاع}}{\text{مقدار مسافت افقی طی شده}}$$

در مورد مثال خیابان‌ها در صفحهٔ قبل، شیب آن‌ها را به شکل زیر حساب می‌کنیم:

$$\text{شیب خیابان } (1) = \frac{5}{100} = 0.05$$

$$\text{شیب خیابان } (2) = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$\text{شیب خیابان } (3) = \frac{4}{50} = 0.08$$

با مقایسهٔ این شیب‌ها به سادگی می‌توان تشخیص داد که در کدام خیابان، آسان‌تر می‌توان رو به بالا حرکت کرد. هرچه شیب خیابانی بیشتر باشد بالارفتن از آن مشکل‌تر خواهد بود.

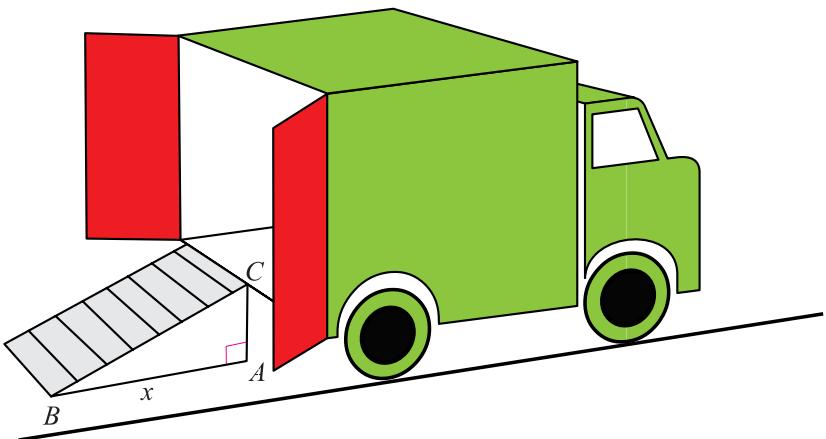
پله‌ها نیز مانند خیابان‌های سربالایی هستند و هر پله نشان می‌دهد که به‌ازای مسافت افقی طی شده، چه مقدار ارتفاع افزایش پیدا می‌کند. شیب پله‌های مثال بالا عبارت است از:

$$\text{شیب پلکان } (1) = \frac{15}{30} = 0.5$$

$$\text{شیب پلکان } (2) = \frac{3}{30} = 1$$

$$\text{شیب پلکان } (3) = \frac{2}{30} \approx 0.066$$

پس، بالارفتن از پله اول آسان‌تر از دو پله دیگر و بالارفتن از پله دوم سخت‌تر از دو پله دیگر است. مثال: در یک اسباب‌کشی، برای حمل بارها به داخل کامیون، به کمک یک تخته‌الوار سطح شیبداری ساخته شده است.



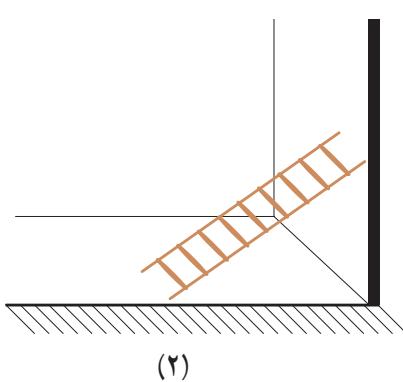
اگر طول الوار ۵ متر و فاصله لبه درب کامیون تا سطح زمین ۱ متر باشد، شیب این سطح چقدر است؟
برای یافتن پاسخ، باید فاصله نقطه پای الوار تا کامیون را حساب کنیم. اگر این فاصله را x بنامیم، با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه‌ای که می‌بینید، می‌توانیم بنویسیم: $5^2 = 1^2 + x^2$ ، پس $x = \sqrt{24}$. بنابراین

$$\text{شیب} = \frac{1}{\sqrt{24}} \approx \frac{1}{5} = 20^\circ$$

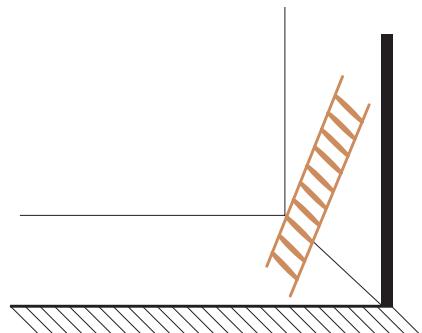


تمرین در کامپیوتر

دو نردهبان ۴ متری را به شکل‌های (۱) و (۲) به دیوار تکیه داده‌ایم. در شکل (۱) فاصله پای نردهبان تا دیوار $\frac{1}{2}$ متر و در شکل (۲) این فاصله $\frac{2}{7}$ متر است.



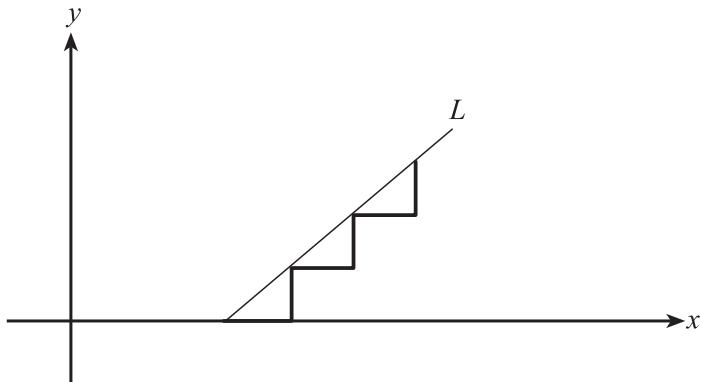
(۲)



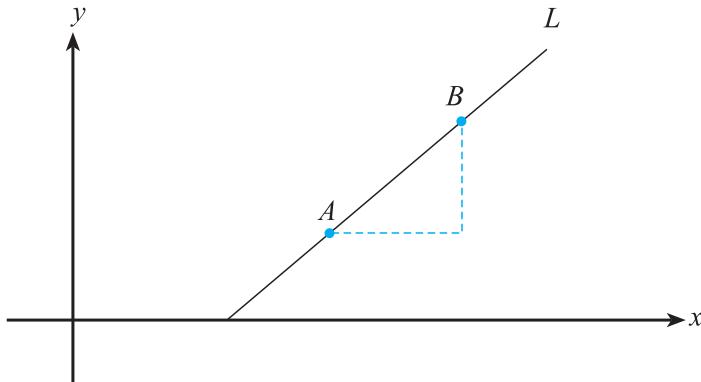
(۱)

- ۱- شیب نردهبان را در این دو حالت به‌طور تقریبی با استفاده از ماشین حساب، حساب کنید. کدام یک شیب بیشتری دارد؟
- ۲- اگر نردهبان را به گونه‌ای قرار دهیم که بتوانیم تا ارتفاع ۳ متری بالا رویم، شیب نردهبان چقدر خواهد شد؟

شیب خط

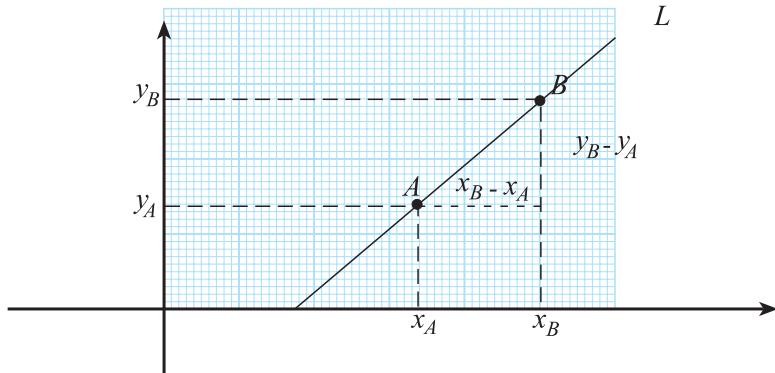


شکل بالا برش عرضی یک پلکان را نشان می‌دهد. خط L لبه‌های پله‌ها را به هم وصل می‌کند. شیب خط L را به صورت شیب این پلکان تعریف می‌کنند. شیب پلکان به صورت نسبت تغییر ارتفاع به مسافت افقی طی شده است.



اگر فقط به خط L توجه کنیم و از یک نقطه آن مانند A به نقطه دیگری مانند B حرکت کنیم، نسبت تغییر ارتفاع به مسافت افقی طی شده را می‌توانیم به صورت نسبت تغییر عرض به تغییر طول در نظر بگیریم. این نسبت را شیب خط L می‌نامند.

نقاط $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ را روی خط L در نظر بگیرید. اگر روی این خط از نقطه A به نقطه B حرکت کنیم، میزان تغییر ارتفاع برابر است با $y_A - y_B$ و میزان مسافت افقی طی شده برابر است با $x_B - x_A$.



پس، اگر شیب خط L را با m نشان دهیم داریم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

مثال: اگر $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط باشند، شیب آن خط چقدر است؟

حل: با حرکت از نقطه A به نقطه B ، ۲ واحد به طول نقطه A و ۳ واحد به عرض آن اضافه می‌شود، پس شیب

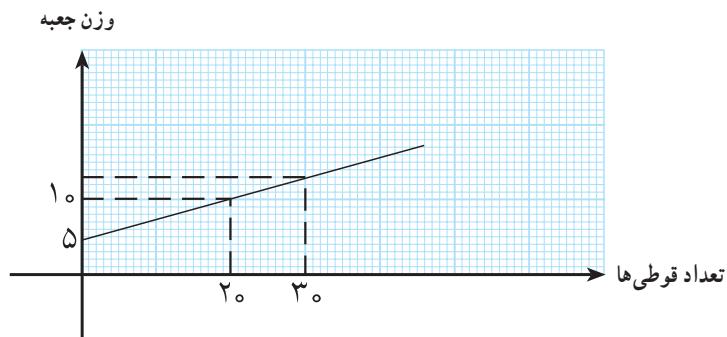
این خط برابر است با $\frac{3}{2}$.

اکنون شما شیب این خط را با جایگذاری در فرمول بالا به دست آورید و با مقداری که به دست آورده‌ایم مقایسه کنید.

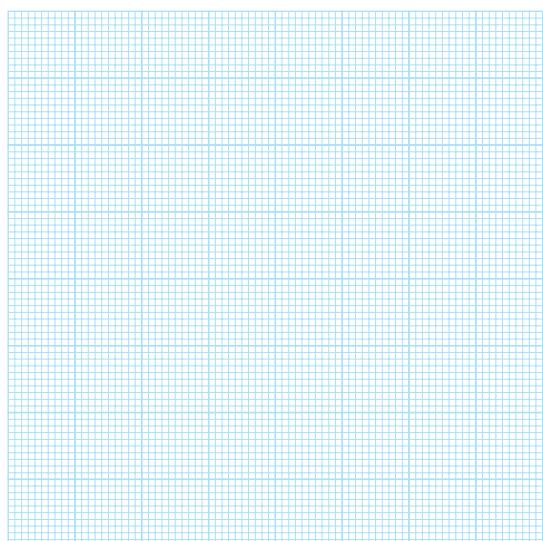


تمرین در کلاس

در یک جعبه تعدادی قوطی با وزن‌های یکسان قرار می‌دهیم. وزن جعبه با قوطی‌هایی که در آن قرار داده‌ایم بستگی به تعداد قوطی‌ها دارد. نمودار زیر رابطه وزن جعبه را با تعداد قوطی‌هایی که در آن است نشان می‌دهد. محور افقی تعداد قوطی‌ها و محور عمودی وزن جعبه را بر حسب کیلوگرم نشان می‌دهد.



- ۱- از روی نمودار تعیین کنید وزن جعبه در حالتی که 2° قوطی در آن قرار دارد، چقدر است؟
- ۲- از روی نمودار تعیین کنید وزن جعبه در حالتی که 3° قوطی در آن قرار دارد، چقدر است؟
- ۳- وزن جعبهٔ خالی چقدر است؟
- ۴- شیب این خط چقدر است؟
- ۵- اگر تعداد قوطی‌ها را x و وزن جعبهٔ حاوی y قوطی را y بناشیم، رابطهٔ بین وزن جعبه و تعداد قوطی‌هایی را که در آن است به صورت ریاضی بنویسید.
- ۶- شیب این خط چه ویژگی از قوطی‌ها را نشان می‌دهد؟

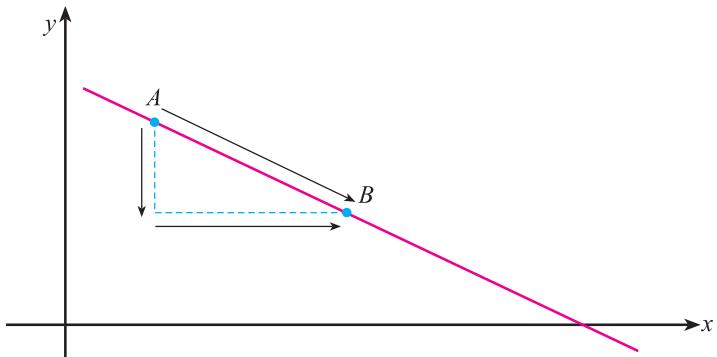


- ۱- با رسم محورهای مختصات، دو نقطه $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ را در صفحه نشان دهید و خط گذرنده از این دو نقطه را رسم کنید.
- ۲- طول کدام نقطه بیشتر است؟ عرض کدام نقطه بیشتر است؟
- ۳- با حرکت روی این خط وقتی از نقطه A به نقطه B برسیم، طول‌ها و عرض‌های نقاط، از لحاظ افزایش یا کاهش، چگونه تغییر می‌کنند؟
- ۴- شیب این خط را طبق فرمول حساب کنید. منفی شدن شیب چه چیزی را نشان می‌دهد؟

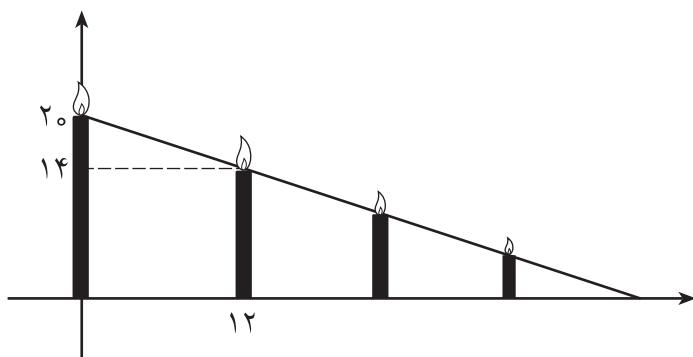
خط‌هایی که با افزایش طول نقاط روی آنها، عرض این نقاط کاهش می‌باید، شیب منفی دارند.

مثال: اگر $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط باشند، شیب آن خط چقدر است؟

حل: با حرکت از نقطه A به نقطه B ، ۴ واحد به طول نقطه A اضافه می‌شود ولی ۲ واحد از عرض آن کم می‌شود، پس شیب این خط برابر است با $\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.



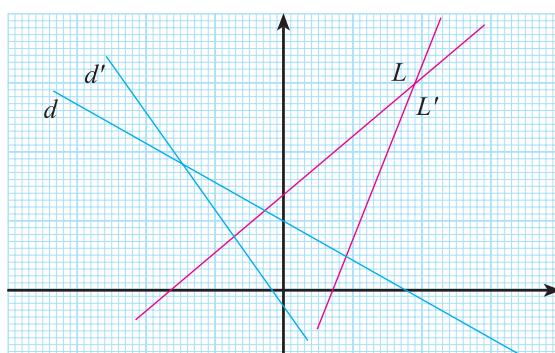
مثال: شمعی به طول 2° سانتی متر به طور یکنواخت می‌سوزد. طول شمع با گذشت زمان کاهش می‌یابد. با رسم محورهای مختصات، محور افقی را نشان دهنده زمان، بر حسب دقیقه، و محور عمودی نشان دهنده طول شمع، بر حسب سانتی متر، در نظر بگیرید. با وصل کردن نوک شمع در زمان‌های مختلف یک خط به شکل زیر رسم می‌شود.



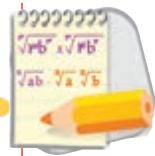
شیب این خط برابر است با $\frac{14-20}{12-0} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$. منفی بودن شیب نشان می‌دهد که با افزایش زمان طول شمع کاهش می‌یابد.



در شکل زیر خطهای L و L' شیب مثبت و خطهای d و d' شیب منفی دارند. درستی این مطلب را با درنظر گرفتن دو نقطه روی هر یک از این خطها و اندازه گیری طول و عرض این نقاط و محاسبه شیب این خطها نشان دهید و جدول زیر را تکمیل کنید.



خط	L	L'	d'	d
شیب خط				



۱- آقای تبریزی تصمیم گرفت به اتفاق دو تن از دوستانش کارگاه تولید و سایل آموزشی راه اندازی کند. آنها تصمیم گرفتند کارگاه را در محلی دورافتاده تأسیس کنند تا هزینه اجاره کمتری پرداخت کنند. هزینه یک ماه آنها (شامل اجاره محل، آب نمان آب، گاز، برق) 150000 تومان شد (این مبلغ را هزینه ثابت می‌نمند). هزینه تولید هر 100 قطعه نیز 50000 تومان برآورد شد. (این هزینه را هزینه متغیر می‌نمند زیرا بستگی به میزان تولید دارد.)

الف) اگر x تعداد بسته‌های صد تایی از قطعات تولید شده و y هزینه کارگاه بر حسب میلیون تومان برای تولید x بسته باشد، رابطه بین x و y را بنویسید.

ب) نمودار رابطه بین x و y را در محورهای مختصات که هر واحد روی محور x ها یک بسته 100 تایی از قطعات و هر واحد روی محور y ها $1,000,000$ تومان را نشان دهد، رسم کنید.

ج) x و y با هم رابطه خطی دارند، محل برخورد نمودار رابطه بین x و y با محور y چه چیزی را نشان می‌دهد؟
د) شیب خط نشان دهنده رابطه بین x و y را به دست آورید. شیب، چه چیزی را نشان می‌دهد؟ آیا شیب این خط، در معادله رابطه بین x و y مشاهده می‌شود؟

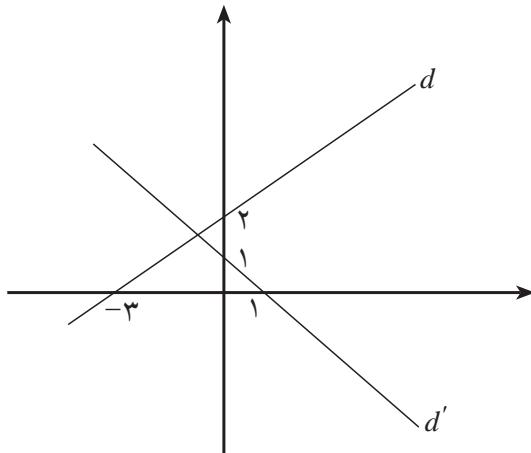
ه) اگر هزینه ثابت کارگاه کم یا زیاد شود، چه تغییری در معادله رابطه بین x و y و چه تغییری در نمودار این رابطه ایجاد می‌شود؟

۲- برای خرید یک کالای $480,000$ تومانی قرار شده است بدون پیش پرداخت، ماهیانه $60,000$ تومان قسط پرداخت کیم.

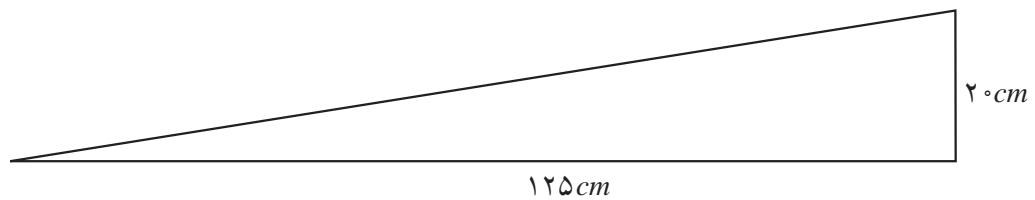
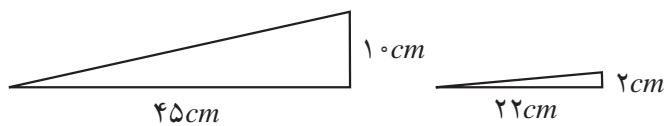
الف) اگر x تعداد ماههای باشد که قسط پرداخته ایم و y میزان بدھی ما به فروشنده (بر حسب $100,000$ تومان) باشد، رابطه بین x و y را بنویسید.

ب) شیب خط به دست آمده چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ج) نمودار خط به دست آمده را رسم کنید و مشخص کنید که کدام قسمت از این خط به این رابطه مربوط می‌شود.
۳- شیب هر یک از خطهای زیر را به دست آورید.



۴- طبق قوانین شهرسازی، شیب جوی هایی که آب باران را هدایت می کنند، باید عددی بین 1° و 2° باشد.
شیب کدام یک از مثلث ها می تواند به عنوان شیب جوی شهر در نظر گرفته شود؟



۵- نرده بانی به دیواری تکیه داده شده است. فاصله سر نرده بان از سطح زمین 1° متر است. فاصله پای نرده بان تا دیوار چند متر باشد تا شیب نرده بان $\frac{4}{3}$ باشد؟



معادله خط

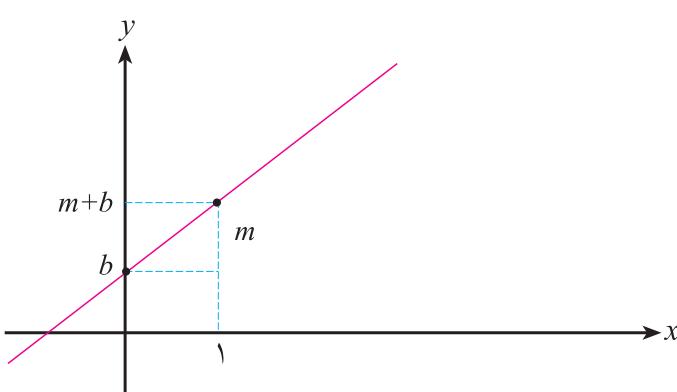
اگر مقدارهای دو متغیر با هم رابطه خطی داشته باشند و آن‌ها را با x و y نشان داده باشیم، بیان ریاضی این رابطه به صورت $y=mx+b$ است که در آن m و b اعداد ثابتی هستند. نمودار این معادله، یک خط است.



- ۱- خط به معادله $y=3x+4$ را رسم کنید.
 - ۲- هریک از نقاط زیر را در صفحه مشخص کنید و از روی شکل بگویید کدام یک از این نقاط روی خط به معادله بالا قرار دارند؟
- $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
- ۳- با جایگذاری مختصات هر نقطه در معادله خط، پاسخ خود را بررسی کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اگر نقطه‌ای روی خط قرار داشته باشد، با جایگذاری مختصات آن در معادله خط، تساوی برقرار می‌شود.

برای به دست آوردن شیب یک خط کافی است دو نقطه روی آن خط پیدا کنیم. خط به معادله $y=mx+b$ را در نظر بگیرید. جایی که این خط محور y را قطع می‌کند، نقطه‌ای است که طول آن صفر است. با جایگذاری $x=0$ در معادله این خط نتیجه می‌شود $y=b$ ، b را عرض از مبدأ این خط می‌نامند. پس، $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ یک نقطه از این خط است. با جایگذاری $y=0$ در معادله این خط نتیجه می‌شود $x=\frac{-b}{m}$. پس، $\begin{bmatrix} \frac{-b}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$ یک نقطه دیگر از این خط است.



بنابراین شیب این خط برابر است با $m = \frac{m+b-b}{1-0} = m$. توجه کنید که شکل صفحه قبل برای حالتی رسم شده که $m > b$ و $b > 0$. برای سایر حالات m و b ، خودتان شکل مناسب را رسم کنید.

اگر معادله خطی به صورت $y = mx + b$ باشد، شیب آن برابر m است.

مثال: معادله خطی را باید که شیب آن ۳ است و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

اگر شیب خطی برابر m باشد، معادله آن به صورت $y = mx + b$ است. پس، معادله این خط به صورت $y = 3x + b$ است. با جایگذاری مختصات نقطه A در معادله، می‌توان مقدار b را پیدا کرد.

$$2 = 3 \times 1 + b$$

$$b = 2 - 3 = -1$$

با جایگذاری مقدار b در معادله خواهیم داشت: $y = 3x - 1$.



۱- معادله خطی که شیب آن m است و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد را باید.

۲- معادله خطی که شیب آن m است و از نقطه $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ می‌گذرد را باید.

۳- معادله خطی که شیب آن m است و از نقطه $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ می‌گذرد را باید.

۴- معادله خطی که شیب آن m است و از نقطه $D = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ می‌گذرد را باید.

از این فعالیت نتیجه می‌شود:

معادله خطی به شیب m که از نقطه $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ می‌گذرد به شکل زیر است.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد و شیب آن (-2) است.

$$y - 2 = -2(x - 3)$$

$$y = -2x + 8$$

توجه کنید

در خط به معادله $2y = x + 2$

شیب برابر ۱ نیست. چرا؟

مثال: معادله خط را بنویسید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.
ابتدا شیب این خط را حساب می‌کنیم. چون A و B دو نقطه از این خط هستند، شیب آن برابر است با

$$m = \frac{3 - 2}{5 - (-1)} = \frac{1}{6}$$

پس، معادله این خط به صورت زیر است:

$$y - 2 = \frac{1}{6}(x - (-1)) = \frac{1}{6}(x + 1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$$

$$y = \frac{1}{6}x + 2\frac{1}{6}$$



بیندیشیم

در مثال روبرو، آیا برای نوشتن معادله خط، می‌توانستیم از نقطه B استفاده کنیم؟



تمرین در کلاس

الف) خط‌های به معادله‌های $y = 2x + 1$, $y = 2x - 2$, $y = 2x + 3$, $y = 2x - 1$, $y = 2x + 2$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ب) وضعیت این خط‌ها نسبت به هم چگونه است؟

ج) شیب این خط‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

د) در حالت کلی در ارتباط با توازنی چند خط با یکدیگر و رابطه بین شیب آن‌ها چه حدسی می‌زنید؟

خط‌هایی که شیب یکسان دارند با هم موازی‌اند.



۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید.

$$y = 3x + 2$$

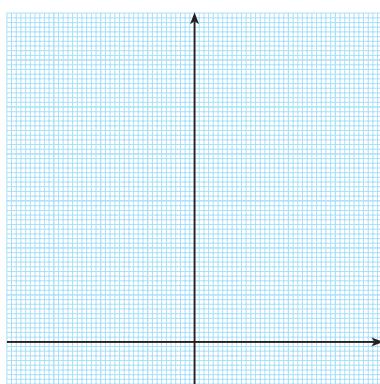
$$y = 2x + 2$$

$$y = x + 2$$

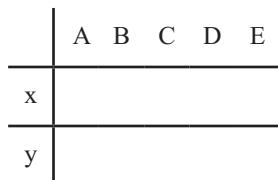
$$y = \frac{1}{5}x + 2$$

۲- با بررسی و مقایسه وضعیت خط‌های بالا، در مورد وضعیت خط

به معادله $y = 2x + 2$ چه حدسی می‌زنید؟



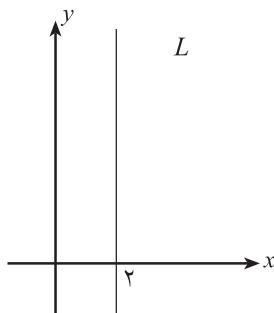
۳- پنج نقطه دلخواه روی خط $y=2$ در نظر بگیرید و جدول زیر را کامل کنید.



۴- ویژگی مشترک این نقاط چیست؟

۵- با توجه به آن چه که انجام داده اید، توضیح دهید وضعیت خط $y=b$ (b می تواند هر عدد ثابتی باشد) چگونه است و در مورد طول و عرض نقاط روی این خط چه می توان گفت؟

۶- خط L موازی محور y ها به شکل زیر رسم شده است. پنج نقطه دلخواه روی آن در نظر بگیرید و جدول زیر را تکمیل کنید.



	A	B	C	D	E
x	2	2	2	2	2
y	0	1	2	3	4

۷- ویژگی مشترک این نقاط چیست؟

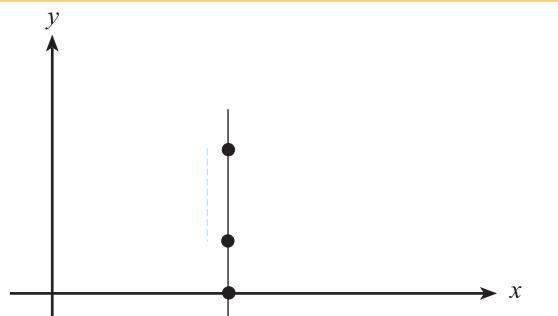
دیدیم که تمام نقاطی که عرض آنها ۲ بود خطی را می ساختند که معادله آن $y=2$ بود. در این جایی تمام نقاطی که طول آنها ۲ است خطی را می سازند که معادله آن را $x=2$ در نظر می گیریم.

در حالت کلی ، معادله خطی است موازی محور y ها که طول همه نقاط آن برابر b است.



بینندیشیم

آیا می توان برای خطوطی که بر محور X ها عمود هستند، تعريف و فرمول شیب خط را به کار برد؟



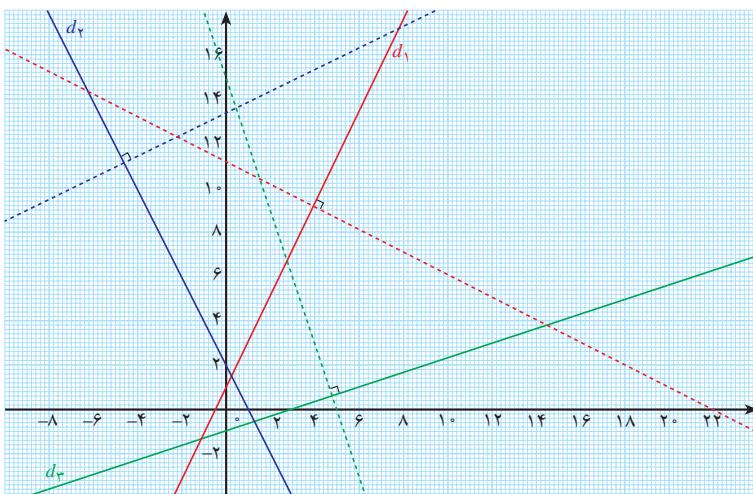
معادله کلی یک خط دلخواه در صفحه را می توان به صورت $ax+by+c=0$ در نظر گرفت. در حالتی که $a \neq 0$ ، این معادله را به شکل استاندارد $y=mx+d$ می توان نوشت که در آن m شیب این خط است. در حالت $b=0$ این معادله به صورت $x=d$ در می آید که خطی عمود بر محور x ها است.

خطهای عمود بر هم

دیدیم که موازی بودن خطها را می‌توانیم از طریق شیب آن‌ها تشخیص دهیم. در این بخش می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا عمود بودن دو خط را هم می‌توانیم از طریق شیب آن دو خط تشخیص دهیم.



در شکل زیر سه خط d_1 و d_2 و d_3 و خطوط عمود بر آن‌ها رسم شده‌اند.



- دو نقطه روی هر خط عمود در نظر بگیرید و به کمک خط کش، با اندازه‌گیری طول و عرض این نقاط، شیب هریک از این خط‌ها را به دست آورید.
جدول زیر را کامل کنید.

معادله خط	$d_1: y=2x+1$	$d_2: y=2x+2$	$d_3: y=\frac{1}{3}x-1$
شیب خط			
شیب خط عمود			

- آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای بین شیب‌های دو خط عمود بر هم وجود دارد؟

شرط عمود بودن دو خط با شیب‌های m و m' ، آن است که $m \cdot m' = -1$.



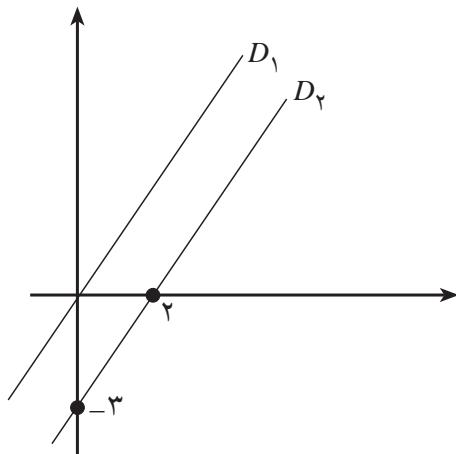
۱- معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد و شیب آن ۲ است.

۲- معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

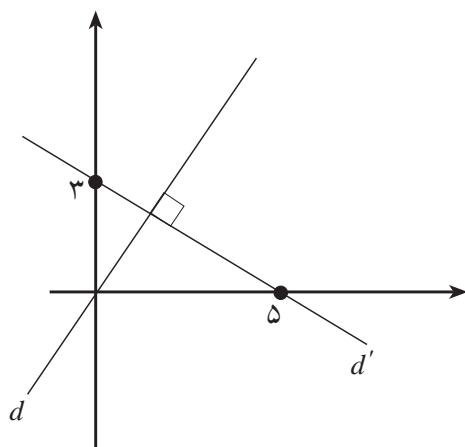
۳- معادله خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ می‌گذرد و با نیمساز ربع اول ($y=x$) موازی است.

۴- وضعیت دو خط به معادله‌های $x+y=5$ و $2x+2y=5$ نسبت به هم چگونه است؟

۵- معادله دو خط موازی D_1 و D_2 را در شکل زیر بنویسید.



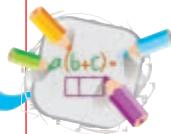
۶- خط d بر d' عمود است. با توجه به شکل زیر معادله خطوط d و d' را بنویسید.



دستگاه معادلات خطی دومجهولی

معادلاتی که در ابتدای این فصل بررسی کردیم دارای یک مجھول بودند. اما در حل بسیاری از مسائل، بیش از یک مجھول وجود دارد؛ برای یافتن این مجھولات، بیش از یک معادله مورد نیاز است و به همین دلیل معادلات داده شده را دستگاه معادلات می‌نامند. در این بخش یک حالت ساده از دستگاه معادلات را که دستگاه معادلات خطی دومجهولی نام دارد توضیح داده خواهد شد.

فعالیت



آقای کریمی می‌خواهد در یک باشگاه ورزشی ثبت نام کند. در اطراف خانه او دو باشگاه وجود دارد که هر کدام یک حق عضویت اولیه دارد و بابت هر جلسه استفاده نیز مبلغی دریافت می‌کند. باشگاه اول ۵۰۰۰ تومان حق عضویت می‌گیرد و برای هر جلسه استفاده ۵۰۰ تومان دریافت می‌کند. باشگاه دوم ۲۰۰۰ تومان حق عضویت می‌گیرد ولی برای هر جلسه استفاده ۷۰۰ تومان دریافت می‌کند.

۱- جدول زیر را که در آن، هزینه استفاده از هر باشگاه به ازای تعداد جلسات، آمده است کامل کنید.

تعداد جلسات	۰	۱	۳	۸	۱۲	۱۸
هزینه کل در باشگاه اول						
هزینه کل در باشگاه دوم						

۲- هزینه استفاده از یک باشگاه را با y و تعداد جلسات استفاده شده از آن را با x نشان دهید و رابطهٔ بین تعداد جلسات و هزینه کل را، به صورت دو معادله برای این دو باشگاه بنویسید و نمودار هر معادله را رسم کنید.

۳- یکی از دوستان آقای کریمی که در یکی از این دو باشگاه ثبت نام کرده می‌گوید : من تاکنون ۱۲ جلسه به باشگاه رفته‌ام و ۱۱۰۰۰ تومان پرداخته‌ام. با استفاده از نمودار تعیین کنید که این شخص در کدام باشگاه ثبت نام کرده است.

۴- با استفاده از معادله‌هایی که به دست آورده‌اید، معلوم کنید دوست آقای کریمی در کدام باشگاه ثبت نام کرده است و درستی پاسخ خود به سؤال قبل را بررسی کنید.

۵- اگر آقای کریمی بخواهد فقط ۱۰ جلسه از باشگاه استفاده کند، با استفاده از نمودار و معادله‌های به دست آمده نشان دهید ثبت نام در کدام باشگاه برای او باصره‌تر است؟

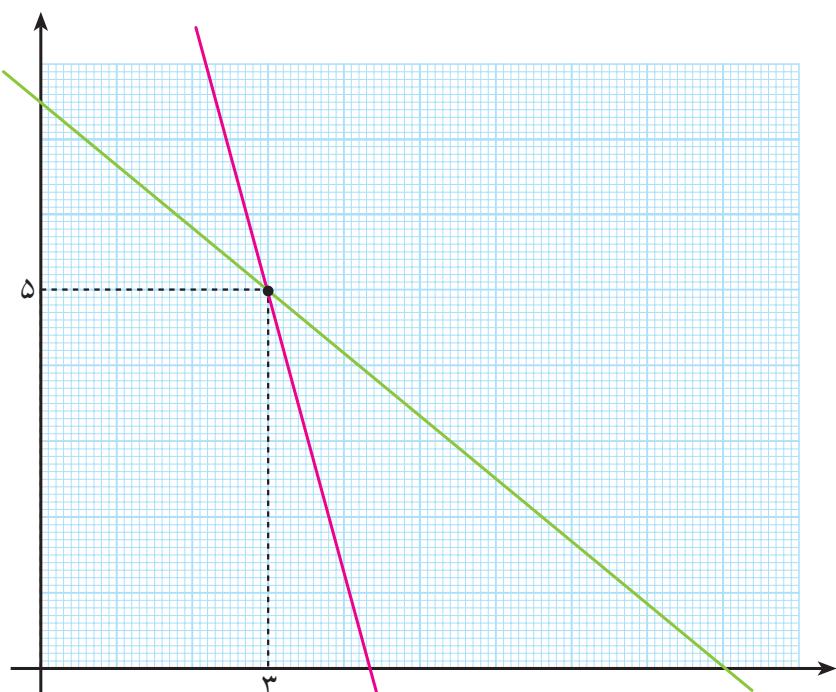
۶- برای ۱۵ جلسه استفاده، کدام باشگاه باصره‌تر است؟ آیا فرقی می‌کند که آقای کریمی در کدام باشگاه ثبت نام کند؟ روی نمودار دو خط، نقطه مربوط به ۱۵ جلسه استفاده از دو باشگاه، چه نقطه‌ای است؟

در این فعالیت، دو مجهول و دو معادله وجود دارد و این گونه مسائل را یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی می‌نامند. جواب این دستگاه اعدادی هستند که اگر به جای x و y قرار دهیم، هر دو معادله هم‌زمان برقرار شوند.

مثال : یک بسته که در آن دو تا از کالای اول و سه تا از کالای دوم قرار دارد را وزن می‌کنیم و حاصل ۲۱ کیلوگرم است. یک بار دیگر بسته دیگری را که در آن سه تا از کالای اول و یکی از کالای دوم در آن است را وزن می‌کنیم و حاصل ۱۴ کیلوگرم است. آیا می‌توانید بگویید وزن هر کدام از کالاها چقدر است؟

اگر وزن کالای اول را با x و وزن کالای دوم را با y نشان دهیم، وزن اولین بسته نشان می‌دهد که $2x + 3y = 21$ و وزن دومین بسته نشان می‌دهد که $3x + y = 14$.

یکی از روش‌های حل این دستگاه، روش هندسی است. اگر معادلات $2x + 3y = 21$ و $3x + y = 14$ را به عنوان معادلات دو خط در صفحه در نظر بگیریم، محل برخورد این دو خط نقطه‌ای است که مختصات آن هم‌زمان هر دو معادله را برقرار می‌کند.



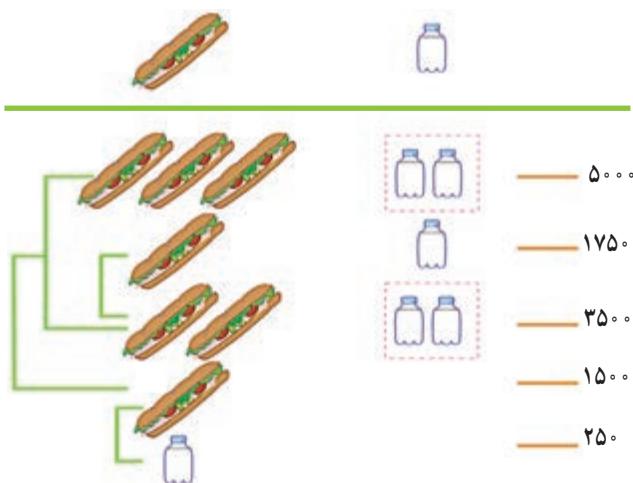
محل برخورد این دو خط در نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ است. پس جواب این دستگاه $x = 3$ و $y = 5$ است.

اگر معادلات یک دستگاه خطی دومجهولی را به عنوان معادله‌های دو خط در نظر بگیریم، مختصات محل برخورد این دو خط، جواب آن دستگاه معادلات است.

بارسم نمودار معادلات، می‌توان تقریب خوبی از جواب دستگاه معادلات به دست آورد. برای حل دستگاه معادلات، اغلب بارسم نمودار آنها و یافتن محل برخورد این نمودارها و اندازه‌گیری مختصات نقطه برخورد، می‌توان تخمینی از جواب دستگاه را به دست آورد و سپس با حل جبری دستگاه می‌توان پاسخ دقیق را محاسبه کرد. در ادامه دو روش جبری برای حل دستگاه معادلات خطی دومجهولی معرفی می‌شوند.

روش حذفی

فعالیت



حمید و بهروز برای خرید ساندویچ و نوشابه برای خود و دوستانشان به بوفه رفتند. حمید برای ۳ ساندویچ و ۲ شیشه نوشابه ۵۰۰۰ تومان پرداخت و بهروز برای یک ساندویچ و یک شیشه نوشابه ۱۷۵۰ تومان پرداخت. حمید با نمایش تصویری روی روکش کرد که قیمت یک ساندویچ و قیمت یک شیشه نوشابه چقدر است.

هر یک از مراحل حل مسئله توسط حمید را توضیح دهد.

روشی را که در فعالیت بالا مورد استفاده قرار گرفته است را روش حذفی برای حل دستگاه معادلات می‌نامند. برای بیان ریاضی این عملیات می‌توانیم قیمت یک ساندویچ را با x و قیمت یک شیشه نوشابه را با y نشان دهیم. در این صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5000 \\ x + y = 1750 \end{cases}$$

دستگاهی را که از چند معادله و چند مجهول تشکیل می‌شوند را دستگاه معادلات می‌نامند. مقادیری از متغیرهای این معادلات را که هم‌زمان تساوی‌های این معادلات را برقرار می‌کنند، جواب‌های این دستگاه می‌نامند. یافتن جواب‌های یک دستگاه را حل آن دستگاه می‌نامند.

برای حل دستگاه معادلات بالا، برای ایجاد ضریب‌های یکسان از یکی از متغیرها، معادله دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 500 \\ 2x + 2y = 350 \end{cases}$$

با کم کردن این دو معادله از هم خواهیم داشت:

$$(3x + 2y) - (2x + 2y) = 500 - 350$$

$$3x - 2x + 2y - 2y = 150$$

$$x = 150$$

با جایگذاری $x = 150$ در هر کدام از معادلات بالا می‌توان y را پیدا کرد.

$$150 + y = 175$$

$$y = 25$$

با جایگذاری این مقادیر از x و y در معادله اول می‌توانید درستی حل خود را امتحان کنید.

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$$

برای حل این دستگاه، معادله اول را در ۳ ضرب می‌کنیم تا به شکل $3x - 3y = 9$ درآید. با جمع دو معادله می‌توان مجهول y را حذف کرد: $3x - 3y + 4x + 3y = 5 + 9$.

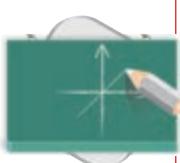
پس از ساده کردن این معادله خواهیم داشت $7x = 14$ و نتیجه می‌شود $x = 2$. با جایگذاری در یکی از معادلات نتیجه می‌شود $y = -1$.

برای حل این دستگاه معادلات، همچنین می‌توانیم ابتدا متغیر x را حذف کنیم و y را بیابیم. بنابراین، معادله اول را در (-4) ضرب می‌کنیم: $-4x + 4y = -12$.

با جمع این معادله با معادله دوم خواهیم داشت $5 - 4x + 4y + 4x + 3y = -12 + 5$. پس از ساده سازی داریم $7y = -7$. که نتیجه می‌دهد $y = -1$. اکنون با جایگذاری در معادله اول داریم $x = 3 - (-1) = 4$.

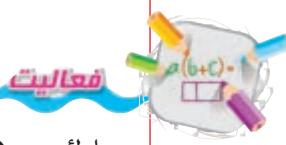
دستگاه معادله زیر را یک بار با حذف x و یک بار با حذف y حل کنید.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 23 \\ -2x + 7y = -24 \end{cases}$$



تمرین در کارگاه

روش جایگذاری



معادله $3x+2y=5000$ را در نظر بگیرید:

- ۱- به ازای $y=1000$ مقدار x را بباید؛
- ۲- به ازای $y=1750$ مقدار x را بباید؛
- ۳- به ازای $x=1750$ مقدار y را بباید.



یکی از روش‌های حل دستگاه معادلات روش جایگذاری است. در این روش ابتدا به کمک یکی از معادله‌ها یکی از متغیرها بر حسب متغیر دیگر حساب می‌شود. سپس همانند بند ۳ فعالیت بالا با جایگذاری آن متغیر در معادله دیگر، به یک معادله بر حسب یک متغیر می‌رسیم، آن‌گاه آنرا با روش‌هایی که می‌شناسیم حل می‌کنیم.
مثال: دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

از معادله اول نتیجه می‌شود که $x = y + 3$. اگر در معادله دوم به جای x ، مقدار $y + 3$ را قرار دهیم به یک معادله بر حسب y می‌رسیم و می‌توان آن را حل کرد؛ پس $4(y+3) + 2y = 6$. پس از ساده کردن، این معادله به صورت $6y + 12 = 6$ در می‌آید و نتیجه می‌شود $y = -1$. با استفاده از تساوی $x = y + 3$ و این که $y = -1$ ، نتیجه می‌گیریم $x = 2$.

در این روش با استفاده از یکی از معادله‌ها، یکی از دو مجهول را بر حسب مجهول دیگر به دست می‌آوریم. سپس مجهول محاسبه شده را در معادله دیگر جایگذاری می‌کنیم. در مثال بالا با استفاده از معادله اول، x را بر حسب y حساب کردیم، سپس در معادله دوم روی x جایگذاری کردیم. با این عمل به یک معادله بر حسب یک متغیر می‌رسیم و می‌توانیم آن را حل کنیم. این روش را، روش جایگذاری می‌نامند.
مثال: دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2m + 3n = 15 \\ 3m + 2n = 15 \end{cases}$$



بیندیشیم

در روش جایگذاری، آیا
فرقی می‌کند که کدام متغیر
را بر حسب متغیر دیگر
به دست آوریم؟

این دستگاه را یک بار با روش حذفی و یک بار با روش جایگذاری حل می‌کنیم.
روش حذفی: معادله اول را در (-3) و معادله دوم را در 2 ضرب می‌کنیم و یک دستگاه جدید به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} -6m - 9n = -45 \\ 6m + 4n = 30 \end{cases}$$

جمع دو معادله صفحه قبل معادله زیر را می‌سازد.

$$-6m - 9n + 6m + 4n = -45 + 30$$

$$-5n = -15$$

$$n = 3$$

در معادله اول به جای n مقدار ۳ را قرار می‌دهیم و به معادله $2m + 3 \times 3 = 15$ می‌رسیم، درنتیجه $m = 3$. روش جایگذاری: از معادله اول n را برحسب m حساب می‌کنیم.

$$2m + 3n = 15$$

$$3n = 15 - 2m$$

$$n = 5 - \frac{2}{3}m$$

در معادله دوم جای n قرار می‌دهیم $m = 5 - \frac{2}{3}m$ ، و معادله به دست آمده برحسب m را حل می‌کنیم:

$$3m + 2 \times (5 - \frac{2}{3}m) = 15$$

$$3m + 10 - \frac{4}{3}m = 15$$

$$\frac{5}{3}m = 5$$

$$m = 3$$

با جایگذاری $m = 3$ در معادله اول نتیجه می‌شود $2 \times 3 + 3n = 15$ و پس از ساده کردن خواهیم داشت: $3n = 9$. $n = 3$ که نتیجه می‌دهد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقاط $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

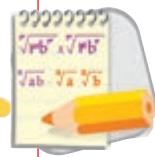
قبل با استفاده از روش یافتن شیب خط، این گونه مسائل را حل می‌کردیم. اما، در این بخش با استفاده از حل دستگاه‌ها نیز می‌توانیم این مسئله را حل کنیم.

معادله کلی یک خط به صورت $y = mx + b$ است. اگر این خط بخواهد از نقطه A بگذرد باید با جایگذاری طول و عرض آن در معادله این خط تساوی برقرار گردد، یعنی $b + (-1)m = 2$ و درنتیجه $b - m = 2$. اگر این خط بخواهد از نقطه B بگذرد باید داشته باشیم $b + 3m = 2$. با این دو معادله یک دستگاه معادله خطی دوجهولی تشکیل می‌شود که جواب آن، خط مورد نظر را مشخص می‌کند.

مسئله: باب پنجاه و چهارم از کتاب مفتاح المعاملات

دو نفر در راهی هم سفر بودند. به جایی رسیدند و خواستند که با هم نان بخورند، همراه یکی از آنها ۳ نان بود و همراه دیگری ۲ نان. با هم مشغول خوردن شدند. نفر سومی از راه رسید، تعارف کردند، او هم با آنها هم سفره شد و هر سه به یک سهم نان خوردند. نفر سوم ۵ درهم به آن دو نفر داد و گفت هر کدام به تعداد نان خود سهمش را از این پول بردارد.

حال چگونه این پول را میان دو نفر تقسیم کنیم و سهم هر یک چند درهم است؟



۱- دستگاه معادلات (الف) را به روش جایگزینی و (ب) را به روش حذفی حل کنید.

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ 2y - 3x = 17 \end{cases} \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \quad \text{(ب)}$$

۲- نوعی کود از مخلوط شدن دو نوع که یکی سرعت دهنده رشد و دیگری غنی کننده مواد غذایی گیاه است، درست می شود. مخلوط های متفاوت اثرات متفاوتی دارد.

مخلوط (A) ۴ پیمانه از نوع اول و ۳ پیمانه از نوع دوم است که ۲۰۰ تومان قیمت دارد. مخلوط (B) ۳ پیمانه از نوع اول و ۵ پیمانه از نوع دوم است که ۱۷۰ تومان قیمت دارد. اگر یک پیمانه از نوع اول x تومان و یک پیمانه از نوع دوم y تومان قیمت داشته باشد،
 الف) برای قیمت مخلوط A و B روابطی برحسب x و y بنویسید.
 ب) مقدار x و y را پیدا کنید.

ج) مخلوطی که دارای ۵ پیمانه از نوع اول و ۲ پیمانه از نوع دوم باشد، چه قیمتی دارد؟

۳- آیا می توان مقدار a را به گونه ای تعیین کرد که نقطه $\begin{bmatrix} a \\ -1 \end{bmatrix}$ محل برخورد دو خط $2x+y=5$ و $x-2y=5$ باشد.

۴- با رسم نمودارهای دو خط $\frac{3}{4}x - 5y = 5$ و $-5x - 3y = -5$ تحقیق کنید این دو خط در چه رباعی همدیگر را قطع می کنند. سپس با حل جبری دستگاه تشکیل شده از این معادله ها، مختصات نقطه محل تقاطع آن را به دست آورید و جواب خود را بررسی کنید.