

چند جمله‌ای‌ها و اتحادها



تفریق و قرینه اعداد

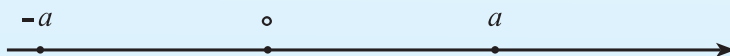
تفریق عمل متقابل عمل جمع است. در یک عمل جمع، مانند $11+4=15$ ، گوئیم، اگر ۴ را به ۱۱ اضافه کنیم حاصل ۱۵ می‌شود، پس اگر ۴ را از ۱۵ کم کنیم، حاصل ۱۱ می‌شود: $15-4=11$. این قاعده به طور کلی برای دو عدد a و b نیز صادق است. اگر $a+b=c$ ، گوئیم حاصل تفریق b از c برابر a است و می‌نویسیم $c-b=a$.

تمرین در کلاس



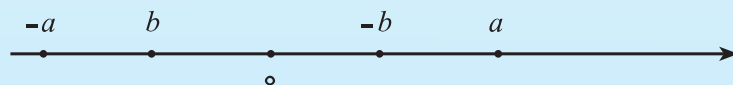
- ۱- اگر داشته باشیم $z = x + y$ ، دو تفریق از روی آن بنویسید.
- ۲- پاره خطی را به طول z رسم کنید و یک نقطه روی آن در نظر بگیرید. طول یکی از پاره خط‌ها را y بنامید و نشان دهید که طول پاره خط باقی مانده برابر $z-y$ است.

هر عدد قرینه‌ای دارد که شما در فصل اول با آن آشنا شدید. قرینه یک عدد دلخواه مانند a را با $-a$ نشان می‌دهند.



$-a$ نیز قرینه‌ای دارد که آن را با $-(-a)$ نشان می‌دهند.

تمرین در کلاس



- ۱- با توجه به شکل بالا علامت (مثبت یا منفی بودن) a و b را تعیین کنید.
- ۲- درستی تساوی $-(-a)=a$ را از روی شکل نشان دهید.
- ۳- قرینه یک عدد مثبت چه علامتی دارد؟
- ۴- اگر $b=-3$ ، $-b$ چه مقداری دارد؟ علامت $(-b)$ چیست؟ قرینه یک عدد منفی چه علامتی دارد؟

جمع هر عدد با قرینه خود صفر است، یعنی برای هر عدد a داریم $a + (-a) = 0$. برای دو عدد a و b می توان نشان داد $a - b = a + (-b)$.



تمرین در کلاس

الف) درستی تساوی های زیر را با ذکر چند مثال بررسی کنید.

$$(۱) -(a-۴) = -a+۴$$

$$(۲) -(a-b) = -a+b$$

$$(۳) x-(۲+z) = (x-۲) -z$$

$$(۴) x-(y+z) = (x-y) -z$$

$$(۵) x(y-z) = xy -xz$$

$$(۶) (x-y)^2 = (y-x)^2$$

ب) تساوی های زیر را با زبان فارسی توضیح دهید.

$$(۱) -(a+b) = -a-b$$

$$(۲) (-x)y = x(-y) = -xy$$

$$(۳) (-x)(-y) = xy$$

$$(۴) (-a)^2 = a^2$$

ج) تفاوت دو عبارت a^2 و $(-a)^2$ را توضیح دهید.

تقسیم و معکوس اعداد

تقسیم، یکی دیگر از اعمال بین اعداد حقیقی است که متقابل عمل ضرب است. در یک عمل ضرب مانند $4 \times 12 = 48$ ، گوئیم اگر ۴ را در ۱۲ ضرب کنیم ۴۸ می شود، پس اگر ۴۸ را بر ۴ تقسیم کنیم حاصل ۱۲ می شود و می نویسیم: $\frac{48}{4} = 12$.

در تقسیم عدد a بر عدد b ، به دنبال عددی می گردیم که اگر آن را در b ضرب کنیم حاصل برابر a شود. اگر b مخالف صفر باشد چنین عددی وجود دارد و آن را با استفاده از خط کسری به صورت $\frac{a}{b}$ نشان می دهیم. بنابراین، اگر $\frac{a}{b} = c$ ، این به معنای آن است که $bc = a$.

تقسیم a بر b را به صورت $a \div b$ نیز نشان می دهیم، پس $a \div b = \frac{a}{b}$. هر وقت از تقسیم بر عددی سخن می گوئیم فرض بر آن است که آن عدد مخالف صفر است.

معکوس یک عدد، عددی است که اگر در آن ضرب شود، حاصل ۱ شود. برای مثال، معکوس عدد ۴، عدد $\frac{1}{4}$ است، زیرا $4 \times \frac{1}{4} = 1$. معکوس عدد (-3) ، عدد $(-\frac{1}{3})$ است، زیرا $(-3) \times (-\frac{1}{3}) = 1$. صفر معکوس ندارد و معکوس یک عدد مخالف صفر a ، عدد $\frac{1}{a}$ است.

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

تشریح در کلاس



الف) تساوی های زیر را به زبان فارسی توضیح دهید. در عبارت های زیر فرض بر آن است که مخارج مخالف صفر هستند.

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \quad (1)$$

$$c \times \frac{a}{b} = \frac{ca}{b} \quad (2)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb} \quad (3)$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (4)$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad (5)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (6)$$

(ب) عبارت‌های زیر را به صورت یک کسر بنویسید.

۱) $2 + \frac{1}{a}$

۲) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

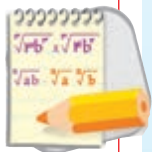
۳) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

۴) $2 - \frac{1}{x-1}$

یکی از روش‌های بررسی تساوی دو عدد گویا، مانند $\frac{6}{9}$ و $\frac{10}{15}$ ، این است که مخرج هر کسر را در صورت کسر دیگر ضرب کنیم. با این عمل دو عدد به دست می‌آید که اگر مساوی بودند می‌توان نتیجه گرفت که این کسرها مساویند، در غیر این صورت این کسرها مساوی نیستند. در این مثال، چون $10 \times 9 = 15 \times 6$ این دو کسر مساویند.

به طور کلی این مطلب برای دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برقرار است، یعنی اگر $ad = bc$ ، این دو کسر مساوی‌اند و در غیر این صورت مساوی نیستند.

مثال: دو کسر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\frac{\sqrt{3}}{3}$ برابرند زیرا حاصل ضرب صورت هر کسر در مخرج کسر دیگر، مقدارهایی مساویند.



مسائل

۱- اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند و c مخالف صفر باشد، ثابت کنید $c(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}) = a + b$. از این

تساوی نتیجه بگیرید که: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

۲- اگر a و b دو عدد مخالف صفر باشند، نشان دهید معکوس عدد $\frac{b}{a}$ است.

۳- اگر a و b و c و d چهار عدد باشند و b و c و d مخالف صفر باشند، با استفاده از مسئله (۲) نشان دهید که:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

۴- اگر a و b و c و d چهار عدد حقیقی باشند که b و d مخالف صفر باشند، نشان دهید که:

$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}{\frac{ad - bc}{bd}}$$



مستطیلی رسم کنید و طول و عرض آن را x و y بنامید.

۱- مساحت و محیط این مستطیل را برحسب x و y بنویسید.

۲- طول قطر این مستطیل را برحسب x و y بنویسید.

۳- قطر مستطیل، مستطیل را به دو مثلث مساوی تقسیم می کند. محیط و مساحت این مثلث ها را بنویسید.

در عبارت هایی که در بالا به دست آورده اید، نمادهای x و y به کار رفته اند که هر یک نشان دهنده عدد دلخواهی هستند.

نمادهایی که اعداد دلخواهی را نشان می دهند، متغیر می نامند، زیرا به جای آن ها هر عددی می توان قرار داد.

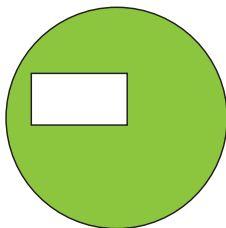
هر کدام از عبارت هایی که در فعالیت بالا به دست آورده اید، به صورت محاسباتی روی متغیرهای x و y ، از طریق اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و توان رسانی و ریشه گیری بوده است. این اعمال را اعمال جبری و عبارت های به دست آمده را عبارت های جبری می نامند. در حالت خاص، یک عدد را هم به عنوان یک عبارت جبری می پذیریم.

مثال: هریک از عبارت های زیر، یک عبارت جبری هستند.

$$x+y, \quad 2x+5a, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}x-4x^2, \\ \pi r^2-xy, \quad \sqrt{3}, \quad -3y+\sqrt{3}x^2, \quad a+b+\sqrt{a^2+b^2}$$

هر عبارت جبری نشان دهنده عددی است که با جایگذاری مقدار متغیرهایش معین خواهد شد.

مثال: عبارت جبری $2(a+b)$ دارای دو متغیر a و b است. اگر به جای a و b اعداد مثبتی قرار دهیم، مقدار این عبارت جبری نشان دهنده محیط مستطیلی است به طول a و عرض b . مقدار این عبارت جبری به ازای $a=3$ و $b=5$ برابر است با $2 \times (3+5) = 16$ و مقدار این عبارت جبری به ازای $a=6$ و $b=12$ برابر است با $2 \times (6+12) = 36$.



مثال: در شکل روبرو از سطح دایره ای به شعاع r ، سطح مستطیلی به طول x و عرض y برداشته شده است. مساحت قسمت رنگی یک عبارت

جبری با متغیرهای x و y و r به صورت $\pi r^2 - xy$ است. توجه داشته باشید که π یک عدد مشخص است و متغیر نیست.

مقدار این عبارت جبری به ازای $x=2$ و $y=5$ و $r=10$ برابر است با $100\pi - 10 = 100\pi - 2 \times 5 = 100\pi - 10$.

مثال: $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ یک عبارت جبری با متغیرهای a و b است. به ازای مقادیر مثبت برای a و b ، این عبارت جبری، محیط مثلث قائم الزاویه‌ای را نشان می‌دهد که طول ضلع‌های زاویه قائمه آن a و b است.

مقدار این عبارت جبری به ازای $a=4$ و $b=3$ برابر است با $4 + 3 + \sqrt{4^2 + 3^2} = 7 + \sqrt{25} = 12$.

مثال: $x^2 - y^2 + z$ یک عبارت جبری است و به ازای $x=1$ و $y=\sqrt{2}$ و $z=-3$ مقدار آن برابر است با $1^2 - (\sqrt{2})^2 - 3 = -6$.

یک جمله‌ای‌ها

ساده‌ترین نوع عبارت‌های جبری، آن‌هایی هستند که به صورت ضرب یک عدد در توان‌های صحیح نامنفی (عدد حسابی) از یک یا چند متغیر هستند. این گونه عبارت‌ها را یک جمله‌ای می‌نامند. برای مثال، عبارت‌های زیر یک جمله‌ای هستند.

$$xy, \quad 3ab^2, \quad -5y^2z^3, \quad \frac{2}{5}a^3x^2y, \quad -\sqrt{v}aby^2, \quad 6$$

توجه داشته باشید که یک عدد نیز به تنهایی یک جمله‌ای محسوب می‌شود. برای مثال، عبارت‌های جبری زیر یک جمله‌ای نیستند.

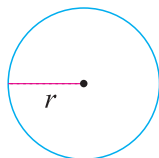
$$2x^2 + y, \quad x\sqrt{y}, \quad 3x^2y^{-1}, \quad 2 + x\sqrt{x^2 + 1}, \quad \frac{x^4y^2}{z}$$

در یک جمله‌ای‌ها، عددی که در متغیرها ضرب شده است را ضریب عددی آن یک جمله‌ای می‌نامند. در یک جمله‌ای $2x^2y^4$ توان متغیر x عدد ۲ است، به همین خاطر گوییم درجه این یک جمله‌ای نسبت به متغیر x عدد ۲ است. همچنین درجه این یک جمله‌ای نسبت به متغیر y عدد ۴ است.

به طور کلی، توان متغیری را که در یک جمله‌ای وجود دارد درجه یک جمله‌ای نسبت به آن متغیر می‌نامند. مثال: اگر شعاع دایره‌ای را r بنامیم، مساحت این دایره πr^2 است که یک، یک جمله‌ای با متغیر r و ضریب عددی π است. درجه این یک جمله‌ای نسبت به r عدد ۲ است.

در یک جمله‌ای‌هایی که فقط یک متغیر وجود دارد، توان آن متغیر را درجه آن یک جمله‌ای می‌گویند و نیازی به ذکر نام متغیر نیست.

محیط این دایره نیز برابر $2\pi r$ است که آن هم یک جمله‌ای با متغیر r و ضریب عددی 2π است. درجه این



یک جمله‌ای برابر ۱ است.

توجه کنید

اعداد مخالف صفر یک جمله‌ای‌های درجه صفر هستند.

تمرین در کلاس



۱- کدام یک از عبارت‌های زیر یک جمله‌ای هستند. ضریب عددی و درجه هر یک جمله‌ای را بر حسب متغیر x تعیین کنید. نمادهای حرفی، همگی متغیر هستند.

$$4x^2y, 5y^{-1}x, 2\sqrt{2}xy, a\sqrt{b}, \frac{ab}{2}, \frac{ab}{x}$$

۲- جدول زیر را کامل کنید.

ضریب عددی	درجه نسبت به x	متغیرها	آیا یک جمله‌ای است؟	عبارت جبری
$\sqrt{3}$	۲	x, y, z	بله	$\sqrt{3}x^2yz^3$
				$4xy^3$
				$-a^2x$
				$4\frac{xy}{a}$
				$\frac{4}{5}xa^2b$
				$6y\sqrt{x}$

جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها

در فعالیت زیر می‌خواهیم چگونگی جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها را مورد بررسی قرار دهیم.

فعالیت



به تساوی زیر توجه کنید :

$$5ax = (3+2)ax = 3ax + 2ax$$

۱- در تساوی بالا کدام خاصیت عمل ضرب مورد استفاده قرار گرفته است؟

۲- در طرف راست تساوی بالا، دو یک جمله‌ای وجود دارد. اختلاف این دو یک جمله‌ای در چیست؟

۳- طرف راست تساوی های زیر را مانند تساوی بالا بنویسید.

$$9ma^2x = (7+2)ma^2x = \dots$$

$$4axy^2 = (9-5)axy^2 = \dots$$

$$12ab^2x = (8+3+1)ab^2x = \dots$$

۴- شباهت ها و تفاوت های یک جمله ای هایی را که در طرف راست تساوی ها به وجود می آیند مشخص کنید.

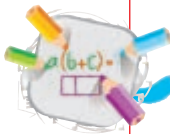
یک جمله ای هایی که قسمت نمادهای حرفی و توان های متناظر آن ها یکسان است، یک جمله ای های متشابه می نامند.

مثال: یک جمله ای های زیر متشابه اند.

$$9yzx^2, -x^2yz, \sqrt{3}zx^2y, -\frac{5}{9}x^2zy$$

مثال: یک جمله ای های زیر متشابه نیستند.

$$2xy, 5xz, -xya, 5ab$$



فعالیت

به تساوی های زیر توجه کنید.

$$4a + 6a = (4+6)a = 10a$$

$$7xy^2 - 3xy^2 = (7-3)xy^2 = 4xy^2$$

$$-\frac{3}{5}x^2 + x^2 = (-\frac{3}{5} + 1)x^2 = \frac{2}{5}x^2$$

۱- از کدام خاصیت جمع و ضرب در محاسبات بالا استفاده شده است؟

۲- آیا در هر تساوی، یک جمله ای های آن متشابه اند؟

۳- چه رابطه ای بین ضرایب یک جمله ای هایی که در طرفین تساوی ها می بینید وجود دارد؟

۴- با توجه به عملیات بالا، محاسبات مشابهی را برای عبارات زیر انجام دهید.

$$5x + 2x = \dots$$

$$9ab - 3ba = \dots$$

$$3xy^2 - 4xy^2 = \dots$$

$$\frac{1}{5}y^2 - \frac{2}{7}y^2 = \dots$$

$$4xyz + 2yxz - yzx = \dots$$

۵- آیا عبارت $3ab + 2a$ را می توان به شکل یک جمله ای نوشت؟ چرا؟

از فعالیت‌های قبل می‌توان نتیجه گرفت :

- دو یا چند یک جمله‌ای متشابه را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد.
- برای جمع یا تفریق یک جمله‌ای‌های متشابه، کافی است ضرایب عددی آن‌ها را با هم جمع یا از هم کم کنیم.
- بین یک جمله‌ای‌هایی که متشابه نیستند نمی‌توان جمع و تفریق انجام داد.

توجه کنید

$$3x + 5x \neq 8x^2, 3x + 5y \neq 8xy$$

ضرب یک جمله‌ای‌ها



به تساوی زیر توجه کنید :

$$4xy^2z \times 5x^2ya^2 = (4 \times 5)xx^2y^2zya^2 = 20x^{1+2}y^{2+1}za^2$$

۱- در این حاصل ضرب از کدام خاصیت عمل ضرب و قاعده توان‌رسانی استفاده شده است؟

۲- ضرایب عددی یک جمله‌ای‌های طرف چپ تساوی و ضریب عددی یک جمله‌ای طرف راست تساوی چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۳- توان‌های هریک از متغیرهای یک جمله‌ای‌های طرف چپ تساوی با توان همان متغیر در طرف راست تساوی چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴- محاسبات بالا را برای عبارت‌های زیر نیز انجام دهید.

$$4x^2y^3z^2 \times 2xy^4w = \dots$$

$$-3x^2a \times \frac{1}{5} ya^2 = \dots$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که :

در ضرب یک جمله‌ای‌ها، باید ضرایب عددی آن‌ها را در هم ضرب کنیم و توان‌های متغیرهای یکسان آن‌ها را با هم جمع کنیم و متغیرهای غیریکسان را در هم ضرب کنیم.



عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت خلاصه کنید.

۱) $-3x^2 \times 5y^2 =$

۲) $4x^2y \times \frac{1}{2}xy^2 =$

۳) $6xy \times 2y^2 \times \frac{1}{3}x^2y =$



مسائل

۱- در عبارت‌های زیر تعیین کنید کدام عبارت یک جمله‌ای است و ضریب عددی آن و درجه آن را نسبت به هر کدام از متغیرهایش تعیین کنید.

الف) $4ab^2$ ، ب) $\frac{2x}{yz}$ ، ج) $4x^2a\sqrt{y}$ ، د) $-\frac{4}{5}xyz$ ، هـ) $\frac{x^2yz^3}{2}$

۲- در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف) $9a^2 = 4a^2 + \square$

ب) $2ax = 16ax + \square$

ج) $2ax + \square = ax$

د) $\frac{ab}{2} + \square = \frac{3ab}{2}$

۳- عبارت‌های زیر را در صورت امکان ساده کنید.

الف) $4x^2 - 2x^2$

ب) $5t - 3/5t$

ج) $2xy^2 - xy^2 + 5y^2x$

د) $\frac{ab}{2} - \frac{ba}{3}$

هـ) $a^2b + 3b^2a$

و) $2xyz - 4yxz - 1/6zyx$

۴- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $4xy \times 5x^2y^2$

ب) $2xy \times \frac{1}{3}x^2yz^2$

ج) $(-\frac{1}{4}xy^2)(-\frac{1}{3}x^2y)^2$

د) $4x(2y-3)$

هـ) $(2x+4y)x$

و) $\frac{x}{4}(a+b^2)$

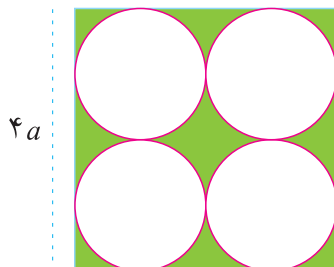
۵- اگر a و b اعدادی باشند به طوری که $a + 2b = 5$ و $c = 3$ ، مقدار $a + 2(b+c)$ چقدر خواهد بود؟

۶- از سطح مربع روبرو چهار دایره مساوی خارج شده است،

نشان دهید که مساحت قسمت رنگی، به صورت یک جمله‌ای

با متغیر a است. درجه و ضریب عددی این یک جمله‌ای را

تعیین کنید.



چند جمله ای ها

آن دسته از عبارت های جبری که به صورت جمع چند یک جمله ای غیر متشابه هستند را چند جمله ای می نامند. یک جمله ای ها نیز چند جمله ای محسوب می شوند. مثال : عبارت های زیر چند جمله ای هستند.

$$3x^2y + 8xyz - \sqrt{6}y^3 + 1, -x + yz + 5x^2z^2 + 3, 12z^2 - xy^5 + \frac{\sqrt{3}}{5}yz^3 - 1$$

اگر متغیری مانند x در یک چند جمله ای وجود داشته باشد، بزرگ ترین توانی از x را که در آن چند جمله ای وجود دارد درجه آن چند جمله ای نسبت به x می نامند.

مثال : چند جمله ای های $x+2$, $2xy - y^2 + z - 9$ و $\sqrt{5}z^3 - \frac{x}{4}y^2$ نسبت به x از درجه ۱ هستند. چند جمله ای های $xy - x^2 + 2$, $5 + x^2 + y^2 + z^5$ و $6zx^2 + yx - 3$ نسبت به x از درجه ۲ هستند. چند جمله ای های $5 + x^2y + xyz + yx^2 - 3x^2y - x - y^2$, $x^2z^2 - x - y^2$ نسبت به x از درجه ۳ هستند. برای نوشتن چند جمله ای های یک متغیره، روش استاندارد آن است که یک جمله ای هایی که در چند جمله ای وجود دارند به ترتیب از بزرگ ترین توان تا کوچک ترین توان نوشته شوند. این شیوه نوشتن چند جمله ای های یک متغیره را نمایش استاندارد چند جمله ای ها می نامند. برای مثال، نمایش استاندارد برخی چند جمله ای ها در زیر آمده است.

چند جمله ای	نمایش استاندارد
$-5x + 10 + 3x^2$	$3x^2 - 5x + 10$
$4y^2 - 3 - y^5 + y$	$-y^5 + 4y^2 + y - 3$
$15 - a^2 + 2a^6 + 8a^5$	$2a^6 + 8a^5 - a^2 + 15$

جمع و ضرب چند جمله ای ها

از آن جا که چند جمله ای ها به صورت جمع چند یک جمله ای هستند، برای جمع چند جمله ای ها، کافی است جمله های متشابه آن ها را با هم جمع کنیم.

مثال : جمع دو چند جمله ای $xy^2 + 4yz - 8$ و $-5xy^2 + z + 6yz + 5$ را بنویسید.

$$(xy^2 + 4yz - 8) + (-5xy^2 + z + 6yz + 5) = xy^2 - 5xy^2 + 4yz + 6yz + z - 8 + 5$$

$$= -4xy^2 + 10yz + z - 3$$

مثال : جمع دو چند جمله ای $4a^2b^2 - 3b + 7$ و $4a^2b^2 + 4b - 15$ را بنویسید.

$$(4a^2b^2 + 4b - 15) + (-4a^2b^2 - 3b + 7) = 4a^2b^2 - 4a^2b^2 + 4b - 3b - 15 + 7 = b - 8$$

برای ضرب چند جمله ای ها، ابتدا ضرب یک جمله ای ها در چند جمله ای ها را بررسی می کنیم.

مثال : حاصل ضرب یک جمله ای $2xy$ در چند جمله ای $x^2y + 3xy^2$ را حساب کنید.

$$2xy(x^2y + 3xy^2) = 2xy \times x^2y + 2xy \times 3xy^2 = 2x^3y^2 + 6x^2y^3$$

در محاسبه بالا، ابتدا با استفاده از خاصیت پخش ضرب نسبت به جمع، عبارت به صورت ضرب بین یک جمله ای ها در آمده است، سپس از قاعده ضرب یک جمله ای ها استفاده شده است.

مثال: حاصل ضرب یک جمله ای $-5a^2x$ در چندجمله ای $x^2 - a^2$ را حساب کنید.

$$-5ax^2(x^2 - a^2) = (-5ax^2) \times x^2 + (-5ax^2) \times (-a^2) = -5ax^4 + 5a^2x^2$$

برای ضرب دو چندجمله ای در یکدیگر، تک تک جمله های یکی از چندجمله ای ها را در چند جمله ای دیگر ضرب می کنیم.

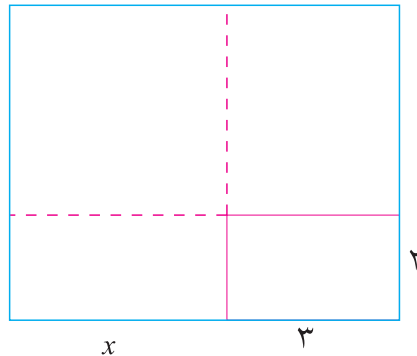
مثال: حاصل ضرب چندجمله ای $x+2$ در چندجمله ای $x-1$ را به دست آورید.

$$(x+2)(x-1) = x(x-1) + 2(x-1) = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2$$

علت درستی محاسبه بالا، خاصیت پخش ضرب نسبت به جمع است. $(x-1)$ مانند یک عدد در نظر گرفته شده است و در $x+2$ ضرب شده است.

مثال: مستطیلی با طول ۳ و عرض ۲ را در نظر بگیرید. اگر

طول و عرض این مستطیل را x واحد افزایش دهیم، مساحت آن چقدر می شود؟



طول و عرض مستطیل جدید عبارت است از $x+3$ و $x+2$ پس مساحت مستطیل جدید برابر است با $(x+2)(x+3)$ که ضرب دو چند جمله ای است.

$$(x+3)(x+2) = x(x+2) + 3(x+2) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

مثال: حاصل ضرب چندجمله ای $xy+yz-2$ در چندجمله ای x^2+y^2-1 را به دست آورید.

$$(xy+yz-2)(x^2+y^2-1) = xy(x^2+y^2-1) + yz(x^2+y^2-1) - 2(x^2+y^2-1) \\ = x^3y + xy^3 - xy + x^2yz + y^2z - yz - 2x^2 - 2y^2 + 2$$

ابوبکر محمدبن حسین کرجی

ریاضیدان مسلمان (نیمه دوم قرن چهارم قمری)، از نخستین کسانی بود که عملیات حسابی مانند جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ریشه یابی را برای ساختن و ساده کردن عبارات جبری به کار برد. او عبارات جبری هم چون «مال مال و چهارمکعب و شش کمتر» $(x^4 + 4x^2 - 6)$ را ساخت. کرجی توان های مختلف مجهولات در عبارات جبری را «مراتب» می نامید که مانیز امروزه همین کار را می کنیم. کرجی دریافت که حاصل ضرب x^n در $\frac{1}{x^n}$ یک می شود. با این که او می دانست $a - (-b) = a + b$ ولی از قانون $-a - (-b) = -(a - b)$ بی خبر بود.



مسائل

- ۱- طول ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع را a نامیده ایم. محیط این مثلث را بر حسب a حساب کنید. آیا این عبارت یک جمله ای است؟ در این صورت ضریب عددی و درجه آن را مشخص کنید.
- ۲- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف $(x+y)+(2x+3y)$

ب $(2x^2+5y)-(x^2+y^2)$

ج $2x^2+xy+3x^2+yx$

د $(1 \cdot k^2 - 3kt + 4k^2) - (3k^2 + 5kt)$

- ۳- اگر داشته باشیم $A=1-2x^2$ و $B=3x^2-4x+1$ و $C=x^2-x$ ، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

ج $(A+B)-3C$

ب $A+B$

الف $A-B$

و C^2-A^2

هـ A^2

د C^2

- ۴- حاصل عبارت های زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

الف $4(x+y)$

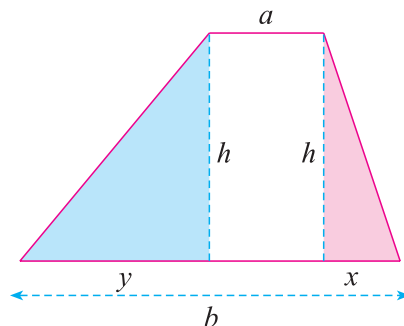
ب $2x(x+3)+9x(x-4)$

ج $(x+1)(x^2-x+1)$

- ۵- با استفاده از شکل زیر و استفاده از مساحت مثلث ها و مستطیل، فرمول مساحت دوزنقه را که به صورت

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h$$

است، پیدا کنید.





فعالیت

۱- به ازای مقادیر داده شده برای x جدول را کامل کنید.

x	x^2	$6x$	x^2+6x+9	$(x+3)^2$
-۳				
-۲				
۰				
$\frac{1}{2}$				

۲- با مقایسه دو ستون آخر جدول چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر جدول را به ازای چند مقدار دیگر برای x ادامه دهیم، چه حدسی برای رابطه بین دو ستون آخر می‌زنید؟

۳- به دلخواه خود چند مقدار دیگر برای x در نظر بگیرید و حدس خود را آزمایش کنید.

۴- $(x+3)^2$ همان حاصل ضرب $(x+3)(x+3)$ است. این عمل ضرب را انجام دهید و حاصل را با چندجمله‌ای x^2+6x+9 مقایسه کنید. آیا این بررسی، حدس شما را تأیید می‌کند؟

تساوی $(x+3)^2 = x^2+6x+9$ به ازای هر مقداری از x برقرار است. این گونه تساوی‌ها را اتحاد می‌نامند.

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان، مقدارهای یکسانی داشته باشند، عبارت حاصل از تساوی بین آن‌ها را اتحاد می‌نامند.

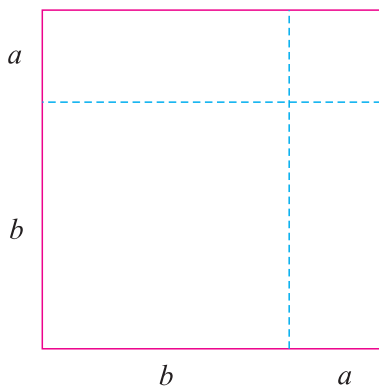


تمرین در کلاس

۱- توان رسانی را در عبارت $(x+5)^2$ انجام دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

۲- توان رسانی را در عبارت $(2x-6)^2$ انجام دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

۳- توان رسانی را در عبارت $(a+b)^2$ انجام دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.



یک مربع رسم کنید و ضلع آن را به دو پاره خط تقسیم کنید و طول این پاره خط‌ها را a و b بنامید.
مساحت این مربع را یک بار مستقیماً از طریق طول ضلع آن، و بار دیگر به صورت مجموع مساحت‌های مربع‌ها و مستطیل‌های کوچک تر محاسبه کنید و آن‌ها را مساوی یکدیگر قرار دهید. چه نتیجه‌ای به دست می‌آورید؟

برای هر دو عدد a و b ، با محاسبه $(a+b)(a+b)$ نتیجه می‌شود تساوی زیر به ازای هر مقداری برای a و b برقرار است.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

تساوی بالا یک اتحاد است و آن را اتحاد «مربع دو جمله‌ای» می‌نامند.
از آن جا که در یک اتحاد، تساوی به ازای هر مقداری از متغیرها برقرار است، اگر به جای متغیرها، عبارت‌های جبری نیز قرار دهیم باز هم تساوی برقرار خواهد بود. این عمل را جایگذاری می‌نامند.
مثال: در اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ، به جای a ، xy و به جای b ، 3 قرار می‌دهیم. در نتیجه:

$$(xy+3)^2 = (xy)^2 + 2(xy) \times 3 + 3^2$$

پس از ساده کردن، تساوی بالا به شکل $(xy+3)^2 = x^2y^2 + 6xy + 9$ در می‌آید. این تساوی نیز یک اتحاد است.



اتحاد مربع دو جمله‌ای $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ را در نظر بگیرید.

- ۱- در طرفین تساوی، به جای a عبارت x و به جای b عبارت $3y$ قرار دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید.
- ۲- در طرفین تساوی، به جای a مقدار (-1) و به جای b عبارت y^2 قرار دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید.
- ۳- در طرفین تساوی، به جای a عبارت xz و به جای b عبارت $(-y)$ قرار دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید.

اگر در اتحاد مربع دو جمله‌ای $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ به جای b ، $(-b)$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

این تساوی نیز یک اتحاد است و آن را نیز اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌نامند.

با جایگذاری عبارت‌های دلخواه روی متغیرهای یک اتحاد، اتحادهای دیگری ساخته می‌شوند که آن‌ها را نمونه‌ای

از اتحاد اولیه می‌نامند. برای مثال، اتحادهای زیر همگی نمونه‌ای از اتحاد مربع دو جمله‌ای هستند.

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1, (xy+4z)^2 = x^2y^2 + 8xyz + 16z^2, (\sqrt{5}-2t)^2 = 5 - 4\sqrt{5}t + 4t^2$$



تمرین در کلاس

الف) با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای محل‌های نقطه‌چین را با عبارت مناسب پر کنید.

$$(a+1)^2 = a^2 + \dots + 1$$

$$(1+b)^2 = \dots + 2b + \dots$$

$$(x-6y)^2 = \dots$$

$$(ax-3)^2 = \dots - 6ax + \dots$$

$$(x^2-yz)^2 = \dots$$

ب) محاسبه زیر را در نظر بگیرید و درستی هر مرحله را توضیح دهید.

$$(a+b)(x+y) = a(x+y) + b(x+y) = ax + ay + bx + by$$

ج) محاسبه بالا را از آخرین تساوی به اولین تساوی مجدداً بنویسید و درستی هر مرحله را توضیح دهید.

اگر اتحاد مربع دو جمله‌ای را به صورت $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ بنویسیم، مانند آن است که یک چندجمله‌ای را

که به صورت مجموعی از یک جمله‌ای هاست به صورت ضرب دو چندجمله‌ای درآورده‌ایم.

اگر بتوان یک چندجمله‌ای را به صورت ضرب دو یا چند، چندجمله‌ای نوشت به طوری که درجه آن‌ها کمتر باشد، گوییم آن چندجمله‌ای را تجزیه کرده‌ایم.

تجزیه چندجمله‌ای‌ها عکس عمل ضرب چندجمله‌ای‌ها است. در عمل ضرب، عبارت‌هایی را که به صورت

حاصل ضرب هستند، با انجام عمل ضرب، به صورت جمع چند یک جمله‌ای درمی‌آوریم. ولی در تجزیه،

یک چندجمله‌ای را که به صورت جمع چند یک جمله‌ای است، به صورت حاصل ضرب دو یا چند، چند

جمله‌ای دیگر درمی‌آوریم.

اگرچه عمل ضرب ساده است ولی عمل تجزیه آسان نیست و فقط در حالت‌های خاص می‌توان آن را انجام داد.

مثال: عبارت $x^2 - 8x + 16$ را تجزیه کنید.

این عبارت نمونه‌ای از اتحاد مربع دو جمله‌ای است و داریم $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$.

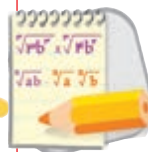
اتحادها نقش مهمی در تجزیه چندجمله‌ای‌ها دارند. هر اتحادی در واقع نشان‌دهنده یک عمل تجزیه است و با استفاده از نمونه‌های این اتحادها می‌توان برخی از تجزیه‌ها را انجام داد.



تمرین در کلاس

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 + 10x + 25, \quad 4a^2 + 4ax + x^2, \quad x^2y^2 - 8xy + 16, \quad x^2 - 2x^2yz + y^2z^2$$



مسائل

۱- با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x+1)^2 = (x-1)^2 = (2a+b)^2 =$$

$$(a-3b)^2 = (2a-3b)^2 = (4a-2)^2 =$$

$$(2x + \frac{1}{y})^2 = (x+2)^2 - (x-1)^2 =$$

۲- عبارت‌های زیر را به صورت حاصل ضرب دو عبارت بنویسید.

$$a^2 + 4a + 4 = y^2 - 6y + 9 =$$

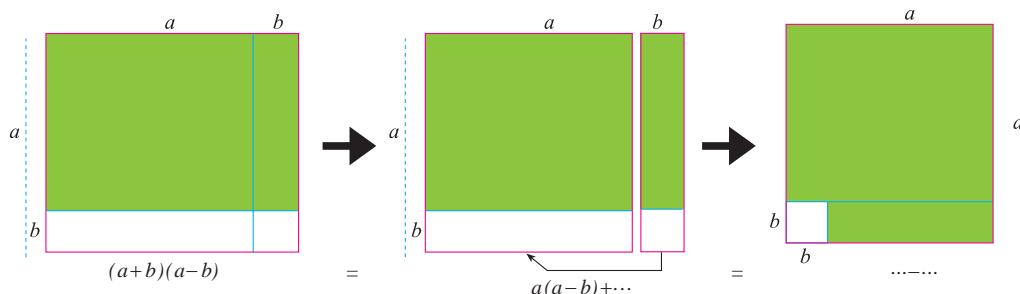
$$9x^2 - 6x + 1 = x^2 + 2xy + y^2 =$$



فعالیت

دو عدد مثبت a و b را با شرط $b < a$ در نظر بگیرید.

۱- از روی شکل زیر در محل‌های نقطه چین مساحت قسمت‌های رنگی را بنویسید.



۲- اتحادی را که به دست آورده‌اید، بنویسید.

۳- عمل ضرب $(a-b)(a+b)$ را انجام دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید. اتحادهای به دست آمده را با هم مقایسه کنید.

با محاسبه مستقیم نتیجه می شود :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

این یک اتحاد است و آن را «اتحاد مزدوج» می نامند. از این اتحاد نیز در تجزیه عبارت های جبری استفاده می شود.

مثال :

$$\begin{aligned}x^2-4 &= x^2-2^2 = (x+2)(x-2) \\ -2a^2+9b^2 &= (3b)^2-(\sqrt{2}a)^2 = (3b-\sqrt{2}a)(3b+\sqrt{2}a)\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در تجزیه چندجمله ای ها، رادیکالی شدن ضرایب عددی اشکالی ندارد و در تجزیه فقط باید چندجمله ای های با درجه کوچک تر به دست آوریم.



تمرین در کلاس

۱- با استفاده از اتحاد مزدوج در محل های نقطه چین عبارت های مناسب بگذارید.

$$(x+4)(x-4)=x^2-\dots$$

$$(2x+3)(2x-3)=\dots-9$$

$$(ab+x)(ab-x)=\dots$$

$$(x+\dots)(x-\dots)=x^2-\frac{1}{4}$$

۲- با استفاده از اتحاد مزدوج چندجمله ای های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2-9, \quad 4x^2-y^2, \quad \frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}, \quad x^2y^4-9z^2$$

استفاده از اتحادها برخی محاسبات با اعداد بزرگ را ساده تر می کند.

مثال : مقدار 999^2 را حساب کنید.

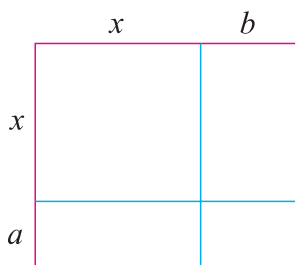
$$999^2 = (1000-1)^2 = (1000)^2 + 1 - 2 \times 1000 = 1000000 - 2000 = 998001$$

مثال : مقدار 998×1002 را حساب کنید.

$$998 \times 1002 = (1000-2)(1000+2) = (1000)^2 - 2^2 = 1000000 - 4 = 999996$$



فعالیت



برای سه عدد مثبت x و a و b ، مستطیلی به طول $x+a$ و عرض $x+b$ مانند روبه رو رسم شده است.

۱- مساحت این مستطیل را یک بار از طریق طول و عرض آن و یک بار از طریق مساحت مربع و مستطیل های داخل آن حساب کنید و مساحت های به دست آمده را مساوی قرار دهید. اتحاد به دست آمده

را بنویسید.

۲- عمل ضرب $(x+b)(x+b)$ را انجام دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید. این اتحاد را با اتحاد به دست آمده در بالا مقایسه کنید.

با انجام عمل ضرب $(x+a)(x+b)$ نتیجه می شود :

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

این یک اتحاد است و آن را اتحاد «یک جمله مشترک» می نامند.

مثال : چندجمله ای های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 + 5x + 4 = x^2 + (4+1)x + 4 \times 1$$

$$= (x+4)(x+1)$$

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 + (-2 + (-3))x + (-2) \times (-3)$$

$$= (x-2)(x-3)$$

مثال : چندجمله ای $2x^2 - 5x - 3$ را تجزیه کنید.

با بررسی این چندجمله ای می توان فهمید که دو برابر این چندجمله ای را راحت تر می توان تجزیه کرد. اگر

این چندجمله ای را A بنامیم، داریم :

$$2A = 4x^2 - 10x - 6 = (2x)^2 - 5(2x) - 6 = (2x+1)(2x-6)$$

$$A = \frac{(2x+1)(2x-6)}{2} = (2x+1)(x-3)$$

تمرین در کلاس



۱- با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

$$1)(x+1)(x+2) =$$

$$2)(2x-1)(2x+4) =$$

$$3)(ax+5)(ax+b) =$$

$$4)(x-a)(x-b) =$$

۲- با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک چندجمله ای های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 + 4x + 3, \quad x^2 + x - 2, \quad x^2 - 6x + 8$$

۳- چندجمله ای زیر را تجزیه کنید.

$$3x^2 + 5x - 2$$



فعالیت

۱- محاسبه زیر را انجام دهید و از طریق آن یک اتحاد بنویسید.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=$$

۲- در اتحاد به دست آمده در بند (۱) به جای b ، $(-b)$ قرار دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

۳- محاسبه زیر را تکمیل کنید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=$$

۴- در اتحاد به دست آمده در بند (۳) به جای b ، $(-b)$ قرار دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

تساوی های زیر به ازای هر مقداری از a و b برقرارند و آن ها را اتحاد های تفاضل و مجموع مکعب دو جمله می نامند.

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

تساوی های زیر به ازای هر مقداری از a و b برقرارند و آن ها را اتحاد مکعب دو جمله ای می نامند.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$(2x-1)(4x^2+2x+1)=(2x)^3-1^3=8x^3-1 \quad \text{مثال ۱:}$$

$$(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)=a^3+(2b)^3=a^3+8b^3 \quad \text{مثال ۲:}$$

$$\begin{aligned} (2a-3b)^3 &= (2a)^3+3(2a)^2(-3b)+3(2a)(-3b)^2+(-3b)^3 \\ &= 8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3 \quad \text{مثال ۳:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\right)^3 &= \left(\frac{a}{3}\right)^3-3\left(\frac{a}{3}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)+3\left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^3 \\ &= \frac{a^3}{27}-\frac{a^2b}{6}+\frac{ab^2}{4}-\frac{b^3}{8} \quad \text{مثال ۴:} \end{aligned}$$

مثال ۵: عبارت x^6-1 را تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} x^6-1 &= (x^2)^3-1^3 \\ &= (x^2-1)(x^2+x^2+1) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+x^2+1) \end{aligned}$$



۱- با استفاده از اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$۱) (x+۲)(x^۲-۲x+۴)=$$

$$۲) (۲x-۳y)(۴x^۲+۶xy+۹y^۲)=$$

$$۳) (x+۵)^۳=$$

۲- با استفاده از اتحادها چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^۲+۸ \quad , \quad ۲۷x^۳-\frac{1}{۸} \quad , \quad a^۶-۶۴b^۶$$

مسائل



۱- کدام یک از تساوی‌های زیر اتحاد هستند؟

$$۱) x+x=۲x$$

$$۲) x \times x = x^۲$$

$$۳) x^۴-x^۲=x^۲(x-۱)(x+۱)$$

۲- با استفاده از اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x+۱)(x+۲)=$$

$$(x-۱)(x+۵)=$$

$$(۲x-۴)(۲x+۳)=$$

$$(x-\sqrt{۲})(x+\sqrt{۲})=$$

$$\left(\frac{1}{۲}-x\right)\left(\frac{1}{۲}+x\right)=$$

۳- به کمک اتحادها عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^۲-a^۲=$$

$$۲-a^۲=$$

$$۴x^۲-۹=$$

$$\frac{x^۲}{۴}-\frac{1}{۲۵}=$$

$$۱۶x^۲-۳۶y^۲=$$

$$a^۲x^۲-b^۲y^۲=$$

$$x^۲-(a+b)x+ab=$$

$$x^۲-۷x+۱۲=$$

$$x^۲+۲\sqrt{۲}x+۲=$$

۴- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$(x-۲)(x^۲+۲x+۴)=$$

$$(x+۳)(x^۲-۳x+۹)=$$

$$(۲x+۱)(۴x^۲-۲x+۱)=$$

$$(x+۱)^۳=$$

$$(۲a+۱)^۳=$$

$$(a-۲)^۳=$$

۵- به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را به صورت ضرب دو یا چند عبارت بنویسید.

$$x^2 - 2y =$$

$$x^2 + 1 =$$

$$a^2 + 8b^2 =$$

$$x^2 + 3x^2 + 3x + 1 =$$

$$y^2 - 6y^2 + 12y - 8 =$$

۶- چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^4 - 2x^2 + 1 =$$

$$x^4 - 1 =$$

$$x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 =$$

$$x^4 + x^2 - 2 =$$

۷- برای اعداد مثبت a ، b و c با رسم یک شکل ثابت کنید:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

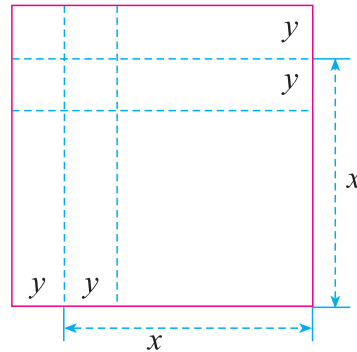
این تساوی را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای ثابت کنید. اگر به جای b ، $(-b)$ قرار دهیم نتیجه بگیریم:

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

۸- با استفاده از اتحاد مزدوج، تساوی زیر را ثابت کنید:

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

تساوی بالا را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای ثابت کنید. در حالتی که x و y اعداد مثبتی باشند و $x > y$ ، تساوی بالا را به کمک شکل زیر ثابت کنید.



ابوبکر محمدبن حسین کرجی فرمول زیر را اثبات کرده است:

$$\sqrt{A+B} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}}$$

آیا می‌توانید به کمک اتحادها این فرمول را ثابت کنید؟ (A و B اعدادی مثبت هستند و $B < A$)

