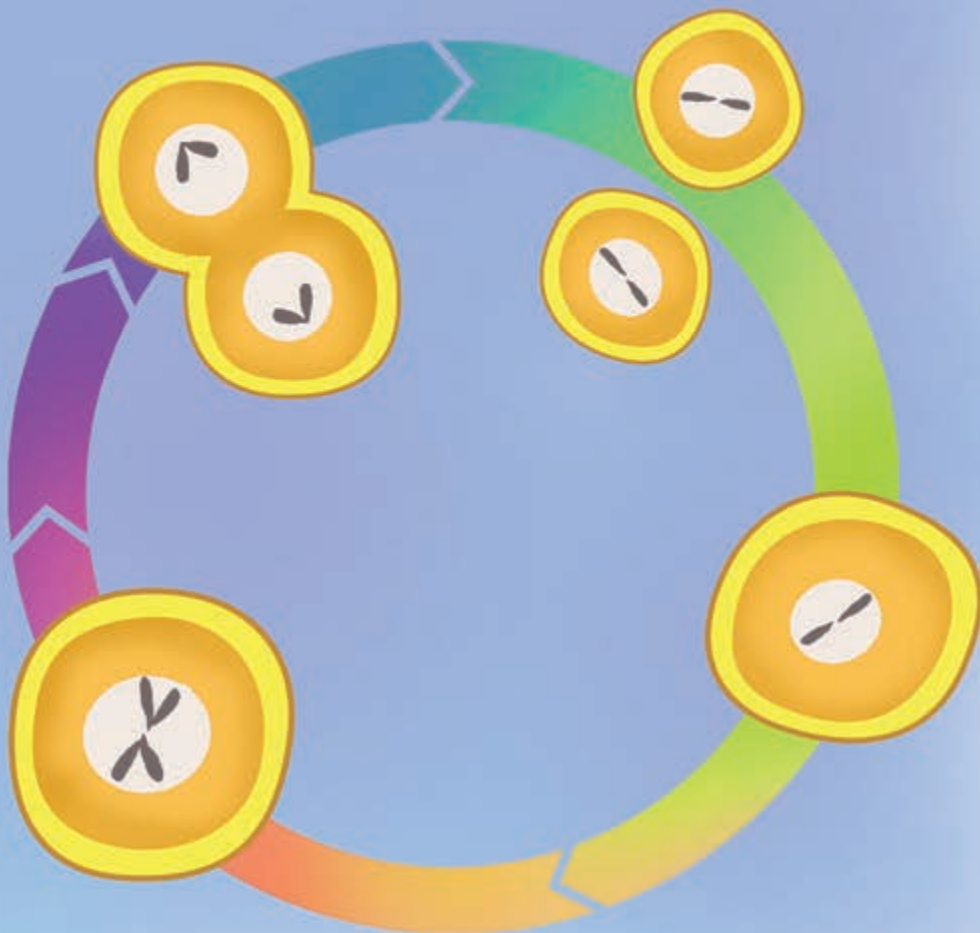


توان رسانی و ریشه گیری



سلول ها با تقسیمات متوالی خود، جانداران را شکل می دهند. یک جاندار کوچک از میلیاردها سلول تشکیل شده است.

فکر می کنید چه قدر طول می کشد تا از یک سلول یک جاندار کوچک به وجود آید؟

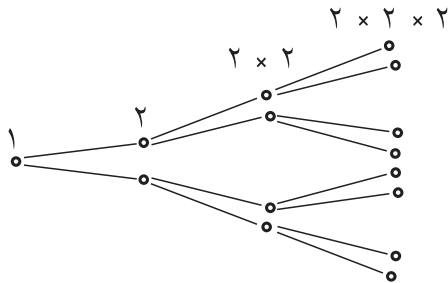
توان رسانی و قواعد آن

شما با توان و به توان رساندن اعداد در دوره راهنمایی آشنا شده‌اید. در این بخش، علاوه بر یادآوری مطالب قبلی با نکات جدیدی در توان، آشنا خواهید شد.

فعالیت



در علوم و زیست‌شناسی خوانده‌اید که رشد موجودات تک سلولی به گونه‌ای است که در یک واحد زمانی هر موجود تک سلولی به دو سلول تقسیم می‌شود و این تقسیم شدن ادامه پیدا می‌کند. شکل و جدول زیر با شروع از یک تک سلول، تعداد این سلول‌ها را پس از چند واحد زمانی نشان می‌دهد.



واحد زمانی	۰	۱	۲	۳	۴
تعداد	۱	۲	۴	?	?

۱- جدول بالا را تکمیل کنید.

۲- پس از ۷ واحد زمانی چند موجود تک سلولی تولید می‌شود؟ این تعداد را به صورت عدد توان‌دار نشان دهید.

۳- پس از چند واحد زمانی تعداد موجودات تک سلولی به ۳۲ عدد می‌رسد؟ روش یافتن جواب خود را توضیح دهید.

اگر بخواهیم عددی را چند بار در خود ضرب کنیم، برای خلاصه‌نویسی این عمل ضرب، از نماد توان استفاده می‌کنیم. برای مثال:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = (\sqrt{5})^3$$

اگر a یک عدد حقیقی و $n > 1$ یک عدد طبیعی باشد، داریم:

$$a^n = \overbrace{a \times \dots \times a}^n$$

بنا به تعریف $a^1 = a$.

قسمت (۳) فعالیت صفحه قبل نشان می دهد که نمایش اعداد به صورت توانی علاوه بر ساده نویسی مزایای دیگری هم در حل مسائل دارد. در نمایش توانی اعداد، عددی که در خودش ضرب می شود را پایه و تعداد دفعاتی که آن عدد در عمل ضرب نوشته می شود را توان می نامند.



فعالیت

به تساوی های زیر توجه کنید.

$$5^6 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5) \times 5 = 5^5 \times 5^1$$

$$5^6 = (5 \times 5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5) = 5^4 \times 5^2$$

۱- با توجه به تساوی های بالا به جای نقطه چین عدد مناسب بنویسید.

$$5^6 = 5^5 \times \dots = 5^4 \times \dots = 5^3 \times \dots = 5^2 \times \dots = 5^1 \times \dots$$

۲- تساوی های بالا را برای عدد 7^4 بنویسید.

۳- در زیر، به جای نقطه چین مقدار مناسب قرار دهید.

$$8^5 = 8^3 \times 8^2 = 8^4 \times \dots = \dots \times 8^2 = \dots \times 8^1$$

$$\dots = 3^4 \times \dots = 3^5 \times 3^3 = 3^2 \times \dots = \dots \times 3^1$$

$$\dots = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^8 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \dots = \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \dots = \left(\frac{0}{4}\right)^5 \times \dots$$

$$a^y = a^x \times \dots = \dots \times a^z = a^5 \times \dots = \dots \times a^f$$

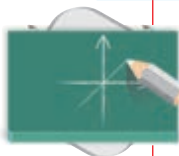
$$\dots = b^4 \times b^5 = b^2 \times \dots = \dots \times b^6 = \dots \times b^1$$

از فعالیت بالا نتیجه می شود که اگر n و m دو عدد طبیعی و a یک عدد حقیقی باشد داریم:

$$a^{n+m} = a^n \times a^m$$

توجه کنید

در حالت کلی $a^n + a^m \neq a^{n+m}$



تمرین در کلاس

حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

ج) 9×3^4

ب) $2^6 \times 2^7$

الف) $\overbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}^5$

هـ) $3^2 \times 3^4 \times 3^5 = (3^2 \times 3^4) \times 3^5$

د) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{0}{5}\right)^4$

ز) $a^m \times a^n \times a^k$

و) $a^2 \times a^3 \times a^4$

اگر یک عدد طبیعی بزرگ تر از ۱ را به صورت حاصل ضرب دو یا چند عدد طبیعی بزرگ تر از ۱ بنویسیم، گوئیم آن عدد را تجزیه کرده‌ایم. برای مثال، ۲۴ را می‌توانیم به شکل‌های زیر تجزیه کنیم:

$$24 = 3 \times 8 = 6 \times 4 = 12 \times 2 = 3 \times 2^3$$

به تساوی‌های زیر توجه کنید:

$$4^5 \div 4^2 = \frac{4^5}{4^2} = \frac{4^3 \times 4^2}{4^2} = 4^3 = 4^{5-2}$$

$$9^{12} \div 9^7 = \frac{9^{12}}{9^7} = \frac{9^5 \times 9^7}{9^7} = 9^5 = 9^{12-7}$$

تساوی‌های بالا در حالت کلی هم برقرارند. برای یک عدد مخالف صفر a و دو عدد طبیعی m و n که $m > n$ ، در تقسیم a^m بر a^n داریم:

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

به تساوی‌های زیر توجه کنید:

$$3^5 = (6 \times 5)^3 = (6 \times 5) \times (6 \times 5) \times (6 \times 5) = (6 \times 6 \times 6) \times (5 \times 5 \times 5) = 6^3 \times 5^3$$

$$3^5 = (10 \times 3)^3 = (10 \times 3) \times (10 \times 3) \times (10 \times 3) = (10 \times 10 \times 10) \times (3 \times 3 \times 3) = 10^3 \times 3^3$$

تساوی‌های بالا در حالت کلی هم برقرارند. اگر a و b دو عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد داریم:

$$(ab)^n = a^n \times b^n$$

به تساوی‌های زیر توجه کنید:

$$12^3 \div 4^3 = \frac{12^3}{4^3} = \frac{12 \times 12 \times 12}{4 \times 4 \times 4} = \frac{12}{4} \times \frac{12}{4} \times \frac{12}{4} = \left(\frac{12}{4}\right)^3$$

$$25^4 \div 16^4 = \frac{25^4}{16^4} = \frac{25 \times 25 \times 25 \times 25}{16 \times 16 \times 16 \times 16} = \frac{25}{16} \times \frac{25}{16} \times \frac{25}{16} \times \frac{25}{16} = \left(\frac{25}{16}\right)^4$$

تساوی‌های بالا در حالت کلی هم برقرارند. برای دو عدد a و b (ب مخالف صفر است) و عدد طبیعی n ، در تقسیم a^n بر b^n داریم:

$$a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $6^{15} \div 6^8$

۲) $(\frac{1}{4})^7 \div (0/25)^3$

۳) $a^5 \div a^2$

۴) $4^3 \times 5^2$

۵) $(\frac{1}{9})^4 \times 5^4$

۶) $8a^2$

۷) 27×5^2

۸) $6^2 \div 2^2$

۹) $2^7 \div (\frac{1}{3})^7$

۱۰) $\frac{4^5 \times 2^5}{8^2}$

۱۱) $\frac{16a^4}{3^4}$

۱۲) $a^3 \times \frac{8b^3}{27}$

توجه کنید

در حالت کلی

$$a^x + b^x \neq (a+b)^x$$

و

$$a^x = b^x \neq (a-b)^x$$

۲- در هر یک از دو عبارت $4^2 + 3^2$ و $(4+3)^2$ مشخص کنید، آیا ابتدا عمل جمع انجام می‌شود یا عمل به توان رساندن.

۳- با به دست آوردن مقدارهای $4^2 + 3^2$ و $(4+3)^2$ مشخص کنید که این دو مقدار مساوی‌اند یا نه.

۴- دو سؤال بالا را برای دو عبارت $4^2 - 3^2$ و $(4-3)^2$ نیز جواب دهید.



فعالیت

به تساوی‌های زیر توجه کنید:

$$(5^2)^2 = 5^2 \times 5^2 = 5^{2+2} = 5^{2 \times 2}$$

$$(14^4)^2 = 14^4 \times 14^4 \times 14^4 \times 14^4 = 14^{4+4+4+4} = 14^{4 \times 4}$$

۱- با توجه به تساوی‌های بالا، در زیر، به جای نقطه چین‌ها مقدار مناسب قرار دهید.

$$(2^3)^4 = 2^3 \times \dots \times \dots \times \dots = 2^{3+\dots+\dots+\dots} = 2^{3 \times \dots}$$

$$(a^4)^2 = a^4 \times \dots \times \dots = a^{4+\dots+\dots} = a^{\dots \times 2}$$

$$(a^n)^4 = a^{n \times \dots \times \dots} = a^{n+\dots+\dots+\dots} = a^{\dots \times \dots}$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود برای عدد a و دو عدد طبیعی n و m ، اگر a^n را به توان m برسانیم داریم:

$$(a^n)^m = a^{nm}$$



- ۱- عدد 27^5 را به صورت یک عدد توان دار با پایه ۳ بنویسید.
- ۲- حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.
الف) $2^6 \times (2^3)^4$ ب) $3^5 \times 27^2$ ج) $(a^5)^2 \times (b^3)^5$
- ۳- حاصل عبارات‌های $(2^2)^3$ و $2^{(2^2)}$ را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.

توجه کنید

در حالت کلی
 $(a^n)^m \neq a^{(n^m)}$

فعالیت



- ۱- اعداد $2^2, 2^3, 2^4$ و 2^5 را حساب کنید و از کوچک به بزرگ مرتب کنید.
- ۲- هرچه توان‌های بالاتری از ۲ را حساب کنیم، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود یا کوچک‌تر؟ دلیل خود را بیان کنید.
- ۳- اعداد $2^2, 3^2$ و 4^2 را حساب کنید و از کوچک به بزرگ مرتب کنید.
- ۴- برای هر عدد طبیعی n ، حدس می‌زنید کدام یک از دو عدد 3^n و 2^n بزرگ‌ترند؟ حدس خود را به ازای $n=4$ و $n=5$ بیازمایید.

به طور کلی اگر a عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد، هرچه توان‌های بالاتری از آن را حساب کنیم، حاصل بزرگ‌تر می‌شود. برای مثال:

$$a < a^2 < a^3 < a^4, \quad a^n < a^{n+1}$$

همچنین، اگر a و b دو عدد مثبت باشند که $a < b$ ، با محاسبه توان‌های یکسان از a و b داریم:

$$a^2 < b^2, \quad a^3 < b^3, \quad a^4 < b^4, \quad a^n < b^n$$

مثال: اعداد 8^4 و 2^{11} و 16^3 را با هم مقایسه کنید.

تمام این اعداد را می‌توانیم به صورت توانی از ۲ بنویسیم:

$$16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}, \quad 8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$$

بنابراین:

$$16^3 = 8^4 = 2^{12} > 2^{11}$$

مثال: از دو عدد 8^4 و 81^3 کدام یک بزرگ‌تر است؟

این دو عدد را می‌توان به صورت دو عدد توان دار با توان‌های یکسان نوشت:

$$81^3 = (3^4)^3 = 3^{12}, \quad 8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$$

$$8^4 = 2^{12} < 3^{12} = 81^3$$

بنابراین:



مسائل

۱- حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

الف) $(-4) \times (-4) \times (-4) =$

ب) $(-0/03) \times (-0/03) \times (-0/03) =$

ج) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} =$

د) $\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} =$

هـ) $\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} =$

و) $(a+b)(a+b)(a+b) =$

ز) $(a^2+1)(a^2+1)(a^2+1)(a^2+1) =$

۲- حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

الف) $(\frac{1}{2})^7 \times (\frac{1}{3})^7 \times (\frac{1}{4})^7 =$

ب) $0/04 \times 5^2 =$

ج) $x^2 x^2 x^5 =$

د) $x^4 y^4 z^4 =$

هـ) $2/5^7 \div 5^7 =$

و) $3^2 \times 3^2 \times 4^5 \times 12^4 =$

ز) $a^6 \div 2^6 =$

ح) $(2^2)^5 \times (3^5)^2 \times 6^{15} =$

ط) $\frac{3^2 \times 4^2 \times 12^5}{2^4 \times 6^4} =$

۳- عدد 8^6 را به صورت حاصل ضرب‌های زیر بنویسید.

الف) دو عدد توان‌دار مساوی

ب) دو عدد توان‌دار با توان ۶

ج) دو عدد توان‌دار که یکی ۶۴ برابر دیگری باشد.

د) سه عدد توان‌دار مساوی با پایه ۸

هـ) سه عدد توان‌دار مساوی با توان ۲

۴- حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

الف) $3 \times 3^2 + 3^2 + 3^2 =$

ب) $\frac{3^5 \times (4^6 + 4^6 + 4^6)}{6^6} =$

ج) $8^2 \times 9^2 \times 25^5 \times (3^6 + 3^6) =$

د) $a^4 \times b^4 \times (ab)^5 =$

هـ) $\frac{x^5 y^4}{x^2 y z^3} =$ ($x, y, z \neq 0$)



بیندیشیم

اگر a عددی مثبت

و $a < 1$ ، با مقایسه

توان‌های a با یکدیگر

چه نتیجه‌ای می‌توان

گرفت؟

۵- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $2 + 3 \times 4^2 =$

ب) $2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

ج) $\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \times 3 \times 4^2}{2 - \left(\frac{1}{3}\right) \times 6^2} =$

۶- اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

$25^2, 2^{12}, 36^2$

در باب چهل و چهارم از کتاب مفتاح المعاملات مسئله زیر مطرح شده است :
سؤال : به شخصی گفتند که وارد این بوستان شو که در آن هفت دهلیز متوالی است و از درختان آن به تعدادی میوه بچین که هنگام بیرون آمدن در کنار هر دهلیز نصف میوه‌ها را بگذاری و هنگامی که از آخرین دهلیز خارج شدی تنها یک میوه برایت بماند. حال چند میوه باید بچینی؟

توان صفر و توان منفی

فعالیت

۱- جدول زیر را تکمیل کنید.

عدد توان دار	3^4	3^3	3^2	3^1
حاصل	۸۱			

۲- چه رابطه‌ای بین اعداد سطر دوم جدول می‌یابید؟

۳- سطر اول را ادامه دهید و عدد بعدی را 3^0 قرار دهید. با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد سطر دوم پیدا کرده‌اید، چه عددی را برای 3^0 پیشنهاد می‌کنید؟

۴- جدول بالا را برای پایه‌های ۲ و ۶ با همان توان‌ها نیز تشکیل دهید. چه عددی را برای 2^0 و 6^0 پیشنهاد می‌کنید؟

۵- برای عدد مخالف صفر a ، جدول بالا را برای توان‌های a بنویسید. چه عددی را برای a^0 پیشنهاد می‌کنید؟

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که مناسب است برای هر عدد مخالف صفر a ، تعریف کنیم :

$$a^0 = 1$$



فعالیت

۱- جدول زیر را تکمیل کنید.

عدد توان دار	3^3	3^2	3^1	3^0
حاصل	۲۷			

۲- چه رابطه‌ای بین اعداد سطر دوم جدول می‌یابید؟

۳- سطر اول را ادامه دهید و عدد توان دار بعدی را 3^{-1} قرار دهید. اکنون با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد سطر دوم پیدا کرده‌اید، چه عددی را برای 3^{-1} پیشنهاد می‌کنید؟

۴- جدول بالا را برای پایه‌های ۲ و ۶ با همان توان‌ها نیز تشکیل دهید. چه عددی را برای 2^{-1} و 6^{-1} پیشنهاد می‌کنید؟

۵- برای عدد مخالف صفر a ، جدول بالا را برای توان‌های a بنویسید. چه عددی را برای a^{-1} پیشنهاد می‌کنید؟

۶- سطر اول را ادامه دهید و اعداد بعدی را a^{-2} و a^{-3} قرار دهید. با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد سطر دوم پیدا کرده‌اید، چه اعدادی را برای a^{-2} و a^{-3} پیشنهاد می‌کنید؟

از این فعالیت نتیجه می‌شود که مناسب است برای هر عدد حقیقی مخالف صفر مانند a ، تعریف کنیم:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{و} \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \quad \text{در حالت کلی برای یک عدد طبیعی } n \text{ تعریف می‌کنیم:}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

مثال:

$$4^{-1} = \frac{1}{4}, \quad (0/1)^{-7} = \frac{1}{(0/1)^7}, \quad (1/2)^3 = \frac{1}{(1/2)^{-3}}, \quad (-5)^{-21} = \frac{1}{(-5)^{21}}$$



تمرین در کلاس

۱- عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت با توان منفی بنویسید.

(الف) $0/001$ (ب) $\frac{1}{45}$ (ج) $0/25$ (د) $\frac{1}{b}$ (ه) $\frac{1}{b^3}$

۲- عبارت‌های زیر را با توان مثبت بنویسید.

الف) 5^{-2} ب) $(\sqrt{7})^{-5}$ ج) $(\frac{1}{2})^{-3}$ د) $2\pi^{-3}$

۳- عبارت‌های زیر را به صورتی بنویسید که کسری نباشند.

الف) $\frac{1}{a^3}$ ب) $\frac{1}{b^{-2}}$ ج) $\frac{-1}{b^2}$ د) $\frac{\pi^2}{\pi^{-3}}$

۴- حاصل اعداد 4^{-2} ، $(4^{-1})^2$ و $(4^2)^{-1}$ را بنویسید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵- اعداد $(0/125)^2$ ، $(0/25)^4$ و $(0/5)^3$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

با چنین تعریفی از توان‌های مثبت و منفی اعداد حقیقی مخالف صفر، می‌توان نشان داد که اگر a و b دو عدد مخالف صفر و p و q دو عدد صحیح باشند، خواص مهم توان رسانی به شکل زیر برقرارند:

$a^{p+q} = a^p \times a^q$	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
$(ab)^p = a^p \times b^p$	$(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p}$
$(a^p)^q = a^{pq}$	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

مثال:

$$(5 \times 7)^{-2} = 5^{-2} \times 7^{-2}$$

$$(6^2)^{-2} = 6^{-2 \times 2}$$

$$\frac{4^{-2}}{4^{-7}} = 4^{-2 - (-7)} = 4^5$$

$$(\frac{2}{3})^{-7} = \frac{2^{-7}}{3^{-7}}$$

$$7^{-3} = \frac{1}{7^3}$$



مسائل

۱- هر یک از عبارات های زیر را به صورت عبارت با توان منفی بنویسید.

الف) $\frac{1}{1000001}$ ب) $\frac{1}{bc}$ ج) 80000 د) $\frac{1}{311}$

۲- هر یک از عبارات های زیر را به صورت یک عبارت با توان مثبت بنویسید.

الف) 3^{-5} ب) $(\frac{1}{5})^{-4}$ ج) $(\frac{2}{3})^{-3} \times (\frac{2}{3})^{-4}$ د) $a^{-2} \times b^{-2}$

هـ) $a^{-3} \times b^3 \times (c^2)^{-2}$

۳- حاصل عبارات های زیر را به دست آورید.

الف) $2^{-2} + 3^{-2}$ ب) $(4^2)^{-1} + (2^{-2})^2$ ج) $2 + 3 \times 4^{-1} - 2 \times 5^{-1}$

۴- با استفاده از تعریف توان های منفی، ثابت کنید که برای هر عدد حقیقی مخالف صفر a و هر عدد طبیعی

n داریم:

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$$

آیا می‌دانید دور کره زمین در استوا چند متر است؟ اندازه گیری‌ها نشان می‌دهد که این طول تقریباً $40,000,000$ متر است. اگر طول هر مورچه یک میلی‌متر باشد، چند مورچه لازم است تا با هم دور کره زمین در استوا را بیوشانند؟ چون هر متر 1000 میلی‌متر است، پس $40,000,000,000$ مورچه برای این کار لازم است. آیا می‌توانید این عدد را بخوانید؟ این عدد چند صفر دارد؟ در عمل به عددهای بزرگ‌تر از این هم برخورد می‌کنیم. مثلاً قطر کهکشان راه شیری چند متر است؟ آیا می‌توان چنین اعدادی را روی کاغذ نوشت؟ روشن است که این شیوه نوشتن برای اعداد بزرگ مناسب نیست. با این شیوه، نمی‌توان آن‌ها را روی کاغذ نوشت و اگر هم بنویسیم نمی‌توانیم متوجه میزان بزرگی آن‌ها شویم و محاسبه‌ای روی آن‌ها انجام دهیم.

یکی از کاربردهای توان اعداد، نوشتن اعداد بسیار بزرگ و اعداد بسیار کوچک به صورت توانی است^۱. مثلاً توان‌های مثبت 10^0 ، 10^1 ، 10^2 ، 10^3 ، 10^4 و ... حساب کنید. این اعداد رفته رفته بزرگ می‌شوند به گونه‌ای که حتی نمی‌توان آن‌ها را روی کاغذ نوشت. آیا می‌توانید عدد 10^{500} را در نمایش دهدهی آن روی کاغذ بنویسید؟ توان‌های منفی 10^{-1} ، 10^{-2} ، 10^{-3} ، 10^{-4} و ... حساب کنید. این اعداد رفته رفته کوچک می‌شوند و میزان کوچکی آن‌ها به قدری است که نمی‌توان نمایش اعشاری آن‌ها را روی کاغذ نوشت. استفاده از توان به ما کمک می‌کند که اعداد بسیار بزرگ و بسیار کوچکی را که با آن‌ها برخورد می‌کنیم به راحتی بنویسیم و روی آن‌ها محاسبه انجام دهیم.

یکی از شیوه‌های نوشتن اعداد بزرگ، استفاده از توان‌های مثبت 10^0 است. مثلاً 10^4 عدد بسیار بزرگی است و اگر بخواهیم با شیوه‌های معمولی آن را بنویسیم، می‌بایست چهل صفر جلوی ۱ بگذاریم. هیچ کس با یک نگاه نمی‌تواند تعداد این صفرها را بشمارد و مقدار واقعی این عدد را تشخیص دهد. اما، نمایش آن به صورت 10^4 ، به خوبی اندازه این عدد را نشان می‌دهد و کار محاسباتی با آن را عملی می‌کند. هر عدد مثبت اعشاری را می‌توان به شکل‌های گوناگونی به صورت ضرب یک عدد اعشاری در توان مثبتی از 10^0 ، نوشت.

۱- این مبحث بیشتر در فیزیک، شیمی و نجوم کاربرد دارد و مربوط به نمایش اعداد است.

مثال :

$$\begin{aligned}240.87/64 &= 240.87/64 \times 10^1 = 240.87/64 \times 10^2 = 240.87/64 \times 10^3 = 240.87/64 \times 10^4 \\5432 \times 10^{22} &= 5/432 \times 10^{15} \\1023456000000 &= 1/023456 \times 10^{11} \\0.0672 \times 10^{14} &= 6/72 \times 10^{12}\end{aligned}$$

اعداد سمت راست تساوی‌ها، همان نماد علمی اعداد سمت چپ تساوی‌ها هستند. از طریق نماد علمی، به خوبی می‌توان میزان بزرگی آن عدد را فهمید و آن را با دیگر اعداد مقایسه کرد. مثال : جرم زمین تقریباً $6/0 \times 10^{24}$ و جرم ماه تقریباً $7/34 \times 10^{22}$ و جرم خورشید تقریباً $2/0 \times 10^{30}$ کیلوگرم است. جرم زمین چند برابر جرم ماه است؟ جرم خورشید چند برابر جرم زمین است؟

$$\frac{\text{جرم زمین}}{\text{جرم ماه}} = \frac{6/0 \times 10^{24}}{7/34 \times 10^{22}} \approx 8/17 \times 10$$

$$\frac{\text{جرم خورشید}}{\text{جرم زمین}} = \frac{2/0 \times 10^{30}}{6/0 \times 10^{24}} \approx 3/33 \times 10^5$$

مشکل نمایش معمولی اعداد بسیار بزرگ، برای اعداد بسیار کوچک هم وجود دارد. برای نمایش اعداد بسیار کوچک، می‌توان از توان‌های منفی 10 استفاده کرد. به عنوان مثال، جرم یک ذره غبار تقریباً 0.00000000067 کیلوگرم است. آیا میزان کوچکی این عدد را می‌توانید درک کنید؟ اعداد اعشاری بسیار کوچک را می‌توان به صورت ضرب یک عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی مخالف صفر در یک توان منفی از 10 نمایش داد. برای مثال :

$$0.00000000067 = 6/7 \times \frac{1}{10^9} = 6/7 \times 10^{-9}$$

اگر یک عدد اعشاری مثبت را به صورت ضرب یک عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی مخالف صفر، در توان صحیحی از 10 بنویسیم، این نمایش را نماد علمی آن عدد می‌نامند.

هر عدد اعشاری کوچکی را نیز می‌توان با این روش نوشت، مثلاً :

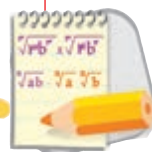
$$\begin{aligned}0.00004567 &= 4/567 \times 10^{-5} \\0.0001023 \times 10^{-7} &= 1/023 \times 10^{-11} \\672 \times 10^{-17} &= 6/72 \times 10^{-15}\end{aligned}$$

مثال: جرم یک الکترون تقریباً $9/1 \times 10^{-28}$ کیلوگرم و جرم اتم هیدروژن تقریباً $1/7 \times 10^{-24}$ کیلوگرم است. آیا می‌توانید میزان کوچکی این اعداد را تصور کنید؟ کدام یک جرم بیشتری دارد و جرم آن چند برابر دیگری است؟ در نماد علمی جرم اتم هیدروژن، توان 10^0 ، عدد (-24) و در نماد علمی جرم الکترون، توان 10^0 ، عدد (-28) است که نشان می‌دهد جرم این ذرات بسیار کوچک است. هر قدر توان منفی از لحاظ قدر مطلق بزرگ‌تر باشد، عدد کوچک‌تر است، پس جرم اتم هیدروژن بیشتر از جرم الکترون است. با تقسیم جرم اتم هیدروژن بر جرم الکترون، عددی به دست می‌آید که نشان می‌دهد جرم اتم هیدروژن چند برابر بیشتر است.

$$\frac{\text{جرم اتم هیدروژن}}{\text{جرم الکترون}} = \frac{1/7 \times 10^{-24}}{9/1 \times 10^{-28}} = \frac{1/7}{9/1} \times 10^{-24} \times \frac{1}{10^{-28}} = \frac{1/7}{9/1} \times \frac{1}{10^{-24}} \times 10^{28}$$

$$= \frac{1/7}{9/1} \times 10^4 \approx 0/1868 \times 10^4 = 1/868 \times 10^3$$

مسائل



۱- نماد علمی اعداد زیر را بنویسید.

الف) 26478914 ب) $0/0004892$ ج) 12×150000 د) $200 \times 423 + 2$

هـ) $12/8 \times 10^4 \times 5^6$ و) $\frac{32 \times 11 \times 10^{12}}{44 \times 80}$ ز) $\frac{1}{200000}$

۲- نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید.

الف) $1/43 \times 10^5$ ب) $2/543 \times 10^{-3}$

ج) $1/23 \times 10^6$ د) $0/00421 \times 10^{-4}$

۳- جرم یک الکترون تقریباً $9/1 \times 10^{-28}$ گرم است. جرم یک جسم 2549 تنی چند برابر جرم یک الکترون است؟ حاصل را به صورت نماد علمی بنویسید. (هر تن برابر 1000 کیلوگرم است.)

ریشه گیری

کشاورزی، یک قطعه زمین به شکل مربع دارد. او برای کاشت و کار در زمین خود در هر متر مربع 5° گرم بذر مصرف کرده است. اگر این کشاورز برای کاشتن در همه زمین خود 5 کیلوگرم بذر مصرف کرده باشد، محیط زمین او چقدر است؟

برای حل این مسئله ابتدا مساحت زمین را به دست می‌آوریم. مساحت زمین بر حسب متر مربع برابر است با $100 = \frac{5^\circ \times 5^\circ}{5^\circ}$. طول زمین عددی است که مربع آن 100 می‌شود.

اگر طول ضلع مربعی x باشد، می‌دانید که مساحت آن x^2 است. اگر مساحت مربعی 100 متر مربع باشد، طول یک ضلع آن چند متر است؟ باید دنبال عدد مثبتی بگردیم که مربع آن 100 باشد. این عدد 10 است، زیرا $10^2 = 100$. پس محیط آن: متر $4 \times 10 = 40$ خواهد بود.

برای مثال می‌دانید $9 = 3^2 = (-3)^2$. هر دو عدد 3 و (-3) ریشه دوم 9 نامیده می‌شوند. اما، بنا به تعریف $\sqrt{9}$ ، آن ریشه دوم 9 است که مثبت هم باشد، بنابراین $\sqrt{9} = 3$.

فرض کنید a عددی مثبت باشد و $a^2 = b$ ، در این صورت $a^2 = b = (-a)^2$ و a و $-a$ را ریشه‌های دوم b می‌نامند.

برای یک عدد حقیقی مثبت b ، بنا به تعریف \sqrt{b} آن ریشه دوم b است که مثبت هم باشد.

$$\sqrt{64} = 8, \quad \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}, \quad \sqrt{0.01} = 0.1$$

مثال:

ریشه دوم صفر، همان صفر است و $\sqrt{0} = 0$.

توجه کنید

$$\sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{9} \neq -3, \quad -\sqrt{9} = -3$$



ببیندیشیم

آیا همه اعداد ریشه دوم دارند؟ کدام اعداد ریشه دوم دارند؟



۱- درستی تساوی‌های زیر را با محاسبه طرفین تساوی توضیح دهید.

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3|, \quad \sqrt{5^2} = |5|, \quad \sqrt{4^2} = \sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$$

۲- درستی تساوی $\sqrt{a^2} = |a|$ را به ازای چند مقدار مثبت یا منفی که برای a انتخاب می‌کنید، بررسی کنید.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که برای هر عدد a داریم:

مثال:

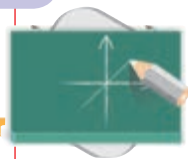
$$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6, \quad \sqrt{6^2} = |6| = 6, \quad \sqrt{(-\pi)^2} = |-\pi| = \pi$$

مثال: $\sqrt{c^4} = c^2$ ، زیرا c^2 نامنفی است و $|c^2| = c^2$ و $(c^2)^2 = c^4$.

توجه داشته باشید که

هر وقت عبارت \sqrt{b} را به کار می‌بریم، فرض بر آن است که b عددی نامنفی است، زیرا فقط اعداد نامنفی ریشه دوم دارند.

تمرین در کلاس



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{(-6)^2}, \quad \sqrt{b^4 c^4}, \quad \sqrt{a^8}$$

۲- با استفاده از تعریف \sqrt{b} درستی تساوی $(\sqrt{b})^2 = b$ را توضیح دهید.

اگر اندازه حجم مکعبی را بدانید، اندازه طول ضلع آن را چگونه به دست می‌آورید؟ اگر طول ضلع مکعبی x باشد، می‌دانید که حجم آن x^3 است. برای مثال، اگر حجم مکعبی ۶۴ باشد، برای یافتن طول ضلع آن، باید دنبال عددی بگردیم که توان سوم آن ۶۴ باشد. این عدد ۴ است، زیرا $4^3 = 64$. بنا به تعریف ۴ را مکعب یا ریشه سوم ۶۴ می‌نامند و با $\sqrt[3]{64}$ نشان می‌دهند، یعنی $\sqrt[3]{64} = 4$.

به طور کلی، اگر a و b دو عدد باشند به طوری که $a^3 = b$ ، a را ریشه سوم b می‌نامند و آن را با $\sqrt[3]{b}$ نشان می‌دهند.

توجه داشته باشید که هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

مثال:

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3} = 3$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \sqrt[3]{\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$$

$$\sqrt[3]{-0.001} = \sqrt[3]{(-0.1) \times (-0.1) \times (-0.1)} = -0.1$$



پیندیشیم

آیا همه اعداد ریشه سوم دارند؟ علامت ریشه سوم اعداد مثبت چیست؟ علامت ریشه سوم اعداد منفی چیست؟



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt[3]{-125}, \sqrt[3]{a^3}, \sqrt[3]{b^6}, \sqrt[3]{x^4 x^5}$$

۲- با استفاده از تعریف $\sqrt[3]{b}$ درستی تساوی $(\sqrt[3]{b})^3 = b$ را توضیح دهید.

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها



فعالیت

۱- جدول زیر را کامل کنید.

a	۹	۲۵	$\frac{1}{4}$
b	۴	۴	۱۰۰
$\sqrt{a}\sqrt{b}$			
\sqrt{ab}			

۲- چه رابطه‌ای بین اعداد سطر سوم و چهارم می‌بینید؟

۳- با انتخاب چند عدد دیگر برای a و b که مربع یک عدد گویا هستند، درستی نتیجه‌ای را که گرفته‌اید بررسی کنید.

از فعالیت بالا می‌توان نتیجه گرفت که برای هر دو عدد نامنفی مانند a و b داریم:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

توجه کنید که در تساوی بالا هر دو عدد a و b باید مثبت باشند. اگر a و b هر دو منفی باشند، سمت چپ تساوی معنا دارد، ولی سمت راست تساوی معنا ندارد.

به طور مشابه برای ریشه سوم گیری نیز برای هر دو عدد a و b، داریم:

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$$

مثال :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt[3]{-9} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{-9 \times 3} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\sqrt[3]{ba^2} \times \sqrt[3]{ab^2} = \sqrt[3]{ba^2 ab^2} = \sqrt[3]{a^3 b^3} = \sqrt[3]{(ab)^3} = ab$$

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a^2}$$

تمرین در کلاس



حاصل عبارات های زیر را به دست آورید.

۱) $\sqrt{28} \times \sqrt{7} =$

۲) $\sqrt[3]{0.01} \times \sqrt[3]{0.8} =$

۳) $\sqrt[3]{2b^2} \times \sqrt[3]{4b^2} =$

۴) $\sqrt[3]{abc} \times \sqrt[3]{a^2 b^5 c^8} =$

در محاسبات با رادیکال ها، برای نشان دادن ضرب یک عدد در یک رادیکال و ضرب چند رادیکال در یکدیگر از علامت «×» استفاده نمی کنیم. برای مثال ضرب $2 \times \sqrt{3}$ را به صورت $2\sqrt{3}$ و ضرب $5 \times \sqrt[3]{14}$ را به صورت $5\sqrt[3]{14}$ می نویسیم.

با انجام عملیات روی رادیکال ها سعی می کنیم عبارات های ساده تری به دست آوریم. این عمل را ساده کردن می نامند.

مثال : $\sqrt{75}$ را ساده کنید.

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

مثال : عبارت $\sqrt{162b^5c^4}$ را ساده کنید.

$$\sqrt{162b^5c^4} = \sqrt{81b^4c^4 \times (2b)} = \sqrt{(9b^2c^2)^2 \times 2b} = 9b^2c^2 \sqrt{2b}$$

مثال : عبارت $\sqrt[3]{54b^4c^6}$ را ساده کنید.

$$\sqrt[3]{54b^4c^6} = \sqrt[3]{27b^3c^6 \times (2b)} = \sqrt[3]{(3bc^2)^3 \times 2b} = 3bc^2 \sqrt[3]{2b}$$



۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\sqrt[3]{150}, \sqrt{128a^5}, \sqrt[3]{54}, \sqrt[3]{\frac{1}{1000}x^3}, \sqrt[3]{250a^2b^3}$$

مشابه قانون ضرب رادیکال‌ها، در تقسیم رادیکال‌ها نیز برای هر دو عدد a و b ، که $b \neq 0$ ، روابط زیر برقرارند:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

مثال:

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{9 \times 2}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{9} \times \sqrt{2}}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{2}$$

مثال:

$$\frac{\sqrt[3]{81a^5}}{\sqrt[3]{125c^6}} = \frac{\sqrt[3]{81a^5}}{\sqrt[3]{125c^6}} = \frac{\sqrt[3]{3^3 a^3 \times 3a^2}}{\sqrt[3]{5^3 (c^2)^3}} = \frac{3a\sqrt[3]{3a^2}}{5c^2} = \frac{3a}{5c^2}\sqrt[3]{3a^2}$$

گویا کردن مخرج کسرها

عدد $\frac{1}{\sqrt{3}}$ را در نظر بگیرید. برای درک بهتر این گونه اعداد و میزان بزرگی آن‌ها می‌توانیم، آن‌ها را به گونه‌ای بنویسیم که در مخرج کسر، اعداد رادیکالی نداشته باشیم. برای مثال عدد $\frac{1}{\sqrt{3}}$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

این عمل را گویا کردن مخرج کسر می‌نامند.

مثال: مخرج کسر $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ را گویا کنید و آن را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2 \times (\sqrt[3]{5})^2}{\sqrt[3]{5} \times (\sqrt[3]{5})^2} = \frac{2\sqrt[3]{5^2}}{(\sqrt[3]{5})^3} = \frac{2(\sqrt[3]{25})}{5} = \frac{2}{5}\sqrt[3]{25}$$

جمع و تفریق رادیکال‌ها

فعالیت



به تساوی‌های زیر توجه کنید:

$$6\sqrt{3} = (2+4)\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$$

$$7\sqrt[3]{4} = (2+5)\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4}$$

۱- در تساوی‌های بالا از کدام خاصیت ضرب استفاده شده است؟

۲- در عبارت‌های $5\sqrt{11}$ و $5\sqrt[3]{6}$ ، به جای ۵ عبارت $(7-2)$ را قرار دهید و مشابه محاسبه بالا را انجام دهید.

در جمع و تفریق عبارت‌های رادیکالی، در صورت وجود رادیکال‌های یکسان، می‌توان با فاکتورگیری از آن، ضرایب آن‌ها را با هم جمع یا از هم تفریق کرد.
مثال:

$$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 9\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{3} = (5+3-9+\frac{5}{3})\sqrt{2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

مثال: عبارت $3\sqrt{32} - 5\sqrt{2}$ را ساده کنید.

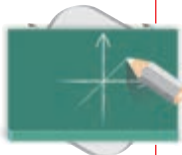
$$3\sqrt{32} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{16 \times 2} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{16}\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 3 \times 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

مثال: عبارت $\sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{63}$ را ساده کنید.

$$\begin{aligned} \sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{63} &= \sqrt{9 \times 5} - 3\sqrt{4 \times 5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{9 \times 7} \\ &= 3\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - 3\sqrt{7} = -\sqrt{5} - 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

مثال: عبارت $\sqrt[3]{81} + \sqrt{-24} - \sqrt[3]{0/0003}$ را ساده کنید.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{81} + \sqrt{-24} - \sqrt[3]{0/0003} &= \sqrt[3]{27 \times 3} + \sqrt{(-1) \times 3} - \sqrt[3]{\frac{3}{1000}} \\ &= 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{1000}} = (3 - 2 - \frac{1}{10})\sqrt[3]{3} \\ &= \frac{9}{10}\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$



تمرین در کلاس

توجه کنید

در حالت کلی

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

و

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

- ۱- دو مقدار $\sqrt{9+16}$ و $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ را به دست آورید. آیا این دو مقدار مساوی اند؟
- ۲- دو مقدار $\sqrt{100-36}$ و $\sqrt{100} - \sqrt{36}$ را به دست آورید. آیا این دو مقدار مساوی اند؟



مسائل

۱- ریشه‌های دوم اعداد زیر را به دست آورید.

الف) ۳۶ (ب) ۰/۰۴

ج) $\frac{1}{a^8}$ (د) $9a^2$

۲- ریشه سوم اعداد زیر را محاسبه کنید.

الف) ۲۷ (ب) $-\frac{1}{8}$ (ج) $64b^3$

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt{4x^2}$ ب) $\sqrt{25}$ ج) $\sqrt{0.04}$

د) $\sqrt[3]{a^3b^6}$ ه) $\sqrt[3]{27}$ و) $\sqrt[3]{-8}$

۴- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{300}$ ب) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$

ج) $\sqrt[3]{-16}$ د) $\sqrt[3]{54}$

۵- حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید و آن‌ها را ساده کنید.

الف) $\sqrt{27} \times \sqrt{3}$ ب) $-3\sqrt{5} \times (-2\sqrt{20})$ ج) $\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{8}{27}}$

د) $\sqrt[3]{36} \times \sqrt[3]{6}$ ه) $2\sqrt{a^4b} \times 3\sqrt{a^2b^3}$

۶- مخارج اعداد و عبارت‌های زیر را گویا کنید و آن‌ها را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ب) $\sqrt{\frac{5}{6}}$

ج) $\frac{4}{\sqrt[3]{16}}$ د) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

ه) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ و) $\sqrt[3]{\frac{3}{4a}}$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$

۵) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}$ ۶) $4\sqrt{2^2+3^2} + \sqrt{52}$

$$۷) \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}$$

$$۹) 4\sqrt{x} - 5\sqrt{x}$$

$$۸) \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{4}$$

$$۱۰) 3\sqrt[3]{y} - 2\sqrt[3]{y}$$

۸- به جای \square عدد مناسب قرار دهید.

$$۱) \square - \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

$$۲) -2\sqrt{7} - \square = -3\sqrt{7}$$

$$۳) \sqrt[3]{2} - \square = 2\sqrt[3]{2}$$



