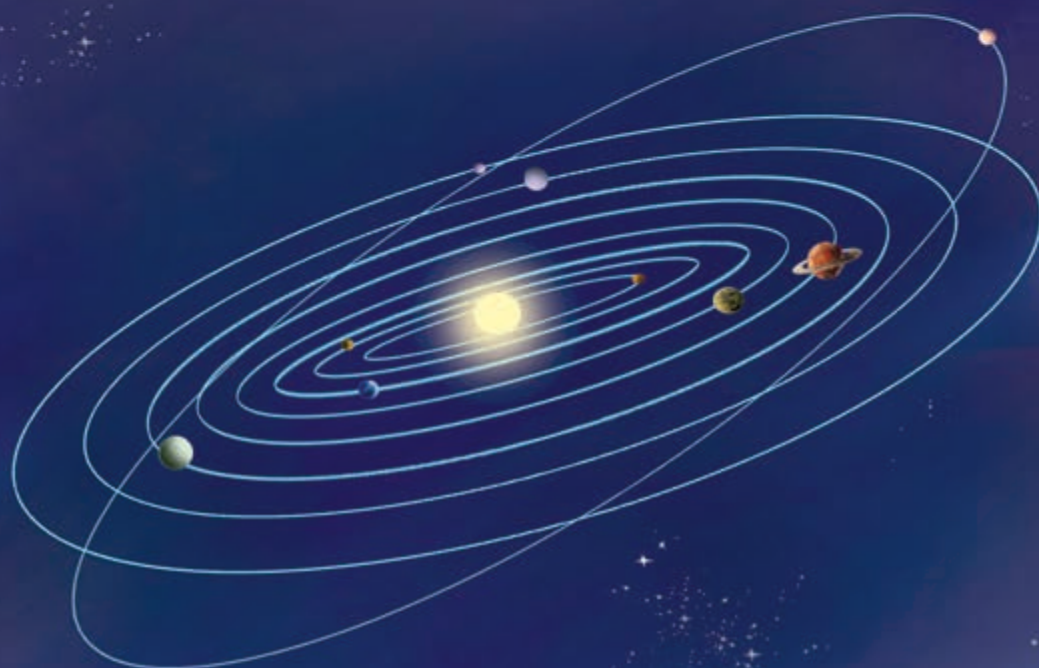


مجموعه ها



سال‌ها تصور می‌شد پلوتون جزء سیارات منظومه شمسی است. اخیراً انجمن جهانی نجوم اعلام نموده است که پلوتون عضوی از مجموعه سیارات منظومه شمسی نیست. با دقت در شکل بالا چه دلیلی برای توجیه این نقطه نظر می‌توان ارائه کرد؟

مسئله گروه‌های دانش‌آموزی

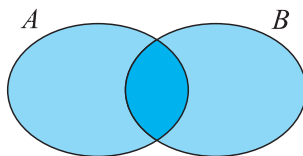
بسیاری از مفاهیم ریاضی از طریق حل مسائلی که بشر با آن روبه‌رو شده است به وجود آمده‌اند. شما نیز با حل مسائلی که با آن‌ها روبه‌رو می‌شوید می‌توانید مفاهیم جدید ریاضی را کشف کنید. محمد، دانش‌آموزی است که با حل مسئله‌ای که با آن روبه‌رو شده بود توانست نخست مفهوم مجموعه‌ها و سپس مطالب دیگر وابسته به مجموعه‌ها را به دست آورد.

محمد مدرسه خود را عوض کرده بود و وقتی وارد کلاس جدید شد، متوجه شد که در این کلاس دو گروه ورزشی یکی فوتبال و دیگری والیبال، تشکیل شده است. او فهمید، شرکت در این گروه‌ها داوطلبانه بوده و هرکس با میل خود می‌توانست عضو هر کدام از این دو گروه بشود یا نشود.

این گروه‌ها A و B نام‌گذاری شده بودند و هر گروهی با اعضایش مشخص می‌شد. محمد علاقه داشت بداند که هر کدام از این گروه‌ها چند عضو دارند. او با شمارش تعداد دانش‌آموزان کلاس فهمید که کلاس آن‌ها بدون خودش، ۳۶ دانش‌آموز دارد. ابتدا فکر کرد که تعداد اعضای گروه‌های A و B روی هم، همان ۳۶ نفر است، ولی زود متوجه شد که ممکن است برخی دانش‌آموزان در هیچ گروهی شرکت نکرده باشند.

او در زمان تمرین این گروه‌ها متوجه شد که ۴ نفر در هیچ کدام از این گروه‌ها شرکت نمی‌کنند و نتیجه گرفت تعداد اعضای گروه‌های A و B روی هم برابر $32 = 36 - 4$ است. محمد با شرکت در یکی از تمرین‌های گروه A فهمید تعداد اعضای گروه A، ۲۱ نفر است. او فکر کرد چون تعداد اعضای این دو گروه روی هم ۳۲ نفر است، پس گروه B، $32 - 21 = 11$ یعنی ۱۱ عضو دارد.

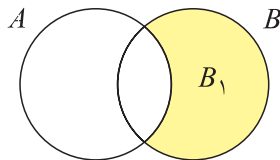
اما، یکی از افراد گروه B به محمد گفت که نتیجه‌گیری او اشتباه است و تعداد اعضای گروه B بیشتر از ۱۱ نفر است. محمد با کمی تأمل دریافت که نتیجه‌گیری او بر مبنای این فرض بوده است که دو گروه A و B عضو مشترکی ندارند در حالی که ممکن است برخی دانش‌آموزان خواسته باشند در هر دو گروه عضویت داشته باشند. محمد برای تشخیص وضعیت این دو گروه شکل زیر را رسم کرد.



محمد از روی این شکل نتیجه گرفت، اطلاعات او برای یافتن تعداد اعضای گروه B کافی نیست و او باید تعداد اعضای مشترک بین این دو گروه را بداند.

محمد با شرکت مجدد در یکی از تمرین‌های گروه A فهمید ۶ نفر از آن‌ها عضو گروه B هم هستند. برای

حل این مسئله، محمد فکر کرد که می‌توانیم مسئله را به حالتی برگردانیم که دو گروه عضو مشترکی نداشته باشند و از راه حل قبلی استفاده کنیم. اعضای مشترک بین دو گروه را موقتاً از گروه B خارج می‌کنیم و گروه B_1 را می‌سازیم.



گروه B_1 و گروه A عضو مشترکی ندارند و اعضای گروه‌های B_1 و A روی هم، اعضای گروه A و B روی هم هستند. پس گروه B_1 به اندازه $21 - 6 = 15$ عضو دارد. بنابراین، گروه B به اندازه $11 + 6 = 17$ عضو دارد.

راه دیگری هم برای حل این مسئله به نظر محمد رسید. او تعداد اعضای گروه B را x نامید و گفت در شمارش تعداد اعضای دو گروه، اگر اعضای مشترک را یک بار به عنوان عضو A و یک بار به عنوان عضو B بشماریم، حاصل $21 + x$ است. اما، چون در این شمارش 6 نفر دوبار شمرده شده‌اند، تعداد واقعی $21 + x - 6$ است. ولی تعداد واقعی اعضای دو گروه روی هم برابر 32 بود، پس $21 + x - 6 = 32$. از این تساوی نتیجه می‌شود $x = 17$.



تمرین در کلاس

- احمد و اکبر دانش‌آموزان یک مدرسه‌اند و هرکدام دوستانی در مدرسه دارند.
- ۱- تعداد دانش‌آموزان مدرسه 142 نفر است که 94 نفر از آنان نه دوست احمد هستند و نه دوست اکبر. دوستان احمد و دوستان اکبر روی هم چند نفرند؟
 - ۲- اگر بدانید احمد 23 دوست دارد، آیا می‌توانید بگویید اکبر چند دوست دارد؟
 - ۳- اگر تعداد دوستان مشترک احمد و اکبر 4 نفر باشد، آیا می‌توانید بگویید اکبر چند دوست دارد؟

مجموعه‌ها

در حل مسئله گروه‌های دانش‌آموزی با دسته‌هایی از دانش‌آموزان روبه‌رو شدیم. در مسائل دیگر نیز دسته‌های دیگری از اشیا دیده می‌شوند. این دسته‌های مشخص شده از اشیا را مجموعه می‌نامند.

هر دسته مشخص شده از اشیا را یک مجموعه و آن اشیا را اعضای آن مجموعه می‌نامند.

مثال: در مسئله گروه‌های دانش‌آموزی، گروه‌های A و B هر کدام یک مجموعه بوده‌اند.

مثال: اعداد طبیعی یک رقمی یک مجموعه را تشکیل می‌دهند که آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

مثال: دوستان حمید با هم یک مجموعه را می‌سازند که به آن مجموعه دوستان حمید می‌گوییم.

در زیر نمونه‌های دیگری از مجموعه‌ها را می‌بینید.

{علی، رضا، احمد، جواد، کریم، اصغر} = تیم فوتبال مدرسه

{2, 4, 8, 6} = مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی زوج

{ا، ی، م، ک، گ، ل، س، ص، ع، ه، ح، ط، ر، د، و} = مجموعه حروف الفبای فارسی بی نقطه

{عطارد، زهره، زمین، مریخ، مشتری، زحل، اورانوس، نپتون} = مجموعه سیارات منظومه شمسی

لازم نیست که اعضای یک مجموعه ارتباط خاصی با هم داشته باشند. برای مثال به مجموعه زیر توجه کنید:

$$\{سعیدی، حافظ، 4، 2، 35، a، x، تهران\}$$

مثال: عبارت «انسان‌های قد بلند» مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند، زیرا چنین انسان‌هایی به طور دقیق مشخص

نشده‌اند و برای برخی انسان‌ها نمی‌توانیم بگوییم قد بلند هستند یا نه.

معمولاً، برای هر مجموعه‌ای نامی انتخاب می‌شود تا بهتر بتوان در مورد آن صحبت کرد.

مثال: در مسئله گروه‌های دانش‌آموزی نام‌های انتخاب شده برای دو گروه ورزشی، A و B بود.

مثال: اگر مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی را D بنامیم، می‌نویسیم: $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

برای برخی از مجموعه‌های اعداد نیز نام‌های خاصی انتخاب شده است. مثلاً مجموعه اعداد طبیعی را با \mathbb{N}

نشان می‌دهند؛ یعنی:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

توجه داشته باشید که در بالا منظور از «...» ادامه اعداد طبیعی هستند که انتها ندارند. برای مجموعه اعداد

صحیح نیز نام \mathbb{Z} انتخاب شده است؛ یعنی:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد گویا را با Q و مجموعه اعداد حقیقی را با \mathbb{R} نشان می دهند. عضویت یک شیء در یک مجموعه را با استفاده از نماد « \in » بیان می کنند. مثلاً برای بیان این که ۲ یکی از اعضای \mathbb{N} است می نویسیم: $2 \in \mathbb{N}$ و این جمله را به صورت «۲ عضو \mathbb{N} است» می خوانیم. مثلاً:

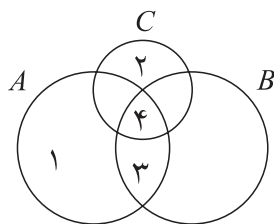
$$12 \in \mathbb{N}, -5 \in \mathbb{Z}, -\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}, \sqrt{11} \in \mathbb{R}$$

برای بیان این که شیئی عضو مجموعه ای نیست، از نماد « \notin » استفاده می شود. مثلاً، برای بیان این که «۳-» یک عدد طبیعی نیست، می نویسیم $3 \notin \mathbb{N}$ و آن را به صورت «۳- عضو \mathbb{N} نیست» می خوانیم. مثلاً:

$$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}, -8 \notin \mathbb{N}, \pi \notin \mathbb{Q}$$



تمرین در کلاس



در شکل روبه رو وضعیت عضو بودن یا نبودن عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را نسبت به مجموعه های A ، B و C مشخص کنید.

آیا مجموعه ای وجود دارد که هیچ عضوی نداشته باشد؟ بلی، ریاضیدانان وجود چنین مجموعه ای را پذیرفته اند و آن را مجموعه تهی نامیده اند و آن را با نماد \emptyset نشان می دهند. مثال: مجموعه اعداد طبیعی بین 3° و 4° که بر ۲۱ بخش پذیرند، مجموعه تهی است.

تساوی مجموعه ها

برای مشخص کردن مجموعه ها راه های مختلفی وجود دارد. ممکن است دو مجموعه با دو روش مختلف مشخص شده باشند ولی اعضای یکسانی داشته باشند، در این حالت گوئیم دو مجموعه مساوی اند. مثال: فرض کنید علی و حسن با یکدیگر دوست هستند. هر یک از آن ها تا امروز انواعی از غذاها را خورده اند. مجموعه غذاهایی را که علی خورده است A و مجموعه غذاهایی را که حسن خورده است B می نامیم. اگر بررسی کنیم و متوجه شویم که هر غذایی که علی خورده است، حسن هم خورده است و هر غذایی که حسن خورده است، علی هم خورده است، دو مجموعه A و B اعضای یکسانی خواهند داشت و این دو مجموعه مساوی اند و می نویسیم $A=B$.

در این مثال، اگر چه شیوه مشخص کردن اعضای دو مجموعه A و B با هم فرق داشت، ولی چون این دو مجموعه، اعضای یکسانی دارند با هم مساوی اند.

اگر هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B و هر عضو مجموعه B عضوی از مجموعه A باشد، این دو مجموعه را مساوی می‌نامیم و می‌نویسیم $A=B$.

مثال: دو مجموعه A و B را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\{1, 2, 6\} = \{1, 2, 6, 6, 6, 6\}$$

در مجموعه سمت راست بالا، برای مشخص کردن اعضای مجموعه، برخی اعضا چند بار نوشته شده‌اند. این عمل عضو جدیدی به مجموعه اضافه نمی‌کند و مجموعه سمت راست با مجموعه سمت چپ مساوی است.

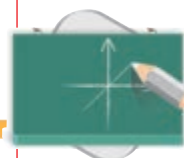
مثال:

$$A = \{1, 2, 6, 8, 12, 19\}$$

$$B = \{19, 6, 1, 2, 8, 12\}$$

اعضای مجموعه‌های بالا با ترتیب‌های مختلفی نوشته شده‌اند. با این حال چون این دو مجموعه، اعضای یکسانی دارند با یکدیگر مساوی‌اند؛ یعنی $A=B$.

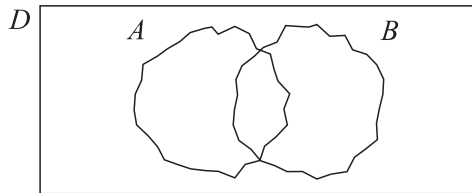
تمرین در کلاس



- ۱- جواد و حسین هر دو در یک مدرسه و در یک کلاس درس می‌خوانند، آیا مجموعه معلمین جواد با مجموعه معلمین حسین مساوی است؟
- ۲- آیا مجموعه اعداد اول یک رقمی با مجموعه اعداد فرد یک رقمی مساوی است؟
- ۳- مجموعه انسان‌هایی که در کره ماه زندگی می‌کنند، مساوی کدام مجموعه است؟

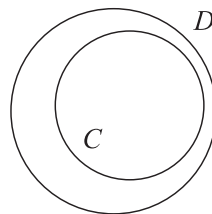
زیر مجموعه

در مسئله گروه‌های دانش‌آموزی، اگر مجموعه کلبه افراد کلاس را با D نشان دهیم، وضعیت گروه‌های A و B نسبت به D چگونه است؟



هر عضو گروه یا مجموعه A یک دانش‌آموز کلاس است، پس عضوی از D است. در چنین حالتی گوئیم A زیرمجموعه D است. به همین ترتیب هر عضو B نیز عضوی از D است، پس B نیز زیرمجموعه‌ای از D است.

اگر C و D دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو C ، عضو D نیز باشد، در این صورت گوئیم C یک زیرمجموعه D است.



برای بیان این که مجموعه C زیرمجموعه D است، می‌نویسیم « $C \subset D$ » و آن را چنین می‌خوانیم: « C زیرمجموعه D است».

مثال: مجموعه اعداد طبیعی فرد یک رقمی زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۱۰ است.

$$\{1, 3, 5, 7, 9\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

مثال: مجموعه دانش‌آموزان کلاس شما، زیرمجموعه‌ای از مجموعه دانش‌آموزان مدرسه شما است.

مثال: مجموعه افرادی که در روستاهای ایران زندگی می‌کنند، زیرمجموعه‌ای است از مجموعه همه افرادی که در ایران زندگی می‌کنند.



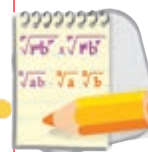
- ۱- یک مجموعه ۳ عضوی بسازید و آن را A بنامید.
- ۲- از A یک عضو را حذف کنید و مجموعه جدید را B بنامید. وضعیت A و B نسبت به هم چگونه است؟
- ۳- عضو دیگری را به B اضافه کنید و مجموعه به دست آمده را C بنامید. وضعیت B و C نسبت به هم چگونه است؟ وضعیت A و C نسبت به هم چگونه است؟
- ۴- آیا ممکن است دو مجموعه، هر کدام زیر مجموعه دیگری باشد؟ چه وقت این اتفاق می افتد؟
- ۵- آیا ممکن است از دو مجموعه، هیچ کدام زیر مجموعه دیگری نباشد؟ مثال بزنید.
- ۶- آیا هر عدد طبیعی یک عدد صحیح است؟ وضعیت \mathbb{N} و \mathbb{Z} نسبت به هم چگونه است؟
- ۷- آیا هر عدد صحیح یک عدد گویا است؟ وضعیت \mathbb{Z} و \mathbb{Q} نسبت به هم چگونه است؟
- ۸- آیا هر عدد گویا یک عدد حقیقی است؟ وضعیت \mathbb{Q} و \mathbb{R} نسبت به هم چگونه است؟

مثال: کلیه زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را تعیین کنید.

برای به دست آوردن زیرمجموعه‌های یک مجموعه، می‌توانیم با شروع از خود مجموعه و حذف یک یک اعضای آن، در کلیه حالاتی که امکان پذیر است، تمام زیرمجموعه‌های آن مجموعه را به دست آوریم. برای مثال، تمام زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ عبارت‌اند از:

$$\{a, b, c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset$$

مسائل



- ۱- در یک کلاس ۳۲ نفری، ۱۸ نفر در فوق برنامه‌های ورزشی و ۲۳ نفر در فوق برنامه‌های علمی شرکت کرده‌اند. اگر دو نفر در هیچ یک از دو فوق برنامه ورزشی و علمی شرکت نکنند، تعیین کنید چند نفر:
 - (الف) در هر دو برنامه شرکت می‌کنند.
 - (ب) فقط در یک فوق برنامه شرکت می‌کنند.
- ۲- با توجه به شکل زیر درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

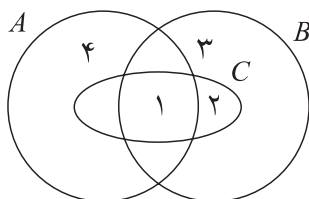
الف) $2 \in B$

ب) $4 \notin C$

ج) $\{3\} \subset B$

د) $\{3, 4\} \subset A$

ه) $C \subset B$



۳- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (\mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی، \mathbb{Q} مجموعه اعداد گویا، \mathbb{Z} مجموعه اعداد صحیح و \mathbb{N} مجموعه اعداد طبیعی)

$$-2 \in \mathbb{N}, \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}, 2 \in \mathbb{Z}, \sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

۴- دو مجموعه $A = \{7, x, -y\}$ و $B = \{7, -2, 5\}$ مساوی هستند. مقدار xy را به دست آورید.

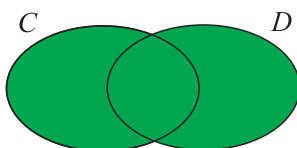
۵- معلم پرسید: «آیا عبارت «چهار عدد زوج متوالی» یک مجموعه را نشان می‌دهد؟ دانش‌آموزی گفت بله، مثلاً $\{2, 4, 6, 8\}$. به نظر شما آیا پاسخ او صحیح بوده است؟ در صورت اشتباه بودن، علت اشتباه را توضیح دهید.



اجتماع مجموعه ها

در مسئله گروه‌های دانش‌آموزی، اگر دو گروه A و B جلسه مشترکی تشکیل دهند، مجموعه‌ای از دانش‌آموزان تشکیل می‌شود که آن را اجتماع دو مجموعه A و B می‌نامند.

اگر C و D دو مجموعه باشند، مجموعه جدیدی را که اعضای آن متشکل از اعضای این دو مجموعه با هم است، اجتماع C و D می‌نامند و با $C \cup D$ نشان می‌دهند.



$C \cup D$ ، مجموعه‌اشیایی است که عضو C یا عضو D هستند.

مثال: معلم جغرافی از رضا و احمد خواست درباره شهرهایی که به آن سفر کرده‌اند گزارشی بنویسند. اگر رضا به شهرهای اصفهان، زنجان، اردبیل، اهواز و تهران سفر کرده باشد و احمد شهرهای اصفهان، خرم‌آباد، تبریز، سنندج و اهواز را دیده باشد، معلم جغرافی در مورد کدام شهرها از این دو نفر گزارش دریافت کرده است؟ جواب این سؤال، اجتماع مجموعه شهرهایی است که رضا و احمد به آن‌ها سفر کرده‌اند. اگر مجموعه شهرهایی که رضا دیده است را با A و مجموعه شهرهایی که احمد دیده است را با B نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$A \cup B = \{\text{اهواز, سنندج, تبریز, خرم‌آباد, اصفهان}\} \cup \{\text{تهران, اهواز, اردبیل, زنجان, اصفهان}\} \\ = \{\text{سنندج, تبریز, خرم‌آباد, تهران, اهواز, اردبیل, زنجان, اصفهان}\}$$

مثال: اجتماع مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی زوج و مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ را که بر ۳ بخش پذیرند به دست آورید.

$$\{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} = \{2, 4, 6, 8, 3, 9, 12, 15, 18\}$$

تمرین در کلاس

۱- اگر $A = \{1, 5, 9\}$ و $B = \{5, 7, 9\}$ ، درستی جملات زیر را نشان دهید.

الف) $A \cup A = A$

ب) $A \cup B = B \cup A$

ج) $B \subset (A \cup B)$ و $A \subset (A \cup B)$

۲- یک مجموعه C معرفی کنید به طوری که $A \subset C$ و $B \subset C$. نشان دهید $(A \cup B) \subset C$.

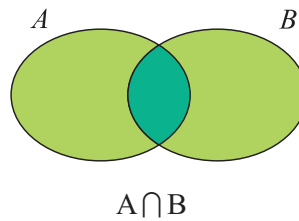
۳- اگر به جای مجموعه‌های بالا، مجموعه‌های دیگری قرار می‌دادیم، آیا باز هم روابط بالا درست بودند؟ درستی پاسخ خود را با رسم شکل نشان دهید.



اشتراک مجموعه‌ها

در مسئله گروه‌های دانش‌آموزی دیدیم که افراد مشترک بین دو گروه A و B نقش مهمی در حل مسئله داشتند. مجموعه این افراد مشترک را اشتراک آن دو مجموعه می‌نامند.

برای دو مجموعه A و B، مجموعه‌اشیایی را که هم عضو A و هم عضو B هستند، اشتراک A و B می‌نامند و با $A \cap B$ نشان می‌دهند.



مثال: اشتراک مجموعه اعداد اول یک رقمی و اعداد طبیعی زوج یک رقمی، $\{2\}$ است.

$$\{2, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{2\}$$

مثال: اگر A مجموعه همه ایرانی‌ها و B مجموعه همه ریاضی‌دانان جهان باشد، $A \cap B$ مجموعه همه ایرانی‌های ریاضی‌دان است.

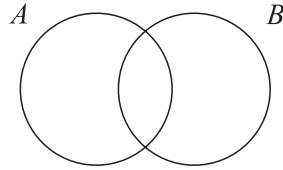
مثال: اگر A مجموعه همه انسان‌ها و B مجموعه همه موجودات آبی باشد، $A \cap B$ هیچ عضوی ندارد و برابر مجموعه تهی است، یعنی $A \cap B = \emptyset$.

دو مجموعه ناتهی را که اشتراک آن‌ها مجموعه تهی است، دو مجموعه مجزا یا جدا از هم می‌نامند.

مثال: مجموعه دانش‌آموزان کلاس اول ابتدایی و مجموعه دانش‌آموزان دبیرستانی، دو مجموعه مجزا هستند.



۱- با توجه به شکل زیر، درستی یا نادرستی هر یک از جملات ریاضی زیر را تعیین کنید.



- $(A \cap B) \subset A$ $(A \cap B) = (B \cap A)$ $A \subset (A \cap B)$
 $A \subset (A \cup B)$ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ $(A \cap B) = A$

۲- برای هر یک از جملات ریاضی زیر یک شکل رسم کنید.

الف) $A \cap B = \emptyset$

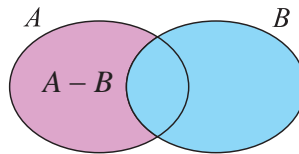
ب) $A \subset B \subset C$

ج) $A \cap C = \emptyset, A \cap B \neq \emptyset, B \cap C \neq \emptyset$

تفاضل مجموعه‌ها

مجموعه دانش‌آموزان سال اول یک دبیرستان را با A و مجموعه دانش‌آموزان آن دبیرستان که قد آن‌ها بلندتر از ۱۷۰ سانتی‌متر است، را با B نشان داده‌اند. یک روز برای انتخاب اعضای تیم بسکتبال، مربی ورزش همه دانش‌آموزان با قد بیش از ۱۷۰ سانتی‌متر را در حیاط نگه داشت. بنابراین، دانش‌آموزانی که آن روز در کلاس اول دبیرستان حاضر بودند، آن‌هایی بودند که عضو مجموعه A بودند ولی عضو مجموعه B نبودند. مجموعه‌ای را که به این شکل ساخته می‌شود تفاضل B از A می‌نامند.

برای دو مجموعه A و B ، مجموعه‌اشیایی را که در A هستند، ولی در B نیستند، تفاضل B از A می‌نامند و با $A-B$ نشان می‌دهند.



مثال: به یاد دارید که در مسئله گروه‌های دانش‌آموزی، برای محاسبه تعداد اعضای گروه B ، آن دسته از اعضای A را که در B بودند، از گروه B حذف کردیم و گروه B_1 را ساختیم. این عمل همان تفاضل مجموعه A از مجموعه B بود و $B_1 = B - A$.

مثال:

$$\{a,b\} - \{b\} = \{a\} \quad , \quad \{x,y,z\} - \{a,b\} = \{x,y,z\} \quad , \quad \{b\} - \{b\} = \emptyset$$

مثال: سه مجموعه A ، B و C را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \{a,c,d,f,q\} \quad , \quad B = \{a,f,t,w,z\} \quad , \quad C = \{۱,۴,۷\}$$

چند نمونه از تفاضل این مجموعه‌ها به شکل زیر است:

$$A - B = \{c,d,q\}$$

$$B - A = \{t,w,z\}$$

$$A - C = \{a,c,d,f,q\} = A$$

مثال: اگر A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ باشد که بر ۲ بخش پذیرند و B مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ باشد که بر ۴ بخش پذیرند، آن‌گاه $A - B$ مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ است که زوج هستند ولی بر ۴ بخش پذیر نیستند.

$$A - B = \{۲,۶,۱۰,۱۴,۱۸\}$$

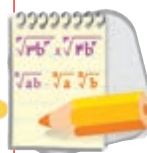
مثال: اگر A مجموعه دانش آموزان دبیرستان شما و B مجموعه دانش آموزان دبیرستانی در ایران باشد، $A-B$ مجموعه تهی است و $B-A$ مجموعه همه دانش آموزان دبیرستانی خارج از مدرسه شما است.

مثال: اگر A مجموعه ایرانی هایی باشد که تحصیلات آن ها بالای دیپلم است و B مجموعه کارگران ایرانی باشد، $A-B$ مجموعه ایرانی های با تحصیلات بالای دیپلم است که کارگر نیستند و $B-A$ مجموعه کارگران ایرانی با تحصیلات دیپلم یا زیر دیپلم است.

مثال: $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گنگ است. $\mathbb{R}-\{0\}$ مجموعه اعداد حقیقی مخالف صفر است.

توجه کنید $\mathbb{R}-\{0\}$ را به صورت $\mathbb{R}-0$ ننویسید.

مسائل



۱- مجموعه های زیر را در نظر بگیرید.

$X = \{\text{ایلام، پاره، اردبیل، سنندج، کرمانشاه، آبادان، زابل، زاهدان، تبریز، ارومیه، بوشهر، بندرعباس}\}$

$B =$ مجموعه شهرهای جنوب شرقی ایران

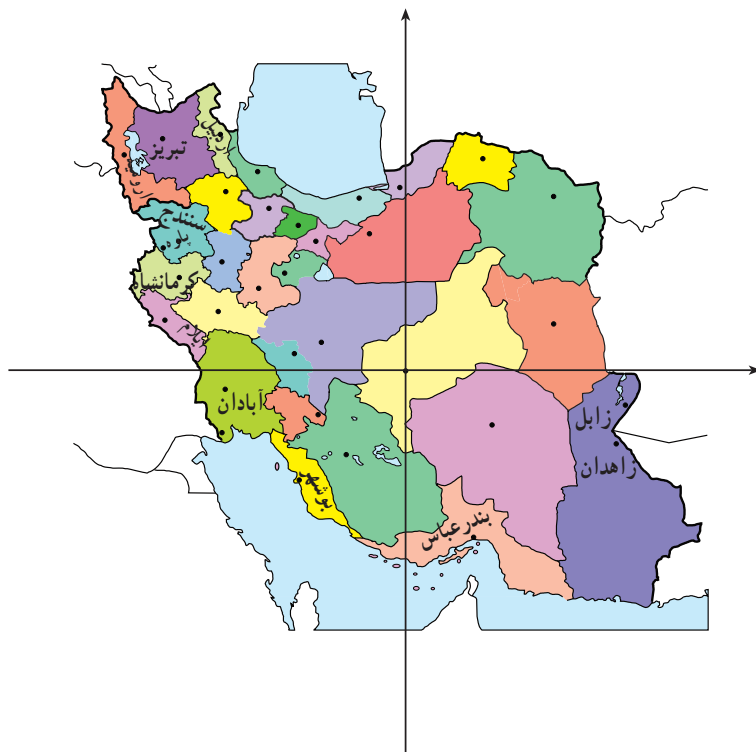
$A =$ مجموعه شهرهای شمال غربی ایران

$D =$ مجموعه شهرهای غربی ایران

$C =$ مجموعه شهرهای جنوب غربی ایران

$E =$ مجموعه شهرهای جنوبی ایران

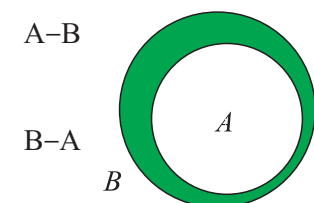
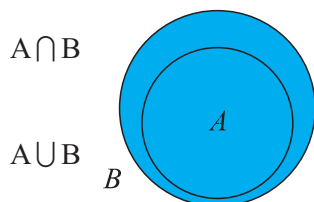
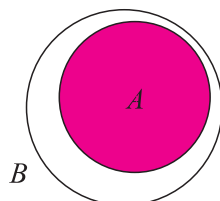
مجموعه های $A \cap X$ ، $B \cap X$ ، $C \cap X$ ، $D \cap X$ و $E \cap X$ را با اعضای آن ها مشخص کنید.



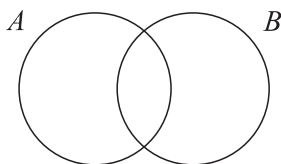
۲- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6\}$ حاصل هریک از عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $A \cup B$ ب) $A \cap B$ ج) $A - B$ د) $B - A$
 هـ) $(A \cup B) - (A \cap B)$ و) $[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B)$

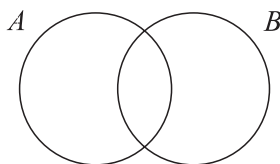
۳- هریک از مجموعه‌های داده شده در سمت چپ را در صورت وجود نمودار نظیر برای آن، به نمودار نظیرش وصل کنید.



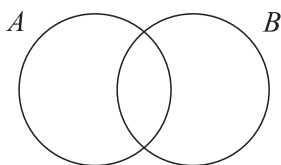
۴- مجموعه‌های داده شده را با هاشور زدن مشخص کنید.



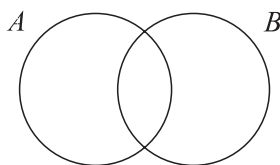
$(A - B) \cup (B - A)$



$A - B$



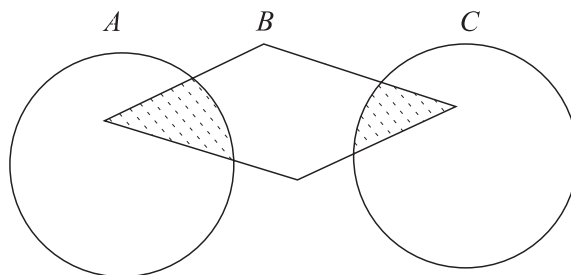
$A - (A \cap B)$



$(A \cup B) - A$

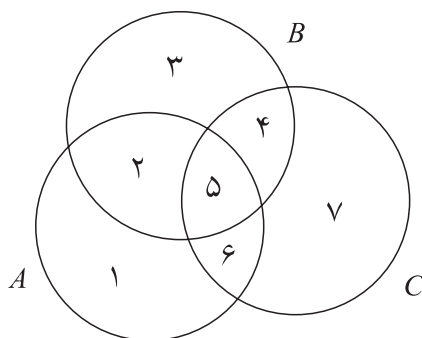
۵- کدام یک از مجموعه‌های زیر، قسمت‌های هاشور خورده شکل را نشان می‌دهد؟

- $A \cap B \cap C$
- $(A-B) \cup (C-B)$
- $(A \cup C) - B$
- $B \cap (A \cup C)$



۶- با توجه به شکل بگویید کدام یک از مجموعه‌های زیر نشان‌دهنده $(A-B) \cup (B \cap C)$ است.

- $\{1, 6\}$
- $\{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $\{1, 6, 5, 4\}$



۷- اگر داشته باشیم $A = \{2, 7, 11, 13, 17\}$ و $B = \{3, 6, 11, 13, 17\}$ ، مجموعه $A - B$ را بنویسید. دانش‌آموزی این مسئله را چنین حل کرده است:

$$A - B = \{2, 7, \cancel{11}, \cancel{13}, \cancel{17}\} - \{3, 6, \cancel{11}, \cancel{13}, \cancel{17}\} = \{2, 3, 6, 7\}$$

در حل این مسئله چه اشتباهی رخ داده است؟ پاسخ درست چیست؟

مجموعه های متناهی و نامتناهی

{a} یک عضو و {۱,۵} دو عضو دارد. مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی ۹ عضو دارد. مجموعه حروف الفبای فارسی ۳۲ عضو دارد. اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود باشد و عمل شمارش آن‌ها سرانجام به انتها برسد، گوئیم آن مجموعه متناهی است؛ در غیر این صورت گوئیم آن مجموعه نامتناهی است.

مثال: مجموعه سیارات منظومه شمسی متناهی است و تعداد اعضای آن ۸ است.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی زوج کمتر از ۹ متناهی است و تعداد اعضای آن ۴ است.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی زوج متناهی نیست.

مجموعه تهی نیز متناهی محسوب می‌شود و تعداد اعضای آن صفر است. برخی مجموعه‌ها، اگرچه متناهی هستند، ولی تعداد اعضای آن‌ها را نمی‌دانیم. به عنوان مثال، مجموعه مورچگان کره زمین، یا مجموعه اتم‌های موجود در جو متناهی هستند، اما مجموعه‌های بزرگی هستند و تعداد اعضای آن‌ها را نمی‌دانیم.

توجه داشته باشید که ملاک متناهی بودن یک مجموعه توانایی عملی ما برای شمارش تعداد اعضای آن‌ها نیست. برای تشخیص متناهی بودن یک مجموعه کافی است بدانیم که اگر امکان شمارش اعضای آن مجموعه را داشته باشیم و به اندازه کافی وقت صرف کنیم، می‌توانیم کل اعضای آن مجموعه را شمارش کنیم. مثلاً اگر امکان شمارش مورچه‌های کره زمین را داشته باشیم، پس از صرف قرن‌ها، حتماً تمام مورچه‌ها را می‌توانیم بشماریم. مجموعه‌های نامتناهی مجموعه‌هایی هستند که اگر یکی یکی اعضای آن‌ها را از مجموعه خارج کنیم، این عمل هیچ‌گاه به آخر نمی‌رسد. به عنوان مثال، \mathbb{N} ، \mathbb{Z} ، \mathbb{Q} و \mathbb{R} نامتناهی هستند. مثلاً، اگر از مجموعه \mathbb{N} یکی یکی اعضای آن را خارج کنیم، هر چه قدر هم که وقت صرف کنیم، نهایتاً تعداد محدودی از اعضای \mathbb{N} را خارج کرده‌ایم و هنوز تعداد بسیار دیگری از اعضای \mathbb{N} باقی می‌مانند.



تمرین در کلاس

۱- اگر n یک عدد طبیعی و A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از n باشد، A متناهی است یا نامتناهی؟ دلیل خود را بیان کنید.

۲- اگر A مجموعه‌ای متناهی و $B \subset A$ ، آیا B متناهی است یا نامتناهی؟ دلیل خود را بیان کنید.

۳- مجموعه اعداد گویای بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ متناهی است یا نامتناهی؟ دلیل خود را بیان کنید.

مشخص کردن مجموعه‌ها

برای مشخص کردن یک مجموعه باید عضوهای آن مجموعه را معرفی کنیم. در صورتی که تعداد عضوهای یک مجموعه کم باشد، می‌توان اعضای آن مجموعه را یکی یکی معرفی کرد. این عمل با نوشتن اعضای آن مجموعه بین $\{\}$ انجام می‌شود. مثلاً، مجموعه‌های زیر با همین روش معرفی شده‌اند:

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{و} \quad B = \{\text{فردوسی، مولوی، سعدی، رودکی}\} \quad \text{و} \quad C = \{0, -4, 8, \sqrt{23}\}$$

اما اگر یک مجموعه نامتناهی باشد، با تعداد اعضای مجموعه‌ای بسیار زیاد باشد، نمی‌توان از روش بالا استفاده کرد. در این صورت یک روش دیگر برای مشخص کردن اعضای یک مجموعه، پیدا کردن یک ویژگی مشترک بین اعضای آن مجموعه است تا از طریق آن، اعضای آن مجموعه مشخص شوند.

برای مثال، برای مشخص کردن مجموعه اعداد طبیعی دو رقمی، می‌توانیم آن‌ها را مجموعه‌ای از اعداد طبیعی در نظر بگیریم که از ۱۰۰ کوچک‌تر و از ۹ بزرگ‌ترند. اگر این مجموعه را E بنامیم این مطلب را به دو صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 9 \text{ و } x < 100\} = \{x \mid 9 < x < 100 \text{ و } x \in \mathbb{N}\}$$

جمله بالا به این صورت خوانده می‌شود: « E مجموعه‌ای از اعداد طبیعی است که از ۹ بزرگ‌تر و از ۱۰۰ کوچک‌ترند.»

مثال: مجموعه اعداد حقیقی مثبت را می‌توانیم به صورت $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$ بنویسیم.

مثال: اگر مجموعه اعداد گویایی را که قدر مطلق آن‌ها از ۵ کم‌تر است با D نشان دهیم، داریم:

$$D = \{r \in \mathbb{Q} \mid |r| < 5\}$$

یک روش دیگر برای مشخص کردن مجموعه‌ها، معرفی شکل کلی عضوهای آن مجموعه است. برای مثال، هر عدد طبیعی زوج به شکل $2k$ است، که k یک عدد طبیعی است. با این روش مجموعه اعداد طبیعی زوج را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

عبارت بالا به صورت «مجموعه اعداد به شکل $2k$ که k در \mathbb{N} قرار دارد» خوانده می‌شود.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی فرد عبارت است از $\{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x = 2k-1, k \in \mathbb{N}\}$.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی مجذور کامل عبارت است از $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.



۱- متناهی بودن یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A = \{4n | n \in \mathbb{N}\}$

ب) مجموعه اعداد طبیعی 100 رقمی.

ج) مجموعه اعداد اول.

د) مجموعه اعداد اعشاری بین $0/1$ و $0/3$.

ه) مجموعه اعداد صحیح بین 1000 و -1000 .

۲- هریک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

الف) $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N}, x < 5 \right\}$

ب) $B = \{4x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 2\}$

ج) $C = \left\{ \frac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x < 3 \right\}$

۳- هریک از مجموعه‌های زیر را با نماد (علائم) ریاضی بنویسید.

الف) $A = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$

ب) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

۴- هریک از مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید و با نوشتن اعضای آن، آن‌ها را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد صحیحی که دو برابر آن‌ها بزرگتر از -4 و کوچک‌تر از 5 است.

ب) مجموعه اعداد صحیحی که قدر مطلق آن‌ها برابر 2 است.

