

### ماتریس و دترمینان

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود:

- ۱- ماتریس، انواع و کاربردهای آن را بیان کند و جبر ماتریس‌ها را نشان دهد.
- ۲- جمع ماتریس‌ها، خصوصیات آن‌ها، ضرب ماتریس در عدد و کاربرد آن را توضیح دهد.
- ۳- ضرب ماتریس‌ها و کاربرد آن‌را انجام دهد.
- ۴- دترمینان را تعریف و مقدار آن‌را محاسبه کند و خواص آن‌را توضیح دهد.
- ۵- معکوس ماتریس دو در دو و سه در سه و کاربرد آن‌را در مسائل انجام دهد.

### ۷- ماتریس و دترمینان

#### مقدمه

برای فهم ساده‌تر ریاضیات، گاهی از نمادها و قراردادهایی استفاده می‌شود. از آن جمله ماتریس است که به ما در حل بسیاری از مشکلات کمک کند. مثلاً برای به حداکثر رساندن سود یک شرکت، با توجه به محدودیت‌هایی، مثل نیروی انسانی، ساعت کار، اعتبارات بانکی، مواد اولیه، عرضه و تقاضا، می‌توان از ماتریس استفاده کرد یا برای به حداقل رساندن هزینه‌ی یک بیمارستان یا یک مؤسسه دولتی ماتریس و معکوس ماتریس به کار می‌رود. امروزه در اکثر بنگاه‌های خصوصی و دولتی از برنامه‌ریزی خطی، سیمپلکس، ماتریس تصمیم‌گیری و مدل شبکه، مدل تخصیصی کار و حمل و نقل، که الفبای همه‌ی آن‌ها ماتریس است، استفاده فراوان می‌گردد.

برای مثال، فرض کنید شرکت نفت ایران سه انبار در محل های A، B و C دارد و سه پمپ بنزین باید از طریق این انبارها تغذیه شوند. اگر  $P_1$ ،  $P_2$  و  $P_3$  پمپ های بنزین باشند و فاصله ی آن ها تا انبارهای مزبور به شرح زیر باشد:

فاصله ی	A	تا	$P_1$	۴۰	کیلومتر است
فاصله ی	A	تا	$P_2$	۲۵	کیلومتر است
فاصله ی	A	تا	$P_3$	۲۰	کیلومتر است
فاصله ی	B	تا	$P_1$	۳۰	کیلومتر است
فاصله ی	B	تا	$P_2$	۱۵	کیلومتر است
فاصله ی	B	تا	$P_3$	۳۵	کیلومتر است
فاصله ی	C	تا	$P_1$	۱۵	کیلومتر است
فاصله ی	C	تا	$P_2$	۳۰	کیلومتر است
فاصله ی	C	تا	$P_3$	۴۵	کیلومتر است

این اطلاعات را می توانیم در گروه ای به این شکل نشان دهیم. در بعضی از کتاب ها به جای گروه از براتر هم استفاده می گردد.

	$P_1$	$P_2$	$P_3$
A	۴۰	۲۵	۲۰#
B	۳۰	۱۵	۳۵%
C	۱۵	۳۰	۴۵%

محل تلاقی خطوط افقی و قائم، فاصله ی انبار تا پمپ بنزین را نشان می دهد. این آرایه ی اعداد مثالی از یک ماتریس است. به آرایه ای از اعداد در شکل زیر دقت کنید. هر کدام از این آرایه ها را یک ماتریس می نامند.

$$A = \begin{matrix} ۵ & ۱\# \\ \cdot & \% \\ !۰ & ۲\% \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} ۲\# \\ \cdot & \% \\ !۳\% \end{matrix}$$

$$C = \& \quad ۳ \quad ۵ \quad ۷ \quad ۹ \quad .$$

$$D = \begin{matrix} \circ & ۱ & ۲\# \\ \cdot & & \% \\ \cdot & ۱ & ۴\% \\ \cdot & & \% \\ \cdot & ۲ & ۲ & ۵\% \end{matrix}$$

$$E = \begin{matrix} ۱ & ۳ & ۲ & ۴\# \\ ۱\cdot & ۳ & ۵ & ۱ & ۲\% \end{matrix}$$

نام هر ماتریس را با حروف بزرگ الفبای لاتین نشان می‌دهند مانند ماتریس A, B, C, D, E

و . . . .

### ۷-۱ سطر یک ماتریس

هریک از اعداد داخل گروه را یک درایه‌ی یا یک عضو ماتریس می‌نامند. درایه‌هایی را که در امتداد یک خط افقی قرار گیرند، یک سطر ماتریس می‌نامند. مانند ۵، ۶، ۲، ۱، ۲، ۰، ۳، ۰، ۱ در ماتریس A.

$$A = \begin{matrix} ۲ & ۵ & ۶\# \\ \circ & ۲ & ۱\% \\ \cdot & & \% \\ \cdot & ۱ & ۳\% \end{matrix}$$

### ۷-۲ ستون یک ماتریس

درایه‌هایی را، که در امتداد یک خط قائم قرار گیرند، یک ستون ماتریس می‌نامند، مانند ۵ یا ۲ یا ۱ در همان ماتریس A.

بنابراین، این ماتریس دارای ۳ سطر و ۳ ستون است.

بدیهی است ۵، ۶، ۲ را سطر اول، ۱، ۲، ۰ را سطر دوم و ۳، ۰، ۱ را سطر سوم ماتریس

می‌نامند.

هم‌چنین ۱ را ستون اول، ۲ را ستون دوم و ۳ را ستون سوم می‌نامند.

به ماتریسی مانند A، که m سطر و n ستون داشته باشد، یک ماتریس m در n گفته می‌شود و

آن را به صورت  $A_{m \times n}$  نشان می‌دهند.

ستون سوم    ستون دوم    ستون اول

$$A = \begin{matrix} \text{سطر اول} & ۲ & ۷ & ۱\# \\ & ۴\% & ۰ & ۳\% \end{matrix}$$

مثال ۱- ماتریس

را یک ماتریس ۲ در ۳ می‌نامند.  
 $A_{2 \times 3}$

$$B = \begin{matrix} & ۲ & ۳ & ۴ \end{matrix}$$

مثال ۲- ماتریس

یک ماتریس یک در چهار است.  
 $B_{1 \times 4}$

### ۷-۳ آدرس درایه

هر درایه معمولاً با حرف کوچک الفبای لاتین نشان داده می‌شود.  
 به علاوه آدرس هر درایه را به صورت اندیس در کنار آن می‌نویسیم.  
 رقم سمت چپ نشان‌دهنده‌ی سطر درایه و رقم سمت راست آن نشان‌دهنده‌ی ستون درایه است. به عبارت دیگر آدرس هر درایه عبارت است از سطر و ستونی که آن درایه در ماتریس دارد.  
 مثال ۳- در ماتریس A، که یک ماتریس  $2 \times 3$  است، آدرس درایه‌ی ۳ را مشخص کنید.

$$A = \begin{matrix} ۱ & ۳ & ۴\# \\ ۲ & ۱ & ۵\% \end{matrix} \quad a_{۱۲} = ۳$$

به طور کلی، هر درایه به صورت  $a_{ij}$  نشان داده می‌شود که نشان‌دهنده‌ی درایه‌ی سطر i ام و ستون j ام ماتریس است.  
 i و j از اعداد طبیعی هستند.

### ۷-۴ قطر اصلی ماتریس مربع

اگر در یک ماتریس، در درایه‌هایی که در آن  $i=j$  باشد دقت کنیم، مشخص می‌شود که همگی این درایه‌ها روی یک خط راست قرار گرفته‌اند و آن را قطر اصلی ماتریس مربع می‌نامند.

$$A = \begin{matrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱\# \\ ۰.۴ & ۲ & ۵ & ۱\% \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳\% \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۳\% \end{matrix}$$

مثال ۴- در ماتریس مربع  $4 \times 4$

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$  قطر اصلی را تشکیل می‌دهند که به ترتیب عبارت‌اند از: ۱، ۲، ۲ و ۳. توضیح: دو درایه از دو ماتریس را زمانی متناظر گویند که آدرس آن‌ها (محل سطر و ستون) یکی باشد.

## ۷-۵ انواع ماتریس‌ها

۷-۵-۱ ماتریس صفر: به ماتریسی که کلیه درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس صفر گویند. مثال ۵- ماتریس A و B و C نمونه‌ای از ماتریس صفر هستند.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۷-۵-۲ ماتریس مربع: اگر در یک ماتریس  $m \times n$  داشته باشیم  $m = n$ ، این ماتریس را ماتریس مربع مرتبه n یا m گویند. به عبارت دیگر، ماتریس مربع ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابر باشند.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{مثال ۶- ماتریس } C_{2 \times 2} \text{ یک ماتریس مربع است.}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{مثال ۷- ماتریس } D_{3 \times 3} \text{ یک ماتریس مربع است.}$$

۷-۵-۳ ماتریس سطری: اگر در یک ماتریس  $m \times n$  داشته باشیم  $m = 1$ ، این ماتریس را ماتریس سطری می‌نامند.

مثال ۸- ماتریس E را یک ماتریس سطری گویند.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}$$

۷-۵-۴ ماتریس ستونی: اگر در یک ماتریس  $m \times n$  داشته باشیم  $n = 1$ ، این ماتریس را

ماتریس ستونی می‌نامند.

مثال ۹- ماتریس F را یک ماتریس ستونی می‌نامند.

$$F = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

۷-۵-۵ ماتریس بالا مثلثی: به ماتریس مربعی که در آن کلیه ی درایه های زیر قطر اصلی صفر باشند ماتریس بالا مثلثی می گویند.

مثال ۱۰ - ماتریس M را یک ماتریس بالا مثلثی گویند.

$$M = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۶ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

۷-۵-۶ ماتریس پایین مثلثی: به ماتریس مربعی که در آن کلیه ی درایه های بالای قطر اصلی صفر باشند ماتریس پایین مثلثی گویند.

مثال ۱۱ - ماتریس N را یک ماتریس پایین مثلثی گویند.

$$N = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

۷-۵-۷ ماتریس قطری: به ماتریس مربعی که درایه های آن به جز درایه های روی قطر اصلی صفر باشند، ماتریس قطری گویند، مانند ماتریس B.

$$B = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

۷-۵-۸ ماتریس واحد: یک ماتریس قطری است که کلیه درایه های روی قطر اصلی آن یک باشد. به ماتریس واحد، ماتریس یکانی نیز گفته می شود. معمولاً ماتریس واحد (یکانی) را با  $I_n$  نشان می دهند که در آن n تعداد سطرها یا ستون های ماتریس است، مانند ماتریس  $I_۳$ .

$$I_۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

## ۷-۶ ماتریس ترانهاده یا برگردان

هرگاه جای تمام سطرها و ستون های یک ماتریس مانند A را با هم عوض کنیم ماتریس جدیدی به دست می آید که آن را ماتریس ترانهاده ی ماتریس A می نامند و به صورت  $(A^t)$  نمایش داده می شود.

مثال ۱۲ - ترانهاده یا برگردان ماتریس  $A = \begin{matrix} ۲ & ۳ & ۱ & ۴\# \\ ۱۵ & ۸ & ۷ & ۶\% \end{matrix}$  را به دست آورید.

$$A^t \text{ (یا } A^t) = \begin{matrix} ۲ & ۵\# \\ ۱۵ & ۸\% \\ ۳ & ۷\% \\ ۱ & ۶\% \\ ۴ & ۶\% \end{matrix}$$

### ۷-۲ دو ماتریس مساوی

دو ماتریس را زمانی مساوی یکدیگر گویند که اولاً تعداد سطرها، ثانیاً تعداد ستونها، ثالثاً درایه‌های متناظر هر دو ماتریس مساوی باشند، یعنی  $a_{۱۱} = b_{۱۱}$  و  $a_{۱۲} = b_{۱۲}$  و  $a_{۲۲} = b_{۲۲}$  و  $a_{۲۱} = b_{۲۱}$  و ...

مثال ۱۳ - دو ماتریس A و B با هم مساوی هستند؛ زیرا

$$A = \begin{matrix} ۱ & ۲\# \\ ۱۳ & ۴\% \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} ۳ & ۶\# \\ ۳ & ۳\% \\ ۹ & ۲ \times ۲\% \\ ۳ & ۳\% \end{matrix}$$

هر دو ماتریس  $۲ \times ۲$  می‌باشند و درایه‌های متناظر با هم مساوی هستند.

$$\begin{matrix} ۱ = \frac{۳}{۳} & ۲ = \frac{۶}{۳} \\ ۳ = \frac{۹}{۳} & ۴ = \frac{۲ \times ۲}{۳} \end{matrix}$$

### ۷-۸ جمع ماتریس‌ها

باید توجه داشت دو ماتریس در صورتی می‌توانند با هم جمع شوند که تعداد سطرها و ستون‌های هر دو با هم مساوی باشند. در غیر این صورت، نمی‌توان آن‌ها را با هم جمع نمود.

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n}$$

حاصل مجموع دو ماتریس، خود یک ماتریس است.

مثال ۱۴ - ماتریس A، که دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، با ماتریس B که آن نیز دارای

۲ سطر و ۳ ستون است، قابل جمع کردن هستند، ولی ماتریس A با C را نمی توان جمع نمود، زیرا ماتریس C، دارای ۳ سطر و ۳ ستون است.

$$A = \begin{matrix} & ۲ & ۱ & ۰\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۱ & ۲ & ۳\% \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & ۱ & ۲ & ۱\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۴ & ۰ & ۱\% \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & ۱ & ۳ & ۲\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۱ & ۴ & ۲\% \end{matrix}$$

اگر دو ماتریس A و B،  $m \times n$  باشند، مجموع آن ها نیز یک ماتریس  $m \times n$  مانند C است، به طوری که هر درایه ی آن مساوی مجموع درایه های متناظرش در A و B است. مثال ۱۵ – مجموع دو ماتریس A و B را به دست آورید.

$$A = \begin{matrix} & ۱ & ۲ & ۳\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۲ & ۰ & ۱\% \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & ۳ & ۱ & ۲\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۱ & ۰ & ۲\% \end{matrix} \quad A+B = \begin{matrix} & ۱+۳ & ۲+۱ & ۳+۲\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۲+۱ & ۰+۰ & ۱+۲\% \end{matrix}$$

چون هر دو ماتریس  $۲ \times ۳$  می باشند، پس جمع آن ها شدنی است و نتیجه، ماتریس C می شود که یک ماتریس  $۲ \times ۳$  است.

$$C = \begin{matrix} & ۴ & ۳ & ۵\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۳ & ۰ & ۳\% \end{matrix}$$

مثال ۱۶ – شرکتی انواع کولر را با حجم های کوچک، متوسط و بزرگ در مدل های عادی و لوکس تولید می نماید. اگر تولید آن در شش ماهه ی اول و دوم سال به ترتیب جدول زیر باشد، تعیین کنید شرکت در یک سال چند کولر با حجم ها و انواع مختلف تولید می کند.

شش ماهه ی دوم		شش ماهه ی اول		حجم کولر	A + B = C
نوع لوکس	نوع عادی	نوع لوکس	نوع عادی		
۱۶۰۰	۱۴۰۰	۲۰۰۰	۲۷۰۰	کوچک	
۲۰۰۰	۲۱۰۰	۴۱۰۰	۴۳۰۰	متوسط	
۱۱۰۰۰	۴۰۰۰	۱۵۰۰	۵۲۰۰	بزرگ	

ماتریس A را تولید در شش ماهه ی اول و ماتریس B را تولید در شش ماهه ی دوم سال فرض می کنیم.



$$A = \begin{matrix} 2000 & 2700\# & 1600 & 1400\# & 3600 & 4100\# \\ & \% & & \% & & \% \\ \cdot 4100 & 4300\% & \cdot 2000 & 2100\% & \cdot 6100 & 6400\% \\ & \% & & \% & & \% \\ \cdot 1500 & 5200\% & \cdot 1100 & 4000\% & \cdot 2600 & 9200\% \end{matrix}$$

در نتیجه ماتریس C، که مجموع A و B است، تولید کولر در یک سال را مشخص می‌نماید.  
مثال ۱۷ – ماتریس A و B را با هم جمع کنید.

$$A = \begin{matrix} 1 & 2\# \\ \cdot 13 & 1\% \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} 1 & 0 & 2\# \\ \cdot 12 & 1 & 3\% \end{matrix}$$

به دلیل این که تعداد سطر و ستون دو ماتریس با هم یکی نیست، پس جمع آن‌ها امکان‌پذیر نیست.

## ۹- ضرب عدد حقیقی در ماتریس

اگر k عددی حقیقی و A ماتریس  $m \times n$  باشد، حاصل ضرب k در A ماتریسی خواهد بود  $m \times n$ ، که کلیه‌ی درایه‌های آن برابر با درایه‌های ماتریس A ضربدر k است.

$$k \times A = k \times \begin{matrix} a & b\# & ka & kb\# \\ \cdot c & d\% & \cdot kc & kd\% \end{matrix}$$

مثال ۱۸ – اگر  $A = \begin{matrix} 1 & 2\# \\ \cdot 10 & 3\% \end{matrix}$  باشد، حاصل ضرب عدد ۵ را در A بیابید.

$$5 \times A = 5 \times \begin{matrix} 1 & 2\# & 5 & 10\# \\ \cdot 10 & 3\% & \cdot 50 & 15\% \end{matrix}$$

مثال ۱۹ – فرض کنید فروش فروردین ماه ۳ نوع محصول شرکت ایران خودرو (سمند، پژو ۲۰۶ و پارس) در شهر تهران و اصفهان به صورت زیر است:

$$F = \begin{matrix} & \text{پارس} & \text{پژو ۲۰۶} & \text{سمند} \\ \text{تهران} & 90\# & 70 & 110 \\ \text{اصفهان} & 140\% & 100 & 160 \end{matrix}$$

اگر پیش‌بینی شود، فروش این شرکت در اردیبهشت ماه ۱۰٪ افزایش یابد، ارقام مربوط به

میزان فروش ماه اردیبهشت این شرکت در ۲ شهر تهران و اصفهان را به صورت ماتریس بنویسید.

۱۰٪ افزایش فروش فروش فروردین فروش اردیبهشت

$$F_2 = F_1 + 0.1F_1 = 1.1F_1 = 1.1 \begin{matrix} 110 & 70 & 90 \\ 60 & 100 & 140 \end{matrix} \%$$

پارس پژو ۲۰۶ سمند

$$F_2 = \begin{matrix} 121 & 77 & 99 \\ 66 & 110 & 154 \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ \# \\ \% \end{matrix} \begin{matrix} تهران \\ اصفهان \end{matrix}$$

### ۱۰-۷ ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی

برای درک بهتر موضوع به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲۰- در سال گذشته، شرکتی سه نوع کولر رومیزی، آبی و گازی را به تعداد ۵۰,۰۰۰، ۴۰,۰۰۰ و ۳۰,۰۰۰ به فروش رسانده است. اگر قیمت هر دستگاه کولر به ترتیب برابر با ۱۴۰,۰۰۰، ۲۵۰,۰۰۰ و ۳۰۰,۰۰۰ ریال باشد، فروش شرکت را در سال قبل تعیین کنید.

تعداد کولرها را می توان با یک ماتریس سطری A نمایش داد.

$$A_{1 \times 3} = \begin{matrix} & \text{گازی} & \text{آبی} & \text{رومیزی} \\ 50,000 & 4,000 & 3,000 & . \end{matrix}$$

هم چنین، بهای فروش هر دستگاه را می توان با یک ماتریس ستونی نشان داد.

$$B_{3 \times 1} = \begin{matrix} 140,000 \\ 250,000 \\ 300,000 \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ \% \\ \% \\ \% \end{matrix} \begin{matrix} \text{بهای کولر رومیزی} \\ \text{بهای کولر آبی} \\ \text{بهای کولر گازی} \end{matrix}$$

حاصل ضرب این دو ماتریس برابر است با :

$$A \times B = \begin{matrix} 140,000 \\ 250,000 \\ 300,000 \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ \% \\ \% \\ \% \end{matrix} \begin{matrix} 50,000 & 4,000 & 3,000 \\ . & . & . \end{matrix} \\ = 50,000 \times 140,000 + 4,000 \times 250,000 + 3,000 \times 300,000 \\ = 7,000,000,000 + 1,000,000,000 + 900,000,000 = 8,900,000,000 .$$

همان گونه که ملاحظه می‌شود، اولین درایه‌ی ماتریس سطری را در اولین درایه‌ی ماتریس ستونی، سپس دومین درایه‌ی ماتریس سطری را در دومین درایه‌ی ماتریس ستونی و بالأخره سومین درایه‌ی ماتریس سطری را در سومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم. سرانجام حاصل ضرب‌های به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم تا نتیجه، که یک ماتریس  $1 \times 1$  است، به‌دست آید.

دقت کنید که ضرب یک ماتریس سطری  $A$ ، در یک ماتریس ستونی  $B$  فقط وقتی شدنی است که تعداد ستون‌های ماتریس  $A$  مساوی با تعداد سطرهای ماتریس  $B$  باشد.

بنابراین، اگر  $A$  یک ماتریس  $1 \times n$  و  $B$  یک ماتریس  $n \times 1$  باشد، برای پیدا کردن حاصل ضرب  $A \times B$  به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

اولین درایه‌ی ماتریس سطری را در اولین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم. سپس دومین درایه‌ی ماتریس سطری را در دومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم. پس از آن سومین درایه‌ی ماتریس سطری را در سومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم و بالأخره آخرین درایه‌ی ماتریس سطری را در آخرین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم.

حاصل ضرب‌های به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم تا نتیجه حاصل گردد.

مثال ۲۱

$$\begin{matrix} & & 1 \\ & 3 & 2 \\ 1 \times 2 & 2 \times 1 & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} = (2 \times 1) + (3 \times 2) = 2 + 6 = 8$$

$$A \times B = \begin{matrix} & & 3 \\ & 2 & 3 \\ 1 \times 3 & 2 \times 1 & \end{matrix}$$

مثال ۲۲

چون ماتریس  $A$ ،  $1 \times 3$  و ماتریس  $B$ ،  $2 \times 1$  است، لذا ضرب آن‌ها عملی نیست.

## ۱۱-۷ ضرب ماتریس‌ها

اگر دو ماتریس  $A$  و  $B$  مفروض باشند، تنها شرطی که بتوان ماتریس  $A$  را در ماتریس  $B$  ضرب نمود ( $A \times B$ )، این است که تعداد ستون‌های ماتریس  $A$  برابر با تعداد سطرهای ماتریس  $B$  باشد.

اگر ماتریس  $A$  یک ماتریس  $m \times p$  و  $B$  یک ماتریس  $p \times n$  باشد، برای به‌دست آوردن ماتریس

$A \times B$  که یک ماتریس  $m \times n$  خواهد بود به صورت زیر عمل می‌کنیم. اولاً، ماتریس  $B$  را به  $n$  ماتریس ستونی تجزیه می‌کنیم. ثانیاً، ماتریس  $A$  را طبق روش قبلی در هریک از این ماتریس‌های ستونی ضرب می‌نماییم. ثالثاً، ضرب‌های به‌دست آمده را که به صورت ماتریس‌های ستونی هستند از چپ به راست ستون‌های اول تا  $n$ ام ماتریس حاصل ضرب قرار می‌دهیم. مثال ۲۳— حاصل ضرب  $A \times B$  را پیدا کنید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 4 & 1 \times 3 + 2 \times 1 \\ 3 \times 2 + 4 \times 4 & 3 \times 3 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 13 \end{pmatrix}$$

چون هر دو ماتریس  $2 \times 2$  هستند، پس ضرب آن‌ها شدنی است و نتیجه، یک ماتریس  $2 \times 2$  خواهد بود.

در این مثال می‌توان  $B \times A$  را محاسبه نمود. چون هر دو ماتریس  $2 \times 2$  هستند. ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$A \times B \quad B \times A$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 3 & 2 \times 2 + 3 \times 4 \\ 4 \times 1 + 1 \times 3 & 4 \times 2 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 13 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$$

ملاحظه می‌شود حاصل ضرب  $A \times B$  با  $B \times A$  برابر نیست.

مثال ۲۴— دو ماتریس  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$  و  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  مفروض است. حاصل ضرب  $A \times B$  را پیدا کنید.

چون تعداد ستون‌های ماتریس  $A$  برابر با تعداد سطرهای ماتریس  $B$  است، پس این ضرب شدنی است.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 2 & 2 \times 3 + 3 \times 4 & 2 \times 5 + 3 \times 6 \\ 10 \times 1 + 5 \times 2 & 10 \times 3 + 5 \times 4 & 10 \times 5 + 5 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 & 28 \\ 20 & 55 & 65 \end{pmatrix}$$

زیرا  $2 = 2$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3\# \quad 1\# \quad 2 \times 1 + 3 \times 2\# \quad 8\# \\ 1\% \quad 5\% \times \quad 12\% \quad 1\% \times 1 + 5 \times 2\% \quad 11\% \end{array} \quad \text{ستون اول حاصل ضرب}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3\# \quad 3\# \quad 2 \times 3 + 3 \times 4\# \quad 18\# \\ 1\% \quad 5\% \times \quad 14\% \quad 1\% \times 3 + 5 \times 4\% \quad 12\% \end{array} \quad \text{ستون دوم حاصل ضرب}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3\# \quad 5\# \quad 2 \times 5 + 3 \times 6\# \quad 28\# \\ 1\% \quad 5\% \times \quad 16\% \quad 1\% \times 5 + 5 \times 6\% \quad 13\% \end{array} \quad \text{ستون سوم حاصل ضرب}$$

$$A \times B = \begin{array}{r} 8 \quad 18 \quad 28\# \\ 11\% \quad 20\% \quad 30\% \end{array} \quad \text{به طور خلاصه}$$

دقت کنید که در این مثال  $B \times A$  را نمی توان محاسبه نمود؛ زیرا

$$B \times A = \begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 5\# \quad 2 \quad 3\# \\ 12\% \quad 4\% \quad 6\% \times \quad 10\% \quad 5\% \\ 2 \times 3) \quad 2 \times 2 \end{array} \quad 2. \quad 3$$

## ۱۲-۷ تفریق ماتریس ها

تفریق ماتریس ها نیز مانند جمع آن هاست، با در نظر گرفتن این مطلب که تفریق حالت خاصی از جمع است، لذا برای انجام عمل تفریق  $A - B$ ، که در آن  $A$  و  $B$  دو ماتریس هم مرتبه ی دل خواه اند، در ابتدا تمام اعضای ماتریس  $B$  را در  $-1$  ضرب می کنیم و سپس عمل جمع  $A + (-B)$  را انجام می دهیم.

مثال ۲۵- اگر

$$A = \begin{array}{r} 5 \quad 3 \quad 2\# \\ 1\% \quad 1 \quad 4\% \end{array}$$

و

$$B = \begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 3\# \\ 12\% \quad 1 \quad 3\% \end{array}$$

باشد، آن گاه  $A - B$  را محاسبه کنید.

$$(-1) \times B = -B = \begin{array}{r} -3 \quad -2 \quad -3\# \\ 1-2 \quad -1 \quad -3\% \end{array}$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5-3 & 3-2 & 2-3 \\ 1-2 & 4-1 & 4-3 \end{vmatrix} \quad A - B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

### ۷-۱۳ دترمینان

فقط برای ماتریس مربع می توان عددی به نام دترمینان به دست آورد و برای ماتریس هایی که سطر و ستون آن ها مساوی نباشد، محاسبه ی دترمینان امکان ندارد. دترمینان ماتریس مربع  $A$ ، که  $n \times n$  است،

به صورت  $|A|$  نمایش داده می شود. اگر  $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  یک ماتریس  $2 \times 2$  باشد، عدد حقیقی  $|A|$  برابر با  $ad - bc$  را دترمینان ماتریس  $A$  می نامیم.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

اگر  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  باشد، دترمینان  $A$  را به شکل زیر محاسبه می کنیم.

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

روشن است که برای محاسبه ی دترمینان، ابتدا درایه ی  $a_{11}$  را در دترمینان ماتریس  $A$  با حذف سطر اول و ستون اول آن ضرب می کنیم. سپس، منفی درایه ی  $a_{12}$  را در دترمینان ماتریس  $A$ ، با حذف سطر اول و ستون دوم آن ضرب می کنیم و بالاخره درایه ی  $a_{13}$  را در دترمینان ماتریس  $A$ ، با حذف سطر اول و ستون سوم آن ضرب می نماییم تا از حاصل جمع این سه عدد، دترمینان  $A$  به دست آید.

$$|A| = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{مثال ۲۶- دترمینان ماتریس A را به دست آورید.}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$1 \times (6 - 0) - 3 \times (4 - 1) + 2 \times (0 - 3) = 6 - 9 - 6 = -9$$

اگر A یک ماتریس  $4 \times 4$  باشد، برای پیدا کردن دترمینان A با توجه به مطالبی که گفته شد، به شرح زیر عمل می‌کنیم.

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} +$$

$$c \times \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d \times \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

دقت کنید که علامت ضریب  $a_{ij}$  با استفاده از دستور  $(-1)^{i+j}$  به دست آمده است. به طور کلی، برای پیدا کردن دترمینان A، که یک ماتریس  $n \times n$  است، به این صورت عمل

می‌کنیم.

$$|A| = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{A}_{ij}$$

در این رابطه  $a_{ij}$  عبارت از درایه‌ی یک سطر یا یک ستون از ماتریس  $A$  است و  $\dot{A}_{ij}$  را هم‌سازه‌ی (کوفاکتور یا زیر ماتریس) درایه‌ی  $a_{ij}$  گویند.

بنابراین، دترمینان ماتریس  $A$  عبارت است از حاصل ضرب داخلی درایه‌ی یک سطر با یک

ستون ماتریس  $A$  در هم‌سازه‌های  $\dot{A}_{ij}$ .

مقدار  $\dot{A}_{ij}$  برابر با  $(-1)^{i+j}$  ضربدر دترمینان ماتریس حاصل از  $A$  با حذف سطر  $i$  و ستون  $j$  است.

مثال ۲۷- دترمینان ماتریس  $B$  را که  $4 \times 4$  است، پیدا کنید.

$$B = \begin{matrix} \begin{matrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{matrix} & \begin{matrix} \# \\ \% \\ \% \\ \% \end{matrix} & |B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

$$= -1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

سپس دترمینان‌های مرتبه‌ی ۳ را برحسب ستون‌های اول آن‌ها بسط می‌دهیم.

$$|B| = (-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + (-2)(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1(3-0) - 2(4+1) = 3-10 = -7$$



۱-۱۳-۷ ماتریس الحاقی: فرض کنیم  $A = [a_{ij}]$  یک ماتریس مربع  $M \times M$  باشد. آن گاه

بنا بر تعریف، ماتریس الحاقی برای ماتریس مربع  $A$ ، که با  $\text{adj}A$  نمایش داده می‌شود، عبارت است از برگردان ماتریس حاصل از  $A$ ، به طوری که در آن به جای عناصر  $a_{ij}$ ، هم‌سازه‌های آن‌ها یعنی  $\dot{A}_{ij}$  قرار گرفته‌اند. به عبارت دیگر ماتریس الحاقی  $\text{adj}A$  برابر است با برگردان ماتریس مربعی که به جای هر عنصر آن  $(-1)^{i+j}$  برابر دترمینان زیر ماتریس حاصل از همان عنصر قرار گرفته باشد.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{مثال ۲۸- فرض کنیم}$$

ماتریس الحاقی آن برابر است با

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} \dot{A}_{11} & \dot{A}_{21} & \dot{A}_{31} \\ \dot{A}_{12} & \dot{A}_{22} & \dot{A}_{32} \\ \dot{A}_{13} & \dot{A}_{23} & \dot{A}_{33} \end{bmatrix}$$

که در آن  $\dot{A}_{ij}$  هم‌سازه‌ی  $a_{ij}$  است، مثل

$$\dot{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

و یا

$$\dot{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مثال ۲۹- ماتریس الحاقی

را به دست آورید.

$$\text{adj}A = \begin{array}{cc} d & -b\% \\ -c & a\% \end{array}$$

$$A = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3\% \\ 1 & 3 & 4\% \\ 1 & 4 & 3\% \end{array}$$

مثال ۳۰- ماتریس الحاقی

را به دست آورید.

$$\text{adj}A = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \cdot & 3 & 4 & - & 2 & 3 & & 2 & 3 & \# \\ \cdot & 4 & 3 & & 4 & 3 & & 3 & 4 & \% \\ \cdot & 1 & 4 & & 1 & 3 & & 1 & 3 & \% \\ \cdot & 1 & 3 & - & 1 & 3 & & 1 & 4 & \% \\ \cdot & 1 & 3 & & 1 & 2 & & 1 & 2 & \% \\ \cdot & 1 & 4 & - & 1 & 4 & & 1 & 3 & \% \\ ! & 1 & 4 & & 1 & 4 & & 1 & 3 & \% \end{array}$$

$$\text{adj}A = \begin{array}{ccc} -7 & 6 & -1\% \\ 1 & 0 & -1\% \\ 1 & -2 & 1\% \end{array}$$

## ۱۴-۷ خواص دترمینانها

۱- هرگاه جای تمام سطرها و ستون‌های یک ماتریس را با یکدیگر عوض کنیم، دترمینان آن

ماتریس تغییر نمی‌کند.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

۲- از تعویض دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس مربع با یکدیگر، تنها علامت دترمینان آن

تغییر می‌یابد.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

۳- هرگاه دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس مساوی باشد، دترمینان آن ماتریس صفر خواهد بود.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

۴- هرگاه تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون یک ماتریس در عددی مانند  $k$  ضرب شود، دترمینان آن ماتریس نیز در  $k$  ضرب می‌شود.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

۵- هرگاه تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریس صفر باشد، دترمینان آن برابر صفر خواهد بود.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

۶- هرگاه به سطر (یا ستون) یک ماتریس، مضرب‌هایی از سطرها (یا از ستون‌های دیگر) اضافه کنیم، دترمینان ماتریس حاصل با دترمینان ماتریس قبلی مساوی است. مرتبه‌ی یک ماتریس مربع: به تعداد سطرها یا ستون‌های یک ماتریس مربع، مرتبه‌ی ماتریس نیز می‌گویند.

۷- هرگاه  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند، داریم:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

یعنی دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس، برابر است با حاصل ضرب دترمینان‌های آن دو ماتریس.

مثال ۳۱- دترمینان ماتریس  $A$  و  $B$  را پیدا کنید.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \# \\ 1 & 2\% \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0$$

در ماتریس  $A$  چون سطر اول صفر است، پس دترمینان آن صفر است.

$$B = \begin{matrix} & \circ & ۱ & ۲\# \\ \circ & ۳ & ۱\% \\ ۱\circ & ۲ & ۴\% \end{matrix}$$

$$|B| = \circ$$

در ماتریس B چون ستون اول صفر است، پس دترمینان آن صفر است و نیازی به محاسبه ندارد.

مثال ۳۲- دترمینان ماتریس A و B را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

$$A = \begin{matrix} & ۱ & ۳ & ۲\# \\ \circ & ۲ & ۳ & ۱\% \\ ۱ & \circ & ۲\% \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & ۱ & ۳ & ۲\# \\ \circ & ۴ & ۶ & ۲\% \\ ۱ & \circ & ۲\% \end{matrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ \circ & ۲ & ۱ \\ ۱ & \circ & ۲ \end{vmatrix} = ۱ \times \begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ \circ & ۲ \end{vmatrix} - ۳ \times \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} + ۲ \times \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & \circ \end{vmatrix}$$

$$۱ \times (۶ - \circ) - ۳ \times (۴ - ۱) + ۲ \times (\circ - ۳) = ۶ - ۹ - ۶ = -۹$$

$$|B| = \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ \circ & ۴ & ۲ \\ ۱ & \circ & ۲ \end{vmatrix} = ۱ \times \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ \circ & ۲ \end{vmatrix} - ۳ \times \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} + ۲ \times \begin{vmatrix} ۴ & ۶ \\ ۱ & \circ \end{vmatrix}$$

$$|B| = ۱(۱۲ - \circ) - ۳(۴ \times ۲ - ۱ \times ۲) + ۲(۴ \times \circ - ۱ \times ۶)$$

$$|B| = ۱۲ - ۳(۸ - ۲) + ۲(-۶) = ۱۲ - ۱۸ - ۱۲ = -۱۸$$

ملاحظه می‌شود که تنها تفاوت ماتریس A و B در آن است که سطر دوم ماتریس B همان سطر دوم ماتریس A است، که در عدد ۲ ضرب شده است. بنابراین، با توجه به خاصیت (۴) دترمینان ماتریس B برابر است با همان دترمینان ماتریس A ضرب در عدد ۲. چون دترمینان ماتریس A، -۹ بوده است، پس دترمینان ماتریس B برابر با  $۹ \times ۲ = ۱۸$  -۱۸ است.

## ۱۵-۷ معکوس یک ماتریس

اگر برای یک ماتریس مربع  $A_{n \times n}$ ، یک ماتریس هم مرتبه با آن، مانند  $B$  وجود داشته باشد، به طوری که حاصل ضرب آن‌ها ماتریسی واحد باشد، چنین ماتریسی ( $B$ ) را معکوس ماتریس  $A$  می‌نامند.

$$A_{n \times n} \times B_{n \times n} = I_n = B_{n \times n} \times A_{n \times n}$$

و به این صورت نشان می‌دهند.

$$B_{n \times n} = A_{n \times n}^{-1}$$

ماتریس مربع با هر مرتبه، تنها هنگامی دارای معکوس است که دترمینان آن مخالف صفر باشد. برای روشن تر شدن موضوع به مثال زیر توجه فرمایید.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{مثال ۳۳- معکوس ماتریس } A \text{ را پیدا کنید.}$$

فرض می‌کنیم معکوس ماتریس  $A$ ، ماتریس مانند  $B$  باشد. بنابراین، طبق آنچه قبلاً گفته شد

$$A \times B = I$$

و یا

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \quad (۱)$$

$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0 \quad (۲)$$

$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \quad (۳)$$

$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1 \quad (۴)$$

برای پیدا کردن درایه‌های ماتریس  $B$  به شکل زیر عمل می‌کنیم.

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \text{از حل دستگاه (۱) و (۳) نتیجه می‌شود:}$$

$$b_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \text{و}$$

و از حل دستگاه (۲) و (۴) نتیجه می شود :

$$b_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

و

$$b_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

توجه کنید که مخرج هریک از این روابط، برابر با دترمینان A است.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

بنابراین، اگر  $|A| = 0$  باشد ماتریس B نامعین و  $A^{-1}$  وجود ندارد. پس، هر ماتریس مربع فقط زمانی دارای معکوس است که دترمینان آن مخالف صفر باشد.  
مثال ۳۴- معکوس ماتریس A را پیدا کنید.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \det A = -3 - 24 = -27 = |A|$$

چون  $|A| \neq 0$  پس معکوس آن وجود دارد.

$$b_{11} = \frac{3}{-27} = -\frac{1}{9}$$

$$b_{12} = \frac{-6}{-27} = \frac{2}{9}$$

$$b_{21} = \frac{-4}{-27} = \frac{4}{27}$$

$$b_{22} = \frac{-1}{-27} = \frac{1}{27}$$

پس،

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

توجه کنید که :

$$A \times A^{-1} = I$$

مثال ۳۵- معکوس ماتریس A را پیدا کنید.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 15 - 15 = 0$$

چون دترمینان آن مساوی صفر است، پس، ماتریس A معکوس ندارد. یک ماتریس، زمانی دارای معکوس است که اولاً، این ماتریس مربع باشد و ثانیاً، دترمینان آن یعنی |A| مخالف صفر گردد.

## ۱۶-۷ پیدا کردن ماتریس معکوس به روش عملیات ردیفی

چون استفاده از روش قبلی در محاسبه‌ی معکوس یک ماتریس، همیشه عملی نیست و ممکن است محاسبات به طول انجامد، روش عملیات ردیفی نیز قابل استفاده است. این روش بر سه اصل عمده‌ی زیر استوار است :

$$1- \text{قاعده‌ی کلی } A \times A^{-1} = I$$

۲- ضرب یا تقسیم کردن ردیفی از ردیف‌های یک ماتریس در یک، یا بر یک عدد غیر صفر.

۳- اضافه یا کسر کردن مضربی از یک ردیف ماتریس به ردیف دیگری از ردیف‌های ماتریس.

برای محاسبه‌ی معکوس یک ماتریس مربع A، ابتدا ماتریس واحد هم مرتبه‌ی آن  $I_n$  را مجاور ماتریس A قرار می‌دهیم (یعنی  $I: A$ ). سپس، بر مبنای این که  $A \times A^{-1} = I$  و  $A^{-1} \times A = I$ ، عملیات را به شکلی پس می‌گیریم که محل دو ماتریس مجاور در  $(I: A)$  با یکدیگر تعویض گردند، به شکلی که I محل خود را به  $A^{-1}$  بدهد و A به I مبدل شود (یعنی  $I: A^{-1}$ ). لذا قواعد زیر در عملیات ردیفی برای  $I: A$  به کار می‌رود.

۱- کلیه‌ی درایه‌های بالاترین ردیف ماتریس  $I: A$  را بر اولین درایه‌ی سمت چپ آن (برای

مرحله‌ی اول عملیات، درایه‌ی واقع در ردیف یکم و ستون یکم خواهد بود) تقسیم می‌کنیم (به شرطی که این درایه غیر صفر باشد). اما اگر اولین درایه‌ی سمت چپ ردیف، صفر باشد ابتدا هر ردیف دیگری

از ماتریس را که اولین عنصر آن صفر نباشد با ردیف اول جمع می‌کنیم و سپس قاعده را به کار می‌بریم. بدیهی است چنانچه ردیفی وجود نداشته باشد که اولین درایه‌ی سمت چپ آن غیر صفر باشد، ماتریس معکوس ندارد.

اجرای اولین قاعده سبب می‌گردد که بالاترین درایه‌ی سمت چپ به عدد یک تبدیل گردد و در نتیجه بتوان تجسس را برای داشتن بردار واحد شروع کرد.

۲- چنان مضربی از ردیف با اولین درایه‌ی تبدیل شده به واحد را با سایر ردیف‌ها جمع می‌کنیم، به شکلی که کلیه‌ی درایه‌ی موجود در ستون حاوی درایه‌ی تبدیل شده به یک (ستون یکم) برابر صفر شوند به جز خود درایه‌ی تبدیل شده به واحد که باید تا آخر عملیات واحد باقی بماند.

۳- قاعده‌ی یک و دو را برای کلیه‌ی ردیف‌های باقی‌مانده تکرار می‌نماییم تا آن که  $A^{-1}$  مشخص گردد. این روش برای حل دستگاه معادلات با استفاده از کامپیوتر کاربرد دارد.  
مثال ۳۶- معکوس ماتریس  $A$  را با استفاده از روش عملیات ردیفی پیدا کنید.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A : I = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

کلیه‌ی درایه‌های ردیف یکم را بر عدد ۳ تقسیم می‌کنیم.

$$= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

چنان مضربی از ردیف یکم را با سایر ردیف‌ها جمع می‌نماییم که کلیه‌ی درایه‌های ستون یکم به استثنای درایه‌ی اول برابر صفر شوند. به این منظور باید مضرب صفر از ردیف یکم با ردیف دوم و مضرب ۱- از آن ردیف با ردیف سوم جمع شوند.



$$\begin{array}{cccc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}$$

سپس اولین درایه‌ی سمت چپ باقی‌مانده برای ردیف دوم عنصر یک است که عملیات را بر روی آن شروع می‌نماییم.

کلّیه‌ی درایه‌های ردیف دوم را بر اولین درایه‌ی باقی‌مانده در سمت چپ (عدد یک) تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{cccc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}$$

چنان مضربی از ردیف دوم به سایر ردیف‌ها اضافه می‌کنیم که کلّیه‌ی درایه‌های ستون دوم به استثنای درایه‌ی واحد آن برابر صفر شوند. به این منظور باید مضرب  $-\frac{1}{3}$  از آن با ردیف اول و مضرب  $\frac{1}{3}$  از آن با ردیف سوم جمع گردد.

$$\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}$$

اینک عملیات ردیفی را برای اولین درایه باقی‌مانده در سمت چپ ردیف سوم (یعنی  $\frac{2}{3}$ ) انجام می‌دهیم. به عبارت دیگر، کلّیه‌ی درایه‌های ردیف سوم را بر عنصر  $\frac{2}{3}$  تقسیم می‌نماییم.

$$\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}$$

بالأخره برای تبدیل درایه‌های ستون سوم، به استثنای درایه‌ی سوم آن به صفر، باید مضرب  
 ۱- از آن را با ردیف دوم و مضرب  $\frac{4}{3}$  - از آن را با ردیف اول جمع نماییم.

$$\begin{array}{ccc|ccc} \cdot & & & 1 & -1 & -2 \\ \cdot & \circ & \circ & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \circ & 1 & \circ & \cdot & \cdot \\ \cdot & \circ & \circ & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

ملاحظه می‌شود که در اثر عملیات ردیفی ماتریس  $(A; I)$  تبدیل به  $(I; A^{-1})$  می‌شود و معکوس  $A$  به دست آمده است.

۱-۱۶-۷ پیدا کردن ماتریس معکوس با استفاده از ماتریس الحاقی: روش دیگری که برای محاسبه‌ی ماتریس معکوس به کار می‌رود، استفاده از ماتریس الحاقی است. در این روش، درمیان ماتریسی که می‌خواهیم معکوس آن را به دست آوریم، محاسبه می‌کنیم. اگر  $A$  ماتریس (غیرمنفرد، نامنفرد) معکوس پذیر باشد، یعنی  $|A| \neq 0$  در این صورت داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A$$

مثال ۳۷- معکوس ماتریس  $A = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{\circ\#}$  را در صورت وجود تعیین کنید.

$$|A| = 3$$

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 3 & \circ \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{\circ\#}$$

در نتیجه

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & \circ \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{\circ\#} = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{\circ\#}$$

مثال ۳۸- معکوس ماتریس را در صورت وجود تعیین کنید.

$$A = \begin{pmatrix} \circ & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}^{\circ\#}$$

$$|A| = 0 + 2(-2 + 3) + (-3)(-2 + 3) = -1$$

پس عناصر ماتریس الحاقی عبارت‌اند از

$$\hat{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

$$\hat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 3) = -1$$

$$\hat{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$$

$$\hat{A}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -(4 - 6) = 2$$

$$\hat{A}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3$$

$$\hat{A}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-0 - 2) = 2$$

$$\hat{A}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 9 = 3$$

$$\hat{A}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(0 + 3) = -3$$

$$\hat{A}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$$

$$\text{adj}A = \begin{matrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ \% \\ \% \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \begin{matrix} \circ & -2 & -3\# \\ 1 & 3 & 3\% \\ 1-1 & -2 & -2\% \end{matrix}$$

## ۱۷-۷ دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی

برای حل دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

(الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم.

(ب) هم‌سازه‌های ستون اول را تشکیل می‌دهیم.

(ج)  $\dot{A}_{11}$  را در معادله‌ی اول،  $\dot{A}_{21}$  را در معادله‌ی دوم و  $\dot{A}_{31}$  را در معادله‌ی سوم ضرب

می‌نماییم.

(د) هر سه معادله را با هم جمع و  $x$  را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۳۹- دستگاه را با استفاده از هم‌سازه، نسبت به  $x$  حل کنید.

$$. 2x + y + z = 0$$

$$. x - y + 5z = 0$$

$$. x - 2y - z = -18$$

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 1\# \\ 1 & -1 & 5\% \\ 1 & -2 & -1\% \end{matrix}$$

$$\dot{A}_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 10 = 11$$

$$\dot{A}_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 2) = -1$$

$$\dot{A}_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 1 = 6$$

$$. 11(2x + y + z) = 0$$

$$. -1(x - y + 5z) = 0$$

$$. 6(x - 2y - z) = -18 \times 6$$

$$. 22x + 11y + 11z = 0$$

$$. -x + y - 5z = 0$$

$$. 6x - 12y - 6z = -108$$

$$(22x - x + 6x) + (11y + y - 12y) + (11z - 5z - 6z) = -108$$

$$27x = -108$$

$$x = -4$$

مثال ۴۰- این دستگاه را با استفاده از هم‌سازه نسبت به  $x$  حل کنید.

$$. 2x + y = 2$$

$$. 3x - 2z = 4$$

$$. y + 3z = 1$$

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ \% \\ \% \\ \% \end{matrix} \quad \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +2$$

$$\Delta_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \quad \Delta_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$. 2. 4x + 2y = 4$$

$$-3. -9x + 6z = -12$$

$$. 5x = -10. \quad x = 2$$

$$-2. -2y - 6z = -2$$

روش دیگری برای حل دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی: برای حل دستگاه به ترتیب زیر

عمل می‌کنیم.

(الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم و آن را  $+$  می‌نامیم.

(ب) دترمینان  $+$  را محاسبه می‌کنیم. به شرطی که مخالف صفر باشد.

(ج) در ماتریس ضرایب، ستون اول را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را  $+$

می‌نامیم.

د) در ماتریس ضرایب، ستون دوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را  $+_2$

می‌نامیم.

ه) در ماتریس ضرایب، ستون سوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را

$+_3$  می‌نامیم.

و) دترمینان  $+_1$  و  $+_2$  و  $+_3$  را محاسبه می‌نماییم.

$$x_i = \frac{+i}{+}, \quad i=1,2,3$$

ز) با استفاده از فرمول

جواب‌های دستگاه به دست می‌آید.

مثال ۴۱ — دستگاه معادلات

$$. 2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$. x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

$$. x_1 + x_2 + 5x_3 = -7$$

را حل کنید.

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر است با

$$= . \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2(15-1) - (5-1) + (1-3) = 28 - 4 - 2 = 22$$

حال، بقیه‌ی دترمینان‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$+_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2(15-1) - (25+7) + (5+21) = 28 - 32 + 26 = 22$$

$$+_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 2(25+7) - 2(5-1) + (-7-5) = 64 - 8 - 12 = 44$$

$$+_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 2(-21-5) - (-7-5) + 2(1-3) = -52 + 12 - 4 = -44$$

در نتیجه

$$x_1 = \frac{+x_1}{+} = \frac{22}{22} = 1 \quad . \quad x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{+x_2}{+} = \frac{44}{22} = 2 \quad . \quad x_2 = 2$$

$$x_3 = \frac{+x_3}{+} = \frac{-44}{22} = -2 \quad . \quad x_3 = -2$$

حال امتحان می‌کنیم.

$$. \quad 2(1) + 2 + (-2) = 2 \quad . \quad 2 = 2$$

$$. \quad 1 + 3(2) + (-2) = 1 + 6 - 2 = 5 \quad . \quad 5 = 5$$

$$. \quad 1 + 2 + 5(-2) = 1 + 2 - 10 = -7 \quad . \quad -7 = -7$$

### ۱۸-۷ دستگاه چهار معادله‌ی چهار مجهولی (جهت مطالعه آزاد)

برای حل دستگاه چهار معادله‌ی چهار مجهولی، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم و آن را  $+$  می‌نامیم.

ب) دترمینان  $+$  را محاسبه می‌کنیم، به شرطی که مخالف صفر باشد.

ج) در ماتریس ضرایب، ستون اول را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را  $+_1$

می‌نامیم.

د) در ماتریس ضرایب، ستون دوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را  $+_2$

می‌نامیم.

ه) در ماتریس ضرایب، ستون سوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را

$+_3$  می‌نامیم.

و) در ماتریس ضرایب، ستون چهارم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را

$+_4$  می‌نامیم.

ز) دترمینان  $+_1$  و  $+_2$  و  $+_3$  و  $+_4$  را محاسبه می‌نامیم.

$$x_i = \frac{+_i}{+} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ح) با استفاده از فرمول

جواب‌های دستگاه به دست می‌آید.

مثال ۴۲- دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$. 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9$$

$$. 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5$$

$$. x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0$$

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر است با:

$$= . \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 . 0$$

حال، بقیه‌ی دترمینان‌ها را محاسبه می‌کنیم

$$+_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81$$

$$+_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108$$

$$+_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27$$



$$+_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

در نتیجه

$$x_1 = \frac{+1}{+} = \frac{81}{27} = 3$$

$$x_2 = \frac{+2}{+} = \frac{-1 \cdot 8}{27} = -4$$

$$x_3 = \frac{+3}{+} = \frac{-27}{27} = -1$$

$$x_4 = \frac{+4}{+} = \frac{27}{27} = 1$$

حال امتحان می کنیم

$$. 2(3) + (-4) - 5(-1) + 1 = 8. \quad 6 - 4 + 5 + 1 = 8. \quad 8 = 8$$

$$3 - 3(-4) - 6(1) = 9. \quad 3 + 12 - 6 = 9. \quad 9 = 9$$

$$. 2(-4) - (-1) + 2(1) = -5. \quad 8 + 1 + 2 = -5. \quad -5 = -5$$

$$. 3 + 4(-4) - 7(-1) + 6(1) = 0. \quad 3 - 16 + 7 + 6 = 0. \quad 0 = 0$$

## تمرین های فصل هفتم

۱- ماتریس های زیر را دوباره با هم جمع کنید.

$$\begin{matrix} 2 & 0\# & 1 & 2\# \\ 1 & 3\%+ & 1 & 4\% \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 5 & 1\# & 1 & 2 & 3\# \\ .2 & 2 & \%+ & .0 & 1 & \% \\ . & & \% & . & & \% \\ !1 & 2 & 1\% & !2 & 2 & 1\% \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a & b & c\# & 1 & 0 & 1\# \\ !d & e & f\%+ & !2 & 2 & 1\% \end{matrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
 ۱ & ۳\# & -۱ & -۳\# \\
 \cdot ۲ & \circ \frac{\%}{\%} & \cdot -۲ & \circ \frac{\%}{\%} \\
 ! ۱ & ۱\% & ! -۱ & ۱\%
 \end{array}$$

۲- ماتریس‌های زیر را در هم ضرب نمایید :

$$\begin{array}{cccc}
 ۱ & -۱ & ۱\# & ۱ & ۲\# \\
 \cdot ۲ & \circ & ۱\% & -۱ & ۱\% \\
 ! ۳ & -۱ & ۲\% & ۱ & ۳\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 ۱ & -۱ & ۱\# & ۱ & -۱ & ۱\# \\
 ! ۲ & \circ & ۱\% & ۱ & -۱\% \\
 & & ! ۱ & ۱ & ۱\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 ۲ & ۳\# & ۱\# \\
 ! ۱ & ۴\% & ۱\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 a & b\# & \\
 \cdot c & d\% & ۱\# \\
 ! e & f\% & ۱\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 ۱ & ۲ & \circ\# & \circ & \circ & \circ\# \\
 \cdot ۱ & ۱ & \circ\% & \circ & \circ & \circ\% \\
 ! -۱ & ۴ & \circ\% & ۱ & ۴ & ۹\%
 \end{array}$$

۳- دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{cc}
 ۲ & ۱\# \\
 ! ۰ & ۲\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 ۱ & ۲ & ۳\# \\
 \cdot ۰ & ۱ & ۱\% \\
 ! ۲ & ۱ & ۲\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \circ & \circ & ۷\# \\
 \cdot -۲ & ۳ & ۴\% \\
 ! ۵ & ۶ & ۱\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 0 & 0 \# \\ \cdot & 0 & -1 & 2 \quad 1 \% \\ \cdot & 0 & 0 & -1 \quad 2 \% \\ ! & 1 & 0 & 0 \quad -3 \% \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 2 \# \\ \cdot & 1 & 1 \quad \sqrt{\frac{\%}{\%}} \\ \cdot & 0 & -3 \quad 4 \% \\ ! & 0 & -3 \quad 4 \% \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \# \\ \cdot & 5 & 1 \quad -3 \frac{\%}{\%} \\ \cdot & 2 & 7 \quad 4 \% \\ ! & 2 & 7 \quad 4 \% \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & -1 \# \\ \cdot & 4 & 0 \quad 5 \frac{\%}{\%} \\ \cdot & -1 & 2 \quad 1 \% \\ ! & -1 & 2 \quad 1 \% \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 5 \# \\ \cdot & 2 & 3 \quad -1 \frac{\%}{\%} \\ \cdot & -1 & 2 \quad 1 \% \\ ! & -1 & 2 \quad 1 \% \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \# \\ \cdot & 1 & 2 \quad 3 \frac{\%}{\%} \\ \cdot & -1 & 4 \quad 0 \% \\ ! & -1 & 4 \quad 0 \% \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \# \\ \cdot & a & b \quad c \frac{\%}{\%} \\ \cdot & d & e \quad f \% \\ ! & d & e \quad f \% \end{array}$$

۴- معکوس ماتریس‌های زیر را در صورت وجود، پیدا کنید.

$$A = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \# \\ \cdot & 0 & 1 \quad 6 \frac{\%}{\%} \\ \cdot & 1 & 3 \quad 2 \% \\ ! & 1 & 3 \quad 2 \% \end{array}$$

$$B = \begin{array}{ccc} 2 & 4\# & \\ 15 & 3\% & \end{array}$$

$$C = \begin{array}{ccc} 2 & 1\# & \\ 11 & 0\% & \end{array}$$

$$D = \begin{array}{ccc} 8 & 3 & 5\# \\ 4 & 11 & 7\% \\ 3 & 9 & 6\% \end{array}$$

$$E = \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 3\# \\ 3 & 3 & 1\% \\ 2 & 0 & 3\% \end{array}$$

$$F = \begin{array}{ccc} 0 & -2 & -1\# \\ 1 & -3 & 4\% \\ -1 & -1 & -1\% \end{array}$$

$$G = \begin{array}{ccc} 2 & -3\# & \\ 14 & -6\% & \end{array}$$

۵ - دستگاه‌های زیر را با استفاده از هم‌سازه نسبت به  $x$  حل کنید.

$$. x - y = 0 \quad . x + y + z = 6$$

$$. y - z = 0 \quad . x + y - z = 0$$

$$. z - x = 0 \quad . 2x + 3y + z = 11$$

$$. x + y + z = 3 \quad . 3x + 3y + z = 2$$

$$. x - z = -1 \quad . x - y + 2z = 6$$

$$. 2x + 2y = 2 \quad . 2x + y - z = -1$$

$$. x + y + 2z = 45 \quad . x + y + 2z = 25$$

$$. 2x - y + z = 15 \quad . 2x + y - z = 9$$

$$. x + y - z = 0 \quad . -x + y = 1$$

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 & x + y - z &= 1 \\ y - z &= -1 & 3x - z &= 2 \\ x + y - z &= -\frac{1}{2} & 4x - y &= 5 \end{aligned}$$

۶- در ماتریس A، مقدار x را طوری تعیین کنید که درمینان A برابر ۱۵- باشد.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ x & 1 & x-2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \# \\ \% \\ \% \\ \% \end{matrix}$$

۷- یک شرکت مقاطعه کاری برای هر ساعت کامیون بدون راننده ۶۰۰۰ تومان، بابت کرایه هر ساعت تراکتور بدون راننده ۲۰۰۰ تومان و برای هر ساعت جهت راننده ۱۰۰۰ تومان پرداخت می نماید. این شرکت از ماتریس A برای انجام کارهای مختلف استفاده می نماید.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ \% \\ \% \\ \% \end{matrix}$$

الف) اگر ۱۰۰۰، ۲۰۰۰، ۳۰۰۰ P = نشان دهنده ی ماتریس قیمت باشد، که توسط این شرکت پرداخت می شود، ماتریس PA را محاسبه کنید.

ب) فرض کنید که شرکت برای انجام یک طرح کوچک نیازمند ۲۰ ساعت کار از نوع I، و ۳۰

ساعت کار از نوع II است. اگر  $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \# \\ \% \\ \% \end{matrix}$  ماتریس تقاضا باشد AS را محاسبه کنید.

ج) PAS را محاسبه نماید.

۸- یک فروشنده ی ماشین حساب پنج مدل ماشین حساب خود را در سه مغازه که در مناطق

مختلف شهر قرار دارند می‌فروشد. موجودی هر مدل در هر مغازه در ماتریس M خلاصه شده است. قیمت فروش کلی (W) و جزئی (R) در ماتریس N برای هر مدل نوشته شده است.

	A	B	C	D	E
M =	۴	۲	۳	۷	۱#
	۲	۳	۵	۰	۶%
	۱۰	۴	۳	۴	۳%

	تومان	تومان
	W	R
N =	۷۰۰	۸۴۰ #A
	۱۴۰۰	۱۸۰۰ %B
	۱۸۰۰	۲۴۰۰ %C
	۲۷۰۰	۳۳۰۰ %D
	۳۵۰۰	۴۹۰۰ %E

الف) قیمت جزئی موجودی مغازه ۲ چه قدر است؟

ب) قیمت کلی موجودی مغازه ۳ چه قدر است؟

ج) ماتریس MN را محاسبه نمایید.

۹- یک پیمان کار توافق کرده است که ۴ ویلا، ۳ آپارتمان و ۹ خوابگاه بسازد. این توافق را

می‌توان در قالب ماتریس زیر نشان داد.

خوابگاه آپارتمان ویلا

$$Q = \begin{bmatrix} & ۳ & ۹ \\ & & \end{bmatrix}$$

مقادیر ریالی مصالح معدنی در ساخت ساختمان‌ها و دستمزد کارگران به شرح ماتریس زیر است:

	آجر	چوب	شیشه	بتن	دستمزد کارگران
R =	۱۰۰	۳۰	۵۰	۳۰	۱۲۰ # ویلا
	۴۰	۸۰	۲۰	۴۰	۱۰۰% آپارتمان
	۱۶۰	۵۰	۷۰	۲۰	۱۰۰% خوابگاه

مطلوب است: محاسبه  $Q \times R$ ، که بیانگر میزان مصالح و کارگر لازم برای ساخت هر

ساختمان است.

۱۰- امید و خواهرش مریم هر کدام به دو فروشگاه متفاوت می‌روند. امید ۴ کیلو شکر به ازای هر کیلو ۶۰۰ تومان، ۲ کیلو گوشت که هر کیلوی آن ۴۰۰۰ تومان و ۳ بسته نان که هر بسته‌ی آن ۱۲۰ تومان است می‌خرد. مریم نیز ۲ کیلوگرم شکر به ازای هر کیلو ۷۵۰ تومان، ۱ کیلوگوشت که هر کیلوی آن ۳۵۰۰ تومان و ۴ بسته نان که هر بسته آن ۱۰۰ تومان است می‌خرد.  
مطلوب است:

۱- جمع کل پولی که امید و مریم هر کدام بابت خریدهایشان پرداخت کرده‌اند.  
۲- مشخص کنید که اگر امید از فروشگاه‌ای که مریم خرید کرده بود، خرید می‌کرد چه قدر پول باید می‌پرداخت؟

۳- اگر مریم از فروشگاه‌ای که امید از آن خریداری کرده بود، خرید می‌کرد، چه قدر پول باید می‌پرداخت؟

۱۱- فرض کنید شرکتی ۳ نوع شکلات (کاکائویی، قهوه‌ای و شیرینی) تولید می‌کند و قصد دارد از هر شکلات به تعداد زیر در ماه فروردین در ۲ مدرسه‌ی دخترانه و پسرانه بفروشد:

شکلات شیرینی شکلات قهوه‌ای شکلات کاکائویی

$$T = \begin{matrix} \text{مدرسه‌ی پسرانه} \# 105 & 70 & 120 \\ \text{مدرسه‌ی دخترانه} \% 145 & 100 & 65 \end{matrix}$$

اگر اطلاعات مربوط به فروش واقعی شکلات‌های این شرکت به صورت ماتریس زیر باشد، اختلاف بین فروش پیش‌بینی شده و فروش واقعی این شرکت در هر یک از این مدارس چه قدر است؟

شکلات شیرینی شکلات قهوه‌ای شکلات کاکائویی

$$J = \begin{matrix} \text{مدرسه‌ی پسرانه} \# 100 & 50 & 120 \\ \text{مدرسه‌ی دخترانه} \% 150 & 75 & 80 \end{matrix}$$

۱۲- سارا و زهرا و نیما به یک مغازه میوه فروشی رفته‌اند. سارا ۱۲ عدد پرتقال، ۵ عدد انار، ۲۰ عدد سیب، ۶ عدد موز و ۳ عدد لیموترش خرید. زهرا ۲۰ عدد پرتقال، ۳ عدد انار، ۱۰ عدد سیب و ۴ عدد موز خرید و نیما هم ۱۰ عدد پرتقال، ۱۰ عدد انار، ۱۲ عدد موز خرید. اگر قیمت هر عدد پرتقال ۳۰۰ تومان، انار ۲۰۰ تومان، سیب ۵۰ تومان، موز ۱۰۰ تومان و لیموترش ۱۰ تومان باشد.  
مطلوب است:

الف) مقدار میوه‌های خریداری شده توسط هر یک از این ۳ نفر را در یک ماتریس افقی نشان

دهید.

- ب) قیمت خرید هر نوع میوه توسط این ۳ نفر را در یک ماتریس ستونی نشان دهید.
- ج) از طریق ضرب ماتریس‌ها، صورت حساب هر کدام از این ۳ نفر را تهیه کنید.
- د) با استفاده از جمع ماتریس‌ها مشخص کنید از هر نوع میوه، کلاً چند عدد خریداری شده است؟
- ه) با استفاده از ضرب ماتریس‌ها، حساب کنید برای خرید هر نوع میوه جمعاً چند تومان پرداخت شده است؟



جدول ۱- ارزش نهایی سالواره یک ریالی که در پایان هر سال دریافت یا پرداخت می شود

n	1.5%	4.0%	4.5%	5.0%	5.5%	6.0%	7.0%
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	2.015000	2.040000	2.045000	2.050000	2.055000	2.060000	2.070000
3	3.045225	3.121600	3.137025	3.152500	3.168025	3.183600	3.214900
4	4.090903	4.246464	4.278191	4.310125	4.342266	4.374616	4.439943
5	5.152267	5.416323	5.470710	5.525631	5.581091	5.637093	5.750739
6	6.229551	6.632975	6.716892	6.801913	6.888051	6.975319	7.153291
7	7.322494	7.898294	8.019152	8.142008	8.266894	8.393838	8.654021
8	8.432839	9.214226	9.388014	9.569109	9.721573	9.897468	10.259603
9	9.559332	10.582795	10.802114	11.026564	11.256260	11.491316	11.977989
10	10.702722	12.006107	12.288209	12.577893	12.875354	13.180795	13.816448
11	11.863262	13.486351	13.841179	14.206787	14.583498	14.971643	15.783599
12	13.041211	15.025805	15.464032	15.917127	16.385591	16.869941	17.888451
13	14.236830	16.626838	17.159913	17.712983	18.286798	18.882138	20.140643
14	15.450382	18.291911	18.932109	19.598632	20.292572	21.015066	22.550488
15	16.682138	20.023588	20.784054	21.578564	22.409663	23.275970	25.120222
16	17.932370	21.824531	22.719337	23.657492	24.641140	25.672528	27.888054
17	19.201355	23.697512	24.741707	25.840366	26.996403	28.212880	30.840217
18	20.489376	25.645413	26.855084	28.132385	29.481205	30.905653	33.999033
19	21.796716	27.671229	29.063562	30.539004	32.102671	33.759992	37.378965
20	23.123667	29.778079	31.371423	33.065954	34.868318	36.785591	40.995492
21	24.470522	31.969202	33.783137	35.719252	37.892727	39.992727	44.865177
22	25.837580	34.247970	36.303378	38.505214	40.864310	43.392290	49.005739
23	27.225144	36.617889	38.937030	41.430475	44.111847	46.995828	53.436141
24	28.630521	39.082604	41.689196	44.501999	47.537998	50.815577	58.176671
25	30.063024	41.645908	44.565210	47.727099	51.152588	54.864512	63.240138
26	31.513969	44.311745	47.570645	51.113454	54.965981	59.156383	68.676470
27	32.986678	47.084214	50.711324	54.669126	58.984109	63.705766	74.483823
28	34.481479	49.967583	53.993333	58.402583	63.233510	68.528112	80.697691
29	35.998701	52.966286	57.423033	62.322712	67.711354	73.639798	87.346529
30	37.538681	56.084938	61.007070	66.438848	72.435478	79.058186	94.460786
n	8.0%	9.0%	10.0%	12.0%	14.0%	16.0%	18.0%
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	2.080000	2.090000	2.100000	2.120000	2.140000	2.160000	2.180000
3	3.246400	3.278100	3.310000	3.374400	3.439600	3.505600	3.572400
4	4.506112	4.573124	4.641000	4.779328	4.921144	5.066496	5.215432
5	5.866601	5.984711	6.105100	6.352847	6.610104	6.877135	7.154210
6	7.335929	7.523335	7.715610	8.115189	8.535519	8.977477	9.441968
7	8.922803	9.200435	9.487171	10.089012	10.730491	11.413873	12.141522
8	10.636628	11.028474	11.435888	12.299693	13.232760	14.240093	15.326996
9	12.487558	13.021036	13.579477	14.775656	16.085347	17.518508	19.085855
10	14.486562	15.192930	15.937425	17.548735	19.337295	21.321469	23.521309
11	16.645487	17.560293	18.531167	20.654583	23.044516	25.732904	28.755144
12	18.977126	20.140720	21.384284	24.133133	27.270749	30.850169	34.931070
13	21.495297	22.953385	24.522712	28.029109	32.088654	36.786196	42.218663
14	24.214920	26.019189	27.974983	32.392602	37.581065	43.671987	50.818022
15	27.152114	29.360916	31.722482	37.279715	43.842414	51.659050	60.965266
16	30.324283	33.003399	35.949730	42.753280	50.980352	60.925026	72.930114
17	33.750226	36.973705	40.544703	48.883674	59.117681	71.673030	87.068036
18	37.450244	41.301338	45.599173	55.749715	68.394066	84.140715	103.740283
19	41.446263	46.018458	51.159909	63.439681	78.962235	98.603230	123.413534
20	45.761964	51.160120	57.274999	72.052442	91.024928	115.379747	146.627970
21	50.429221	56.764530	64.002499	81.698736	104.708418	134.840506	174.021005
22	55.456755	62.873338	71.402749	92.502584	120.435996	157.414987	206.344785
23	60.893296	69.531939	79.543024	104.602894	138.297035	183.601385	244.486847
24	66.764759	76.789813	88.497327	118.155241	158.658620	213.977607	289.494479
25	73.105940	84.700896	98.347059	133.333870	181.870827	249.214024	342.603486
26	79.954415	93.323977	109.181765	150.333934	208.332743	290.088267	405.272113
27	87.350768	102.723135	121.099492	169.374007	238.499327	337.502390	479.221093
28	95.336830	112.968217	134.209936	190.698887	272.889233	392.502773	566.480890
29	103.965936	124.135356	148.630930	214.582754	312.093725	456.303216	669.447450
30	113.283211	136.307539	164.494023	241.332684	356.786847	530.311731	790.9479

جدول ۲- ارزش فعلی سالواره یک ریالی که در پایان هر سال دریافت یا پرداخت می‌شود

n	1.5%	4.0%	4.5%	5.0%	5.5%	6.0%	7.0%
1	0.985222	0.961538	0.956938	0.952381	0.947867	0.943396	0.934579
2	1.955883	1.886095	1.872668	1.859410	1.846320	1.833393	1.808018
3	2.912200	2.775091	2.748964	2.723248	2.697933	2.673012	2.624316
4	3.854385	3.629895	3.587526	3.545951	3.505150	3.465106	3.387211
5	4.782645	4.451822	4.389977	4.329477	4.270284	4.212364	4.100197
6	5.697187	5.242137	5.157872	5.075692	4.995530	4.917324	4.766540
7	6.598214	6.002055	5.892701	5.786373	5.682467	5.582381	5.389289
8	7.483925	6.732745	6.595886	6.463213	6.334566	6.209794	5.971299
9	8.360517	7.435332	7.268790	7.107822	6.952195	6.801692	6.515232
10	9.222185	8.110896	7.912718	7.721735	7.537626	7.360087	7.023582
11	10.071118	8.760477	8.528917	8.306414	8.092536	7.886875	7.498674
12	10.907505	9.385074	9.118561	8.863252	8.618518	8.383844	7.942686
13	11.731532	9.985648	9.682852	9.393573	9.117079	8.852683	8.357651
14	12.543382	10.563123	10.222825	9.898641	9.589648	9.294984	8.745468
15	13.343233	11.118387	10.739546	10.379658	10.032581	9.712249	9.107914
16	14.131264	11.652296	11.234015	10.837770	10.462162	10.105895	9.446649
17	14.907649	12.165669	11.707191	11.274066	10.864609	10.477260	9.763223
18	15.672561	12.659297	12.159992	11.689587	11.246074	10.827603	10.059087
19	16.426168	13.133939	12.593294	12.085321	11.607654	11.158116	10.335595
20	17.166639	13.590326	13.007936	12.462210	11.950382	11.469921	10.594014
21	17.900137	14.029160	13.404724	12.821153	12.275244	11.764077	10.835527
22	18.620824	14.451115	13.781425	13.163003	12.583170	12.041582	11.061240
23	19.330861	14.856842	14.147775	13.488574	12.875042	12.303379	11.272187
24	20.030405	15.246963	14.495478	13.798642	13.151609	12.550358	11.469334
25	20.719611	15.622080	14.828209	14.093945	13.413933	12.783356	11.653583
26	21.398632	15.982769	15.146611	14.375185	13.662495	13.003166	11.825779
27	22.067617	16.329586	15.451303	14.643034	13.898100	13.210534	11.986709
28	22.726717	16.663063	15.742874	14.898127	14.121422	13.406164	12.137111
29	23.376076	16.983715	16.021889	15.141074	14.333101	13.590721	12.277674
30	24.015838	17.292033	16.288689	15.372451	14.533745	13.764831	12.409041

  

n	8.0%	9.0%	10.0%	12.0%	14.0%	16.0%	18.0%
1	0.925926	0.917431	0.909091	0.892857	0.877193	0.862069	0.847458
2	1.783265	1.759111	1.735537	1.690051	1.646661	1.605232	1.565642
3	2.577097	2.531295	2.486852	2.401831	2.321632	2.245890	2.174273
4	3.312127	3.239720	3.169865	3.037349	2.913712	2.798181	2.690062
5	3.992710	3.889651	3.790787	3.604776	3.433081	3.274294	3.127171
6	4.622850	4.485919	4.355261	4.111407	3.888668	3.684736	3.497603
7	5.206370	5.032953	4.868419	4.563757	4.288305	4.038565	3.811528
8	5.746639	5.534819	5.334926	4.967640	4.638864	4.343591	4.077566
9	6.246888	5.995247	5.759024	5.328250	4.946372	4.606544	4.303022
10	6.710081	6.417658	6.144567	5.650223	5.216116	4.833227	4.494086
11	7.138964	6.805191	6.495061	5.937699	5.452733	5.028644	4.656005
12	7.536078	7.160725	6.813692	6.194374	5.660292	5.197107	4.793225
13	7.903776	7.486904	7.103356	6.423548	5.842362	5.342334	4.909513
14	8.244237	7.786150	7.366687	6.628168	6.002026	5.467529	5.008062
15	8.559479	8.060688	7.606080	6.810864	6.142168	5.575456	5.091578
16	8.851369	8.312558	7.823709	6.973986	6.265090	5.668497	5.162354
17	9.116138	8.543631	8.021553	7.119630	6.372859	5.748704	5.222334
18	9.371887	8.755625	8.201412	7.249670	6.467420	5.817848	5.273164
19	9.603599	8.950115	8.364920	7.365777	6.550369	5.877455	5.316241
20	9.818147	9.128546	8.513564	7.469444	6.623131	5.928941	5.352746
21	10.016803	9.292244	8.648694	7.562003	6.686957	5.973139	5.383683
22	10.200744	9.442425	8.771540	7.644646	6.742944	6.011326	5.409901
23	10.371059	9.580207	8.883218	7.718434	6.792056	6.044247	5.432120
24	10.528758	9.706612	8.984744	7.784316	6.835137	6.072627	5.450949
25	10.674776	9.822580	9.077040	7.843139	6.872927	6.097092	5.466906
26	10.809978	9.928972	9.160945	7.895660	6.906077	6.118183	5.480429
27	10.935165	10.026580	9.237223	7.942554	6.935155	6.136364	5.491899
28	11.051078	10.116128	9.306567	7.984423	6.960662	6.152038	5.501601
29	11.158406	10.198293	9.369606	8.021806	6.983037	6.165550	5.509831
30	11.257783	10.273654	9.426914	8.055184	7.002664	6.177198	5.516806

جدول ۳- ارزش فعلی اقساط مساوی یک ریالی را نشان می‌دهد که در ابتدای هر

سال دریافت یا پرداخت می‌شود

n	1.5%	4.0%	4.5%	5.0%	5.5%	6.0%	7.0%
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	1.985222	1.961538	1.956938	1.952381	1.947867	1.943396	1.934579
3	2.955883	2.886095	2.872668	2.859410	2.846320	2.833393	2.808018
4	3.912200	3.775091	3.748964	3.723248	3.697933	3.673012	3.624316
5	4.854385	4.629895	4.587526	4.545951	4.505150	4.465106	4.387211
6	5.782645	5.451822	5.389977	5.329477	5.270284	5.212364	5.100197
7	6.697187	6.242137	6.157872	6.075692	5.995530	5.917324	5.766540
8	7.598214	7.002055	6.892701	6.786373	6.682967	6.582381	6.389289
9	8.485925	7.732745	7.595886	7.463213	7.334566	7.209794	6.971299
10	9.360517	8.435332	8.268790	8.107822	7.952195	7.801692	7.515232
11	10.222185	9.110896	8.912718	8.721735	8.537626	8.360087	8.023582
12	11.071118	9.760477	9.528917	9.306414	9.092536	8.886875	8.493674
13	11.907505	10.385074	10.118581	9.863252	9.618518	9.383844	8.942686
14	12.731532	10.985648	10.682852	10.393573	10.117079	9.852693	9.357651
15	13.543382	11.563123	11.222825	10.898641	10.589648	10.294984	9.745468
16	14.343233	12.118387	11.739546	11.379658	11.037581	10.712249	10.107914
17	15.131264	12.652296	12.234015	11.837770	11.462162	11.105895	10.446649
18	15.907649	13.165669	12.702191	12.274066	11.864609	11.477260	10.763223
19	16.672561	13.659297	13.159992	12.689587	12.246074	11.827603	11.059087
20	17.426168	14.133939	13.593294	13.085521	12.607654	12.158116	11.335595
21	18.168639	14.590326	14.007936	13.462210	12.950382	12.469921	11.594014
22	18.900137	15.029160	14.404724	13.821153	13.275244	12.764077	11.835527
23	19.620824	15.451115	14.784425	14.163003	13.583170	13.041582	12.061240
24	20.330861	15.856842	15.147725	14.488574	13.875042	13.303379	12.272187
25	21.030405	16.246963	15.495478	14.798642	14.151699	13.550358	12.469334
26	21.719611	16.622080	15.828209	15.093945	14.413933	13.783356	12.653583
27	22.398632	16.982769	16.146611	15.375185	14.662495	14.003166	12.825779
28	23.067617	17.329586	16.451303	15.643034	14.898100	14.210534	12.986709
29	23.726717	17.663063	16.742874	15.898127	15.121422	14.406164	13.137111
30	24.376076	17.983715	17.021889	16.141074	15.333101	14.590721	13.276764

  

n	8.0%	9.0%	10.0%	12.0%	14.0%	16.0%	18.0%
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	1.925926	1.917431	1.909091	1.892857	1.877193	1.862069	1.847458
3	2.783265	2.759111	2.735537	2.690051	2.646661	2.605232	2.565642
4	3.577097	3.531295	3.486852	3.401831	3.321632	3.245890	3.174273
5	4.312127	4.239720	4.169865	4.037349	3.913712	3.798181	3.690062
6	4.992710	4.889651	4.790787	4.604776	4.433081	4.274294	4.127171
7	5.622880	5.485919	5.355261	5.111407	4.888668	4.684736	4.497603
8	6.206370	6.032953	5.868419	5.563757	5.288305	5.038565	4.811528
9	6.746639	6.534819	6.334926	5.967640	5.638864	5.343591	5.077566
10	7.246888	6.995247	6.759024	6.328250	5.946372	5.605444	5.303022
11	7.710081	7.417658	7.144567	6.650223	6.216116	5.833227	5.494086
12	8.138964	7.805191	7.495061	6.937699	6.452733	6.028644	5.656005
13	8.536078	8.160725	7.813692	7.194374	6.660292	6.197107	5.793225
14	8.903776	8.486904	8.103356	7.423548	6.842362	6.342334	5.909513
15	9.244237	8.786150	8.366687	7.628168	7.002072	6.467529	6.008062
16	9.559479	9.060688	8.606080	7.810864	7.142168	6.575456	6.091578
17	9.851369	9.312558	8.823709	7.973986	7.265060	6.668497	6.162354
18	10.121638	9.543631	9.021553	8.119630	7.372859	6.748704	6.222334
19	10.371887	9.755625	9.201412	8.249670	7.467420	6.817848	6.273164
20	10.603599	9.950115	9.364920	8.365777	7.550369	6.877455	6.316241
21	10.818147	10.128546	9.513564	8.469444	7.623131	6.928841	6.352746
22	11.016803	10.292244	9.648694	8.562003	7.686957	6.973139	6.383683
23	11.200744	10.442425	9.771540	8.644646	7.742944	7.011326	6.409901
24	11.371059	10.580207	9.883218	8.718434	7.792056	7.044247	6.432120
25	11.528758	10.706612	9.984744	8.784316	7.835137	7.072627	6.450949
26	11.674776	10.822580	10.077040	8.843139	7.872927	7.097092	6.466906
27	11.809978	10.928972	10.160945	8.895660	7.906077	7.118183	6.480429
28	11.935165	11.026580	10.237223	8.942554	7.935155	7.136364	6.491889
29	12.051078	11.116128	10.306567	8.984423	7.960662	7.152038	6.501601
30	12.158406	11.198283	10.369606	9.021806	7.983037	7.165550	6.509831

## فهرست منابع و مآخذ

- اصغریور، محمدجواد، برنامهریزی خطی، دانشگاه الزهراء، ۱۳۶۳
- پترویچ دوموریاد، الکساندر، در قلمرو ریاضیات، پرویز شهریاری (مترجم) امیرکبیر، ۱۳۴۸
- تقوی، مهدی، مقدمه‌ای بر تجزیه و تحلیل اقتصاد میکرو، مؤسسه‌ی عالی علوم سیاسی و امور حزبی، ۱۳۵۴
- جلیلی، میرزا، فرشید مین‌باشیان، ریاضیات جدید، شرکت چاپ و نشر ایران، ۱۳۶۷
- دانش نارونی، غلامرضا، میرزا جلیلی، ریاضیات جدید، شرکت چاپ و نشر ایران، ۱۳۷۲
- رودلف مک‌شین، آن‌کاتلر، روش سریع تراختنبرگ در حساب، محمد باقری، (مترجم) دانشمند، ۱۳۷۱
- قربانی، ابوالقاسم، جبر، چاپخانه‌ی آرین، ۱۳۶۶
- مصاحب، غلامحسین، تئوری مقدماتی اعداد، سروش، ۱۳۵۸
- مولوی، رضا، نظریه و مسائل ماتریس‌ها، انتشارات میلاد، تهران، ۱۳۷۴
- وبر، اجین، تحلیل‌های ریاضی و کاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی، حسین علی‌پور کاظمی، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ۱۳۶۷
- حافظی نسب، مصطفی، ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت، نشر آروین، ۱۳۷۷
- جوادی، حسین، مصطفی، حافظی نسب، ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت، انتشارات اندرز، ۱۳۷۵
- Gosling, "maths for Business and Finance", 1995, Pascal Press

