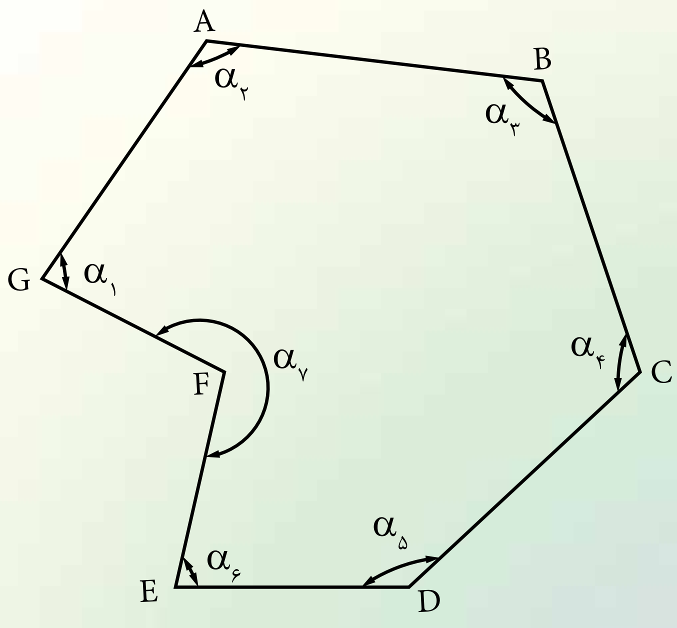
فصل چهارم

محاسبهٔ زاویه



$$\Sigma\alpha_i = (n - ۲)۱۸۰^\circ$$

هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- زوایای مثلث را محاسبه کند.

۲- زوایای داخلی یک چندضلعی را محاسبه کند.

۴-۱ محاسبهٔ زوایای مثلث

۴-۱-۱- محاسبهٔ زوایای مثلث قائم‌الزاویه

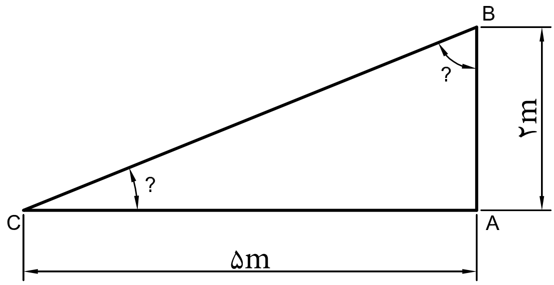
هرگاه در مثلث قائم‌الزاویه دو ضلع معلوم باشد، با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی می‌توان زوایای مثلث را محاسبه نمود.

مثال ۱: در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۱ اندازهٔ زاویه‌های **B** و **C** چند درجه است؟

$$\tan \hat{C} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \tan^{-۱}(۰/۴)$$

$$\Rightarrow \hat{C} = ۲۱/۸۰^\circ$$



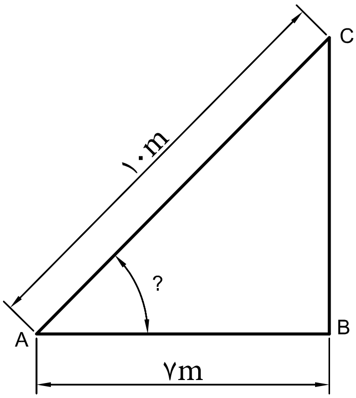
شکل ۱

$$\tan \hat{B} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \tan^{-۱}(۲/۵) \Rightarrow \hat{B} = ۶۸/۲۰^\circ$$

مثال ۲: در شکل ۲ اندازهٔ زاویهٔ **A** چند درجه است؟

$$\cos A = \frac{۷}{۱۰} = ۰/۷ \Rightarrow A = ۴۵^\circ ۳۴'$$



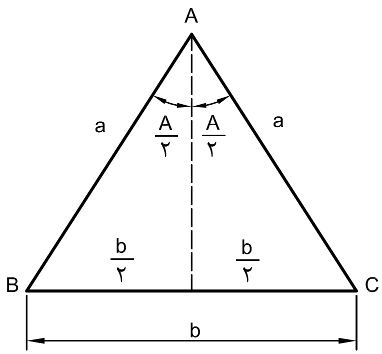
شکل ۲

۴-۱-۲- محاسبهٔ زوایای مثلث متساوی‌الساقین:

در مثلث متساوی‌الساقین **ABC** (شکل ۳) ارتفاع نظیر رأس **A**، نیم‌ساز زاویهٔ **A** و عمودمنصف ضلع مقابل به زاویهٔ **A** بر هم منطبق می‌باشند؛ بنابراین با توجه به روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin(\frac{A}{۲}) = \frac{\frac{b}{۲}}{a} = \frac{b}{۲a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\frac{A}{۲}) = \frac{b}{۲a}}$$

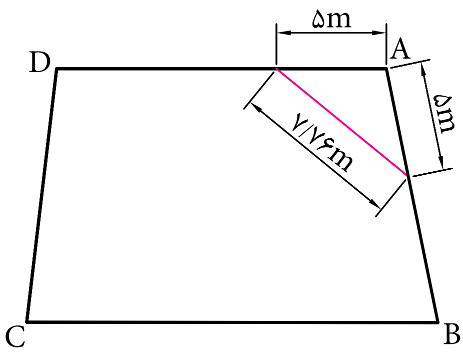


شکل ۳

با استفاده از رابطهٔ فوق مقدار زاویهٔ $(\frac{A}{۲})$ را محاسبه نموده و سپس زاویهٔ **A** را محاسبه می‌نمائیم. با توجه به این‌که زوایای **B** و **C** با هم برابرند، خواهیم داشت:

$$A + B + C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A + ۲B = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \boxed{B = C = \frac{۱۸۰^\circ - A}{۲}}$$

مثال: برای اندازه‌گیری زاویهٔ **A** در گوشهٔ یک زمین، دو طول مساوی ۵ متری در روی دو ضلع آن جدا کرده و سپس ضلع سوم آن‌را اندازه‌گیری نموده‌ایم (شکل ۴). اندازهٔ زاویهٔ **A** چند درجه است؟



شکل ۴

حل:

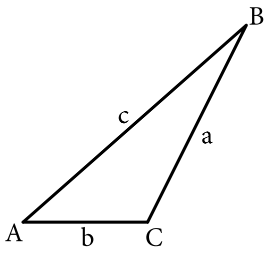
$$\sin\frac{A}{۲}=\frac{b}{۲a}=\frac{۷/۷۶}{۲\times ۵}=۰/۷۷۶\Rightarrow\frac{A}{۲}=۵۰^\circ ۵۴'\Rightarrow A=۱۰۱^\circ ۴۸'$$

۴-۱-۳- محاسبه‌ی زوایای داخلی مثلث غیرمشخص

الف) رابطه‌ی کسینوس‌ها:

هر گاه سه ضلع مثلثی معلوم باشد با استفاده از رابطه کسینوس‌ها می‌توان زوایای مثلث را محاسبه نمود.

در مثلث **ABC** شکل ۵ داریم:



شکل ۵

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$$
$$b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos B$$
$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C$$

با استفاده از روابط بالا که به رابطهٔ کسینوس‌ها معروف است، می‌توانیم زوایای مثلث را به‌صورت زیر بنویسیم:

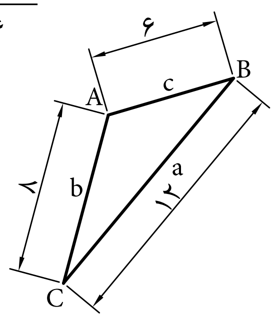
$$\boxed{\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}\\ \cos B &= \frac{a^۲+c^۲-b^۲}{۲ac}\\ \cos C &= \frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲ab}\end{aligned}}$$

مثال ۱: زوایای مثلث ABC (شکل ۷) چند درجه است؟

حل:

$$\cos A = \frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc} = \frac{۸^۲+۶^۲-۱۲^۲}{۲\times۸\times۶} = \frac{۶۴+۳۶-۱۴۴}{۲\times۸\times۶}$$

$$\cos A = -۰/۴۵۸۳ \Rightarrow A \simeq ۱۱۷^\circ ۱۷'$$



شکل ۶

برای زاویهٔ **B** داریم:

$$\cos B = \frac{a^۲+c^۲-b^۲}{۲ac} = \frac{۱۲^۲+۶^۲-۸^۲}{۲\times۱۲\times۶} = \frac{۱۴۴+۳۶-۶۴}{۲\times۱۲\times۶} = ۰/۸۰۵۶ \Rightarrow B = ۳۶^\circ ۲۰'$$

برای زاویهٔ **C** داریم:

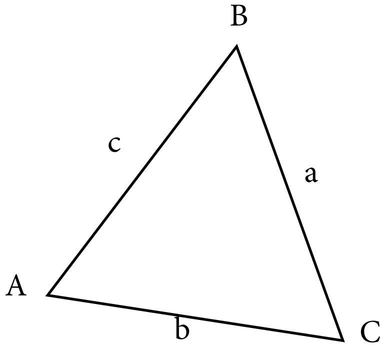
$$\cos C = \frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲ab} = \frac{۱۲^۲+۸^۲-۶^۲}{۲\times۱۲\times۸} = \frac{۱۴۴+۶۴-۳۶}{۲\times۱۲\times۸} = ۰/۸۹۵۸ \Rightarrow C \simeq ۲۶^\circ ۲۳'$$

برای اطمینان از درستی محاسبات، زوایای به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم که باید جمع آن‌ها ۱۸۰° شود.

$$A+B+C = ۱۱۷^\circ ۱۷' + ۳۶^\circ ۲۰' + ۲۶^\circ ۲۳' = ۱۸۰^\circ$$

ب) رابطه سینوس‌ها:

هر گاه دو ضلع و زاویه مقابل به یکی از آن‌ها در هر مثلث معلوم باشد با استفاده از رابطه سینوس‌ها می‌توان زوایای دیگر مثلث را محاسبه کرد.



شکل ۷

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}$$

مثال۲: در مثلث ABC شکل ۷ اگر $a=۱۵m$ **و** $b=۱۰m$ **و** $A=۶۰^\circ$ **باشد، زوایای B و C را به‌دست آورید.**

حل:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{۱۵}{\sin ۶۰}=\frac{۱۰}{\sin B}\Rightarrow \sin B=\frac{۱۰\times \sin ۶۰}{۱۵}$$

$$\Rightarrow \sin B=۰/۵۷۷\Rightarrow B=\sin^{-۱}(۰/۵۷۷)$$

$$\Rightarrow \boxed{B=۳۵/۲۶^\circ}$$

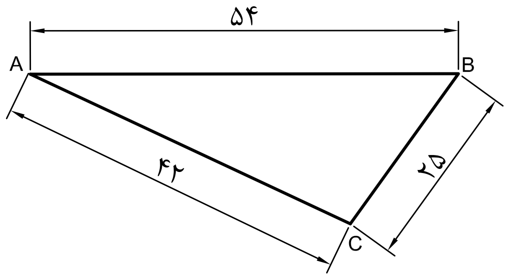
برای محاسبه زاویه C کافی‌است مجموع زوایای A و B را از ۱۸۰° **کم نمائیم.**

$$\hat{C}=۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B})\Rightarrow \hat{C}=۱۸۰^\circ-(۶۰+۳۵/۲۶)$$

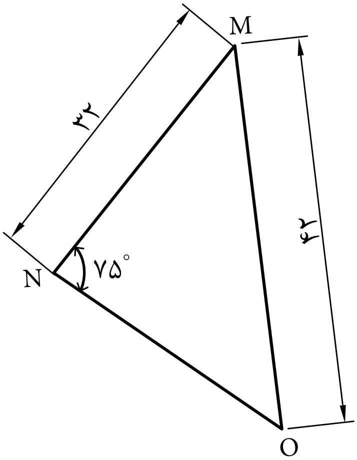
$$\Rightarrow \boxed{\hat{C}=۸۴/۷۴^\circ}$$

تمرین:

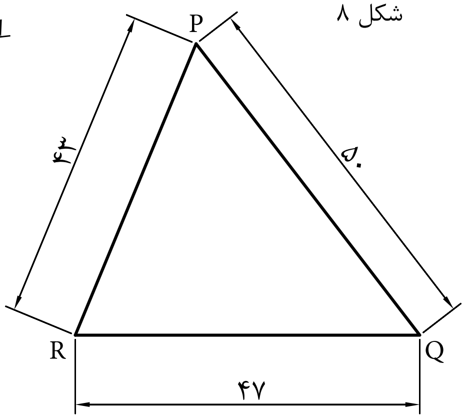
زوایای مثلث‌های شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰ را محاسبه کنید.



شکل ۸



شکل ۹



شکل ۱۰

۲-۴ محاسبه زوایای داخلی یک چندضلعی منتظم

۴-۲-۱- مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی برابر است با: $(n-۲)۱۸۰^\circ$

مثال: مجموع زوایای داخلی یک ۵ ضلعی برابر است: $(۵-۲)\times ۱۸۰^\circ = ۵۴۰^\circ$

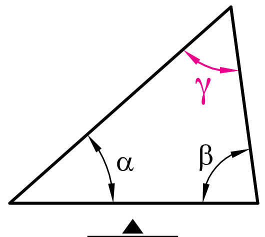
۴-۲-۲- اندازهٔ هر زاویهٔ یک n ضلعی منتظم عبارت‌است از: $\frac{n-۲}{n}\times ۱۸۰^\circ$

مثال: اندازهٔ هر زاویهٔ یک ۸ ضلعی منتظم عبارت‌است از: $\frac{۸-۲}{۸}\times ۱۸۰^\circ = ۱۳۵^\circ$

تمرین:

۱- در مثلث شکل ۱۱ مقدار زاویهٔ γ را به‌دست آورید.

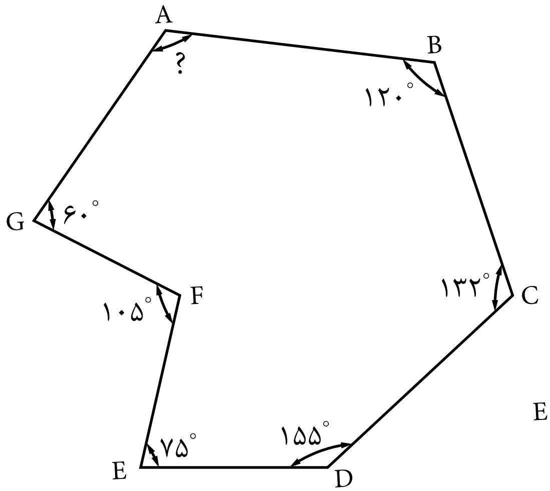
(α=۲۴°۱۸′ و β=۴۷°)



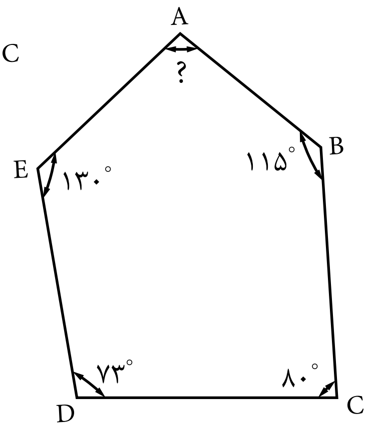
شکل ۱۱

۲- زاویهٔ بین دو ضلع را در شش‌ضلعی منتظم به‌دست آورید.

۳- در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ مقدار زاویهٔ A را محاسبه نمائید.



شکل ۱۲



شکل ۱۳