فصل
سوم

روش‌های محاسبهٔ طول

هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- رابطهٔ فیثاغورث را بشناسد و کاربرد آن‌را بداند.

۲- طول‌ها را با استفاده از نسبت تشابه شکل‌ها به‌دست آورد.

۳- طول‌ها را با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی محاسبه نماید.

۴- با استفاده از روابط سینوس‌ها و کسینوس‌ها در مثلث غیر مشخص طول‌ها را محاسبه کند.

۵- محیط اشکال هندسی چندضلعی و دایره را به‌دست آورد.

۳-۱ محاسبهٔ طول با استفاده از رابطهٔ فیثاغورث

هرگاه دو ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای معلوم باشد ضلع سوم را می‌توان به کمک رابطهٔ فیثاغورث محاسبه نمود.

قضیهٔ فیثاغورث

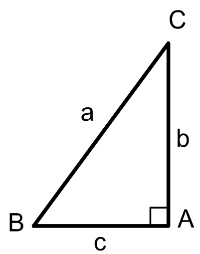
در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر

در تعریف فوق منظور از وتر، ضلع مقابل به زاویهٔ قائمه می‌باشد.

مثال: در مثلث **ABC** شکل ۱ زاویهٔ $A=۹۰^\circ$ است.

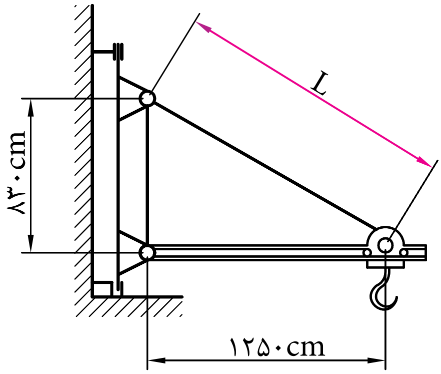
پس داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲$$



شکل ۱

مثال ۱: در حماله مطابق شکل ۲ اندازهٔ L چه‌قدر است؟



شکل ۲

طبق قضیهٔ فیثاغورث داریم:

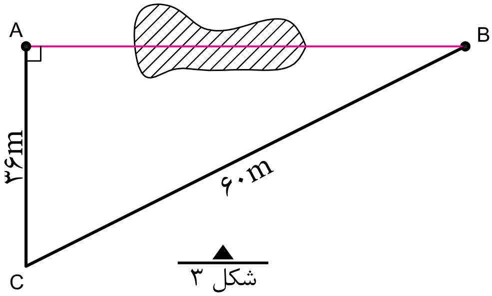
$$L^۲ = ۱۲۵۰^۲ + ۸۳۰^۲$$

$$L^۲ = ۱۵۶۲۵۰۰ + ۶۸۸۹۰۰ = ۲۲۵۱۴۰۰$$

$$L = \sqrt{۲۲۵۱۴۰۰}$$

$$L = ۱۵۰۰/۴۷ \quad cm$$

مثال ۲: می‌خواهیم فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را که بین آن‌ها مانعی وجود دارد تعیین کنیم. برای این کار، مطابق شکل ۳ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را تشکیل داده و اضلاع AC و BC را اندازه‌گیری کرده‌ایم. فاصلهٔ AB چند متر است؟



شکل ۳

طبق رابطهٔ فیثاغورث داریم:

$$(BC)^۲ = (AC)^۲ + (AB)^۲$$

$$۶۰^۲ = ۳۶^۲ + (AB)^۲ \Rightarrow (AB)^۲ = ۶۰^۲ - ۳۶^۲$$

$$(AB)^۲ = ۲۳۰۴$$

$$AB = \sqrt{۲۳۰۴} \Rightarrow AB = ۴۸m$$

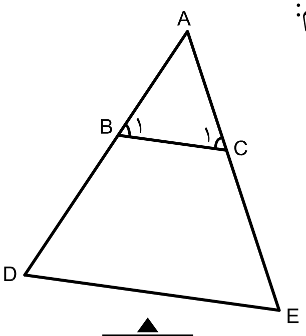
۳-۲ محاسبهٔ طول با استفاده از نسبت تشابه شکل‌های هندسی

تعریف نسبت تشابه

> در دو شکل متشابه، نسبت بین اضلاع متناظر عدد ثابتی است که به آن نسبت تشابه می‌گویند و آن‌را با حرف «K» نشان می‌دهند.

نکته: هر گاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن‌دو مثلث متشابه بوده که یکی از حالت‌های تشابه دو مثلث می‌باشد که در محاسبات فنی ساختمان کاربرد زیادی دارد.

مثلاً در شکل (۴) اگر **BC** موازی **DC** باشد لذا زاویهٔ B_1 با **D** و زاویهٔ C_1 با **E** برابر می‌باشند و دو مثلث **ABC** و **ADC** متشابه خواهند بود و داریم:

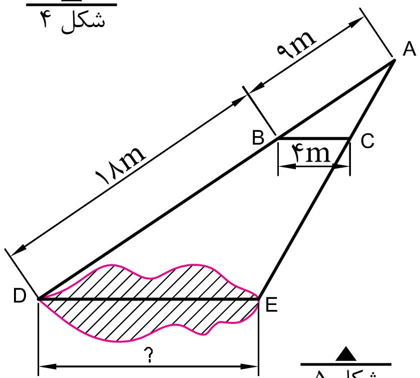


شکل ۴

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}=K$$

مثال ۱: در شکل ۵، خط **BC** موازی ضلع **DE** است؛ یعنی دو مثلث **ABC** و **ADE** متشابه هستند و داریم: AB=۹ متر، BD=۱۸ متر و BC=۴ متر، طول ضلع **DE** چند متر است؟

حل: طبق تعریف نسبت تشابه داریم:



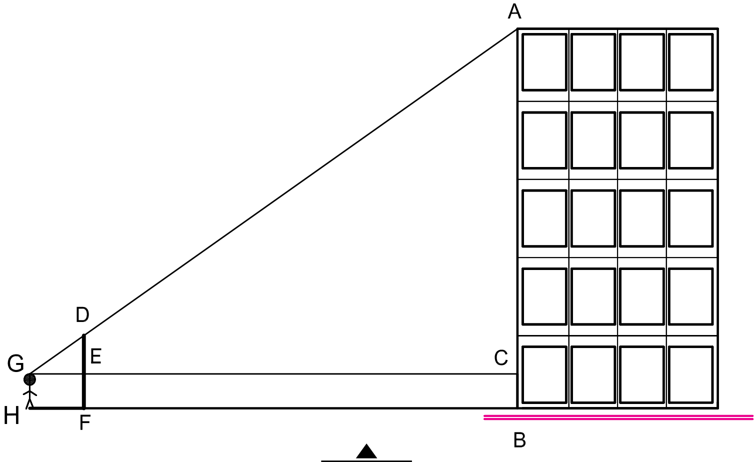
شکل ۵

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$$

$$\frac{۹}{۹+۱۸}=\frac{۴}{DE}\Rightarrow DE=\frac{۴\times(۹+۱۸)}{۹}\Rightarrow \boxed{DE=۱۲m}$$

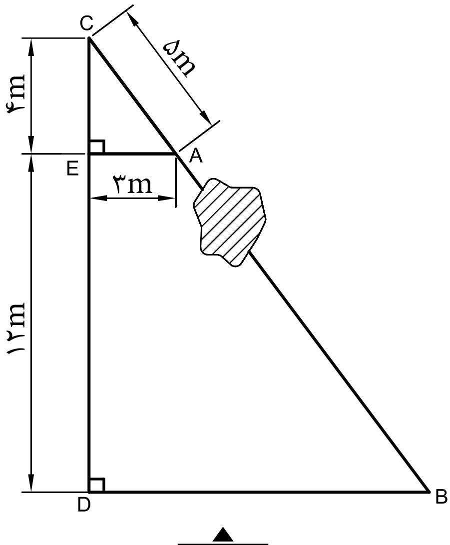
تمرین:

۱- برای تعیین ارتفاع یک ساختمان، از یک چوب به طول ۳ متر $(DF = ۳m)$ مطابق شکل ۶ استفاده شده است. در صورتی که فاصلهٔ چشم ناظر از زمین برابر ۱/۷۰m $(GH = ۱/۷۰m)$ و $HF = ۲m$ و $FB = ۱۸m$ باشد، ارتفاع ساختمان AB را بر حسب متر تعیین کنید.



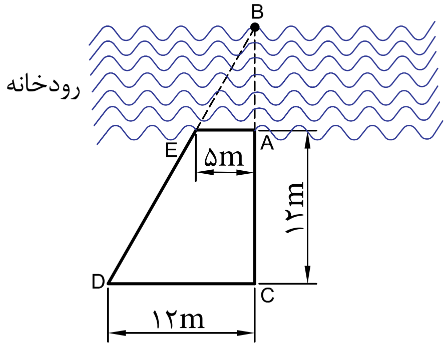
شکل ۶ - اصول ترسیم در یک نمای ساختمانی

۲- برای تعیین فاصلهٔ دو نقطهٔ B و A که مانعی بین آن‌ها وجود دارد، مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ACE و BCD را بنا کرده‌ایم. فاصلهٔ دو نقطهٔ B و A را بر حسب متر به‌دست آورید.



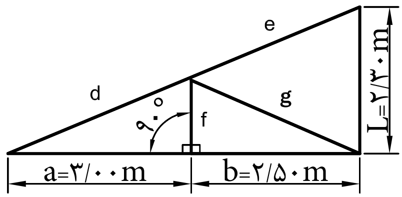
شکل ۷

۳- برای تعیین عرض یک رودخانه، طول‌های **DC** و **AC** و **AE** اندازه‌گیری شده‌اند. عرض رودخانه چند متر است؟



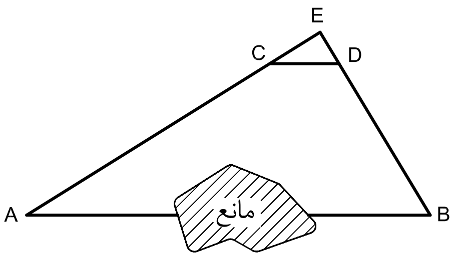
شکل ۸

۴- اندازهٔ طول عضوهای **d** ، **e** ، **f** و **g** را در حماله مطابق شکل ۱۰ به‌دست آورید.



شکل ۹

۵- برای تعیین فاصلهٔ دو نقطهٔ **A** و **B** که مانعی بین آن‌ها وجود دارد، مثلث دلخواه **ABE** را بنا کرده و طول اضلاع **AE** و **BE** را اندازه گرفته‌ایم (AE=۳۵m و BE=۲۰m). از طرفی، مثلث دیگری مانند **CED** را در نظر گرفته و طول اضلاع آن‌را اندازه‌گیری کرده‌ایم. (CE=۳/۵m و ED=۲m و CD=۴m). اگر **CD** موازی **AB** باشد فاصلهٔ نقاط **A** و **B** را بر حسب متر تعیین کنید.



شکل ۱۰

۳-۳ محاسبهٔ طول با استفاده از روابط مثلثاتی (نسبت‌های مثلثاتی)

۳-۳-۱- تعریف روابط اصلی مثلثاتی (نسبت‌های مثلثاتی):

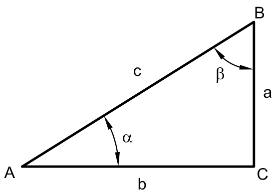
در هر مثلث قائم‌الزاویه، روابط اصلی مثلثاتی (نسبت‌های مثلثاتی) به‌صورت جدول ۴ تعریف می‌شود.

جدول ۴

tan = تانژانت = ضلع مقابل / ضلع مجاور	sin = سینوس = ضلع مقابل / وتر
cotan = کتانژانت = ضلع مجاور / ضلع مقابل	cos = کسینوس = ضلع مجاور / وتر

مثال: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC شکل ۱۱، روابط اصلی مثلثاتی برای زاویهٔ α چنین تعریف می‌شود:

$\cot\text{an}\,\alpha = \frac{b}{a}$	$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$



شکل ۱۱

آیا می‌دانید که ... (مطالعه آزاد)

اصطلاحات مثلثات مثل «سینوس و کسینوس و تانژانت» دقیقاً ترجمهٔ واژه‌هایی است که در نوشته‌های ریاضی‌دانان ایرانی و به‌خصوص کتاب «کشف‌القناعِ» خواجه نصیرالدین طوسی به‌کار رفته است. در واقع در هیچ زمینه‌ای از ریاضیاتِ محاسبه‌ای مثل حساب و جبر و مثلثات نمی‌توان قانون یا دستوری را یافت که به‌وسیلهٔ ریاضی‌دانان ایرانی کشف نشده باشد.

تمرین:

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC شکل ۱۱، روابط اصلی مثلثاتی را برای زاویهٔ β در جدول بنویسید.

$\sin\beta =$ ———	$\cos\beta =$ ———	$\tan\beta =$ ———	$\cot\text{an}\,\beta =$ ———

۳-۳-۲- مقادیر عددی نسبت‌های مثلثاتی:

همیشه مقادیر نسبت‌های مثلثاتی برای هر زاویهٔ معین، مقدار ثابتی است. در جدول ۵ مقدار عددی نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰° ، ۴۵° و ۶۰° را ملاحظه می‌کنید.

جدول ۵- نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰° ، ۴۵° و ۶۰°

زاویهٔ α / نسبت مثلثاتی	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sin α	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cos α	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
tan α	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cotan α	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

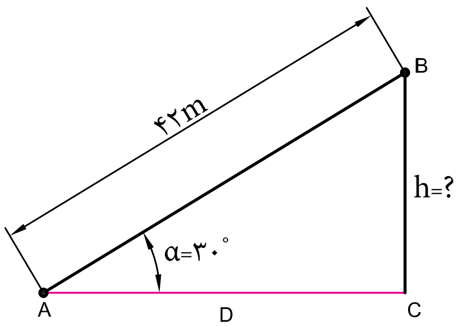
توجه: بهتر است اعداد جدول ۵ به‌خاطر سپرده شود و برای سایر زوایا، از ماشین‌های حساب استفاده گردد.

در مثلث قائم‌الزاویه هر گاه یک ضلع و یک زاویهٔ آن معلوم باشند به‌کمک نسبت‌های مثلثاتی می‌توان اندازهٔ اضلاع دیگر آن‌را به‌دست آورد.

۳-۳-۳- کاربرد نسبت‌های مثلثاتی

مثال ۱: در شکل ۱۲ ارتفاع h را محاسبه می‌کنیم:

برای شکل مورد نظر از رابطهٔ سینوس استفاده می‌نماییم (دلیل آن‌را توضیح دهید).



$$\sin\alpha = \frac{h}{۴۲}$$

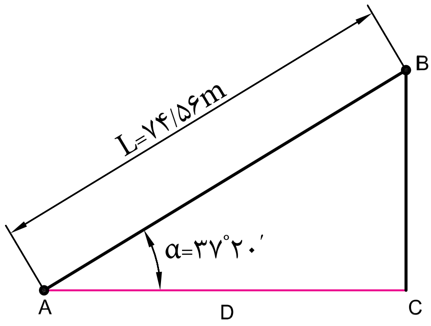
$$\sin ۳۰^\circ = \frac{h}{۴۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{h}{۴۲} \Rightarrow h = \frac{۴۲\times۱}{۲} = ۲۱$$

شکل ۱۲

مثال ۲: طول شیب‌دار $AB = ۷۴/۵۶m$ را در روی زمین اندازه‌گیری کرده‌ایم. در صورتی‌که زاویهٔ شیب $\alpha = ۳۷^\circ ۲۰'$ باشد، فاصلهٔ افقی بین **A** و **B** یعنی **D** چند متر است؟

حل: با توجه به شکل ۱۳ داریم:

$$\cos\alpha = \frac{D}{L} \Rightarrow D = L.\cos\alpha$$



شکل ۱۳

داریم:

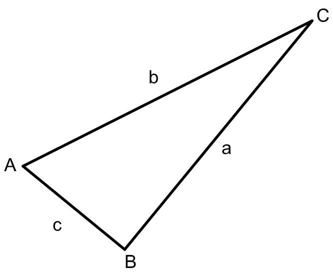
$$\cos\alpha = \cos ۳۷^\circ ۲۰' = ۰/۷۹۵۱$$

با جای‌گذاری آن‌ها در فرمول داریم:

$$D = ۷۴/۵۶m \times ۰/۷۹۵۱ = ۵۹/۲۸m$$

۳-۴ محاسبهٔ طول در مثلث غیرمشخص

۳-۴-۱- رابطهٔ سینوس‌ها: در هر مثلث غیرمشخص مانند شکل ۱۴ هرگاه دو زاویه و یک ضلع از مثلثی معلوم باشد، دو ضلع دیگر را می‌توان با استفاده از رابطهٔ سینوس‌ها که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، محاسبه نمود.



$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

شکل ۱۴

مثال ۱: در مثلث **ABC** (شکل ۱۴)، $a = ۴۵m$ طول و $\hat{A} = ۳۷^\circ$ و $\hat{B} = ۱۱۸^\circ$ است. طول **b** چند متر است؟

حل: رابطهٔ سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{۴۵m}{\sin ۳۷^\circ} = \frac{b}{\sin ۱۱۸^\circ}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sin ۱۱۸^\circ}{\sin ۳۷^\circ} \times ۴۵m = \frac{۰/۸۸۳۰}{۰/۶۰۱۸} \times ۴۵m$$

$$b = ۶۶/۰۲m$$

مثال ۲: در شکل ۱۵ اندازهٔ سه زاویه و طول یک ضلع مثلث، معلوم است. طول دو ضلع دیگر چقدر است؟

حل: رابطهٔ سینوس‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

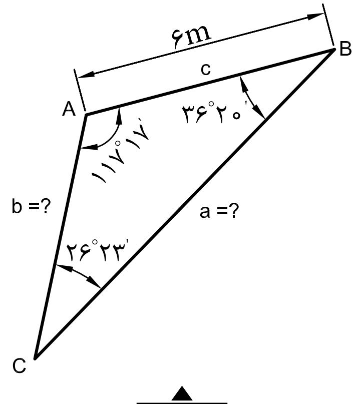
برای محاسبهٔ **a** داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a(\sin C) = c(\sin A)$$

$$a = \frac{\sin A}{\sin C} \times c \Rightarrow a = \frac{\sin ۱۱۷^\circ ۱۷'}{\sin ۲۶^\circ ۲۳'} \times ۶m$$

$$a = \frac{۰/۸۸۸۷۵}{۰/۴۴۴۳۷} \times ۶m \Rightarrow \boxed{a = ۱۲m}$$



شکل ۱۵

برای محاسبهٔ **b** داریم:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \quad \text{یا} \quad \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$$

از یکی از دو رابطهٔ فوق استفاده می‌کنیم:

$$b=\frac{\sin B}{\sin C}\times c$$

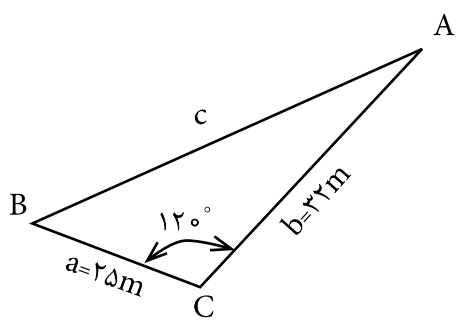
$$b=\frac{\sin ۳۶^\circ ۲۰'}{\sin ۳۶^\circ ۲۳'}\times ۶m=\frac{۰/۵۹۲۴۸}{۰/۴۴۴۳۷}\times ۶=۷/۹۹۹۷\Rightarrow b\simeq ۸m$$

۳-۴-۲- رابطهٔ کسینوس‌ها: در هر مثلث غیرمشخص مانند شکل ۱٤ اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها (**c** و **b** و $\hat{A}$) معلوم باشد، با استفاده از رابطهٔ کسینوس‌ها که به‌صورت زیر تعریف می‌شود می‌توان ضلع سوم مثلث یعنی **a** را محاسبه نمود.

$$\boxed{a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}}$$

مثال: در شکل ۱۶ ضلع **c** را به‌دست آورید.

حل: رابطهٔ کسینوس‌ها را با توجه به این که ضلع **c** مجهول می‌باشد به‌صورت زیر می‌نویسیم:



شکل ۱۶

$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\hat{C}$$

$$c^۲=۲۵^۲+۳۲^۲-۲\times ۲۵\times ۳۲\times \cos ۱۲۰^\circ$$

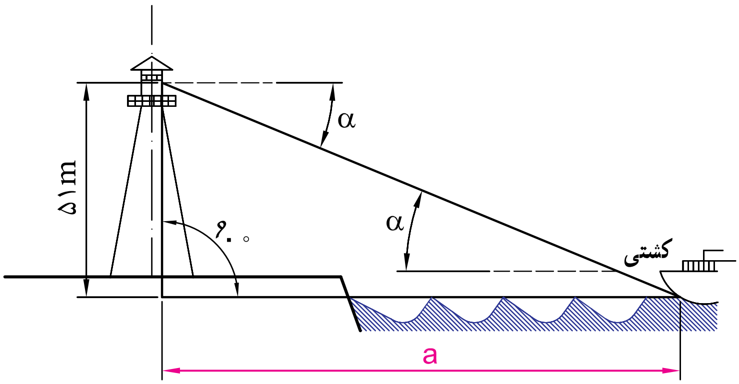
$$c۲=۲۴۴۹\Rightarrow c=\sqrt{۲۴۴۹}\Rightarrow \boxed{c=۴۹/۴۸}$$

تمرین:

۱- مقادیر نسبت‌های مثلثاتی (**cotan** و **tan** و **cos** و **sin**) را برای زوایای زیر به‌دست آورید:

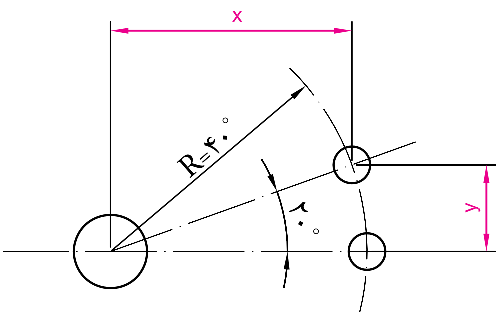
$15°20', 48°10', 38°50', 88°40', 75°30'$

۲- یک دیده‌بان از برجی به ارتفاع ۵۱ متر، نزدیک‌شدن یک کشتی را تحت زاویهٔ $4°50'$ مشاهده می‌کند. فاصلهٔ کشتی تا برج را (حدّ فاصل **a**) به متر حساب کنید.



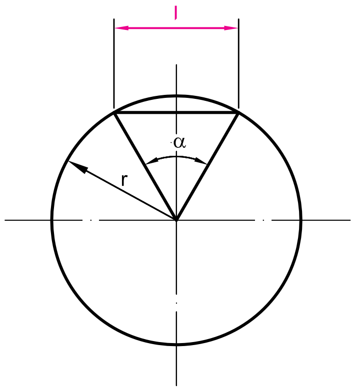
شکل ۱۷

۳- در قطعه‌ای مطابق شکل ۱۸ برای استقرار پین، سوراخ‌هایی ایجاد خواهد شد. مقادیر **x** و **y** را به‌دست آورید.



شکل ۱۸

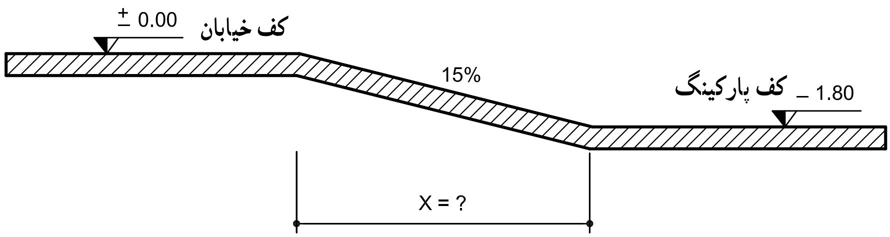
۵- رابطه‌ای برای محاسبهٔ طول «l» قطعه دایره، بر حسب شعاع دایره و زاویهٔ α بنویسید (شکل ۱۹).



شکل ۱۹

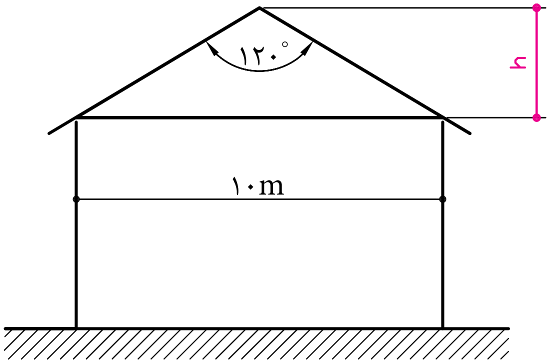
۶- کف پارکینگ یک ساختمان مسکونی، مطابق شکل ۲۰، ۱/۸۰ متر پایین‌تر از کف خیابان است. در صورتی‌که شیب رَمپ (شیب طولی راه) ۱۵ باشد، طول افقی رمپ باید چند متر باشد؟ (رَمپ، سطح شیب‌داری است که سطوحِ با اختلاف ارتفاع را به یکدیگر وصل می‌کند.)

شیب رَمپ: نسبت اختلاف ارتفاع را به طول افقیِ رَمپ، «شیب رمپ» می‌گویند.



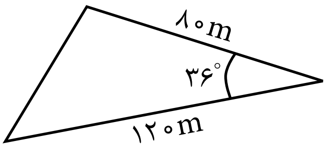
شکل ۲۰

۷- اندازهٔ طول h را در سقف شیب‌دار مطابق شکل ۲۱ به‌دست آورید.

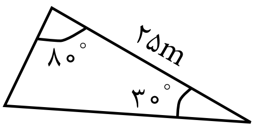


شکل ۲۱

۸- اضلاع مجهول مثلث‌های شکل‌های ۲۲ و ۲۳ را به‌دست آورید.



شکل ۲۲

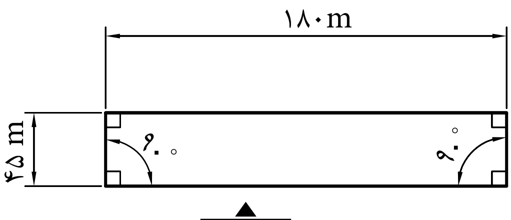


شکل ۲۳

۳-۵ محاسبهٔ محیط

۳-۵-۱- محیط چندضلعی‌ها (سه‌ضلعی، چهارضلعی، پنج‌ضلعی و ...) برابر است با مجموع اضلاع آن‌ها

مثال ۱: ابعاد زمینی مطابق شکل ۲۴ است. در صورتی که بخواهیم برای محصورکردن زمین از سیم‌خاردار استفاده کنیم و فاصلهٔ تیرک‌های چوبی سیم‌خاردار از هم ۳ متر باشد، چند عدد تیرک چوبی برای این کار لازم است؟ چنانچه از چهار ردیف سیم‌خاردار استفاده شود، طول سیم‌خاردار مصرفی چند متر است؟



شکل ۲۴

حل: الف -

۱- طول محیط چهارضلعی را حساب می‌کنیم:

$$L = ۱۸۰ + ۴۵ + ۱۸۰ + ۴۵ = ۴۵۰m$$

۲- طول محیط را تقسیم بر فاصلهٔ دو تیرک می‌کنیم:

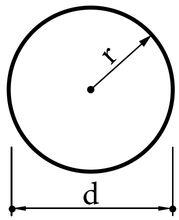
$$n = \frac{\text{طول کل (محیط)} \quad (m)}{\text{فاصلهٔ دو تیرک از هم} \ (m)} = \frac{۴۵۰}{۳} = ۱۵۰$$ تعداد تیرک لازم

ب -

۳- برای محاسبهٔ طول سیم‌خاردار، با توجه به این‌که چهار مرتبه به دور زمین می‌چرخد، به روش زیر عمل می‌کنیم:

طول سیم‌خاردار لازم $۴۵۰ \times ۴ = ۱۸۰۰m$

۳-۵-۲- محیط دایره به شعاع r برابر است با: $u = \pi d$ یا $u = ۲\pi r$

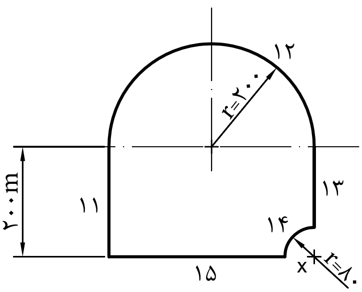


شکل ۲۵

مثال ۱: محیط دایره یه شعاع ۵ سانتی‌متر برابر است با:

$$u = ۲ \times ۳/۱۴ \times ۵cm = ۳۱/۴cm$$

مثال ۲: با استفاده از روش برش با گاز، قطعه‌ای مطابق شکل ۲۶ از ورق فولادی بریده خواهد شد؛ طول مسیر برش چند متر است؟ (اندازه‌ها بر حسب میلی‌متر است.)



شکل ۲۶

حل: منظور از طول مسیر برش، همان محیط قطعه است. برای به‌دست آوردن محیط قطعه، ابتدا محیط آن‌را به طول‌های $L_۱$ ، $L_۲$ ، $L_۳$ ، $L_۴$ و $L_۵$ تفکیک می‌کنیم؛ سپس طول هر یک از آن‌ها را محاسبه کرده و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$U = L_{۱} + L_{۲} + L_{۳} + L_{۴} + L_{۵}$$

$$L_{۱} = ۲۰۰mm$$

$$L_{۲} = \frac{d_{۲} \times \pi}{۲} = \frac{۴۰۰mm \times ۳/۱۴}{۲} = ۶۲۸mm$$

$$L_{۳} = ۲۰۰mm - ۸۰mm = ۱۲۰mm$$

$$L_{۴} = \frac{d_{۴} \times \pi}{۴} = \frac{۱۶۰mm \times ۳/۱۴}{۴} = ۱۲۵/۶mm$$

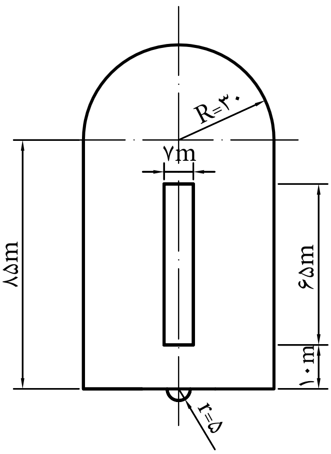
$$L_{۵} = ۴۰۰mm - ۸۰mm = ۳۲۰mm$$

$$U = ۲۰۰mm + ۶۲۸mm + ۱۲۵/۶mm + ۳۲۰mm = ۱۴۱۳/۶mm$$

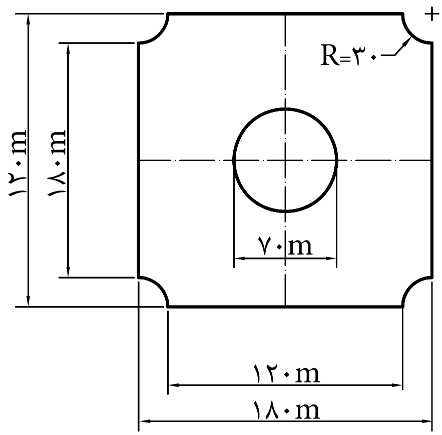
$$U = ۱/۴۱۴m$$

تمرین:

۱- محیط داخلی و خارجی شکل‌های ۲۷ و ۲۸ را با توجه به اندازه‌های داده‌شده محاسبه کنید. (اندازه‌ها بر حسب متر می‌باشد.)

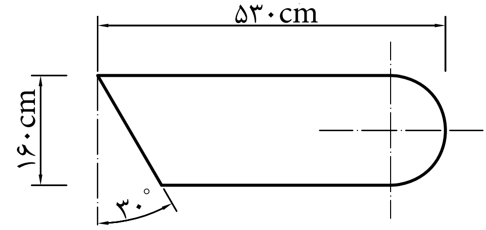


شکل ۲۷



شکل ۲۸

۲- محیط زیرسازی (فونداسیون) شکل ۲۹ را به‌دست آورید.



شکل ۲۹