

### مدارهای $R - L$ جریان متناوب

#### هدف های رفتاری

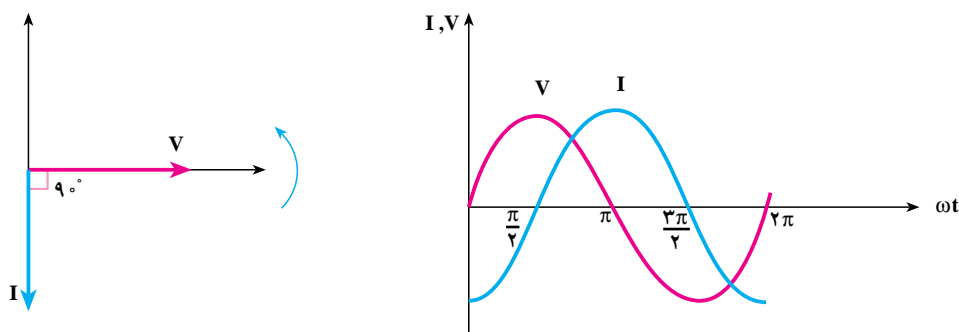
در پایان این فصل از هنرجو انتظار می رود :

- ۱- مقادیر جریان، ولتاژ، اختلاف فاز، مقاومت ظاهری، ضریب توان، توان های مؤثر، غیر مؤثر، ظاهری را در مدارهای  $R - L$  (سری و موازی) محاسبه کند.
- ۲- دیاگرام برداری ولتاژها را در مدارهای  $R - L$  سری و جریان ها را در مدارهای  $R - L$  موازی رسم کند.
- ۳- ضریب کیفیت مدارهای  $R - L$  سری و موازی را محاسبه کند.
- ۴- اثر تغییرات فرکانس را بر مقاومت ظاهری، جریان و ضریب قدرت در مدارهای  $R - L$  سری و موازی تشریح کند.
- ۵- منحنی های اثر تغییرات فرکانس بر روی پارامترهای امپدانس و جریان در مدارهای  $R - L$  سری و موازی را با استفاده از معادله آن و از طریق نقطه یابی رسم کند.
- ۶- معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای  $RL$  سری و موازی را به دست آورد.
- ۷- مدارهای  $RL$  سری را به موازی و بالعکس تبدیل کند.

#### ۱-۳- مقدمه

در سال گذشته، رفتار مقاومت اهمی خالص و سلف خالص را در جریان متناوب خواندیم و آموختیم که جریان و ولتاژ دو سر مقاومت اهمی، هم فاز هستند؛ یعنی، منحنی تغییرات جریان و ولتاژها با هم به حداکثر یا حداقل می رسد. در سلف خالص، جریان از ولتاژ دو سر آن،  $90^\circ$  درجه ی

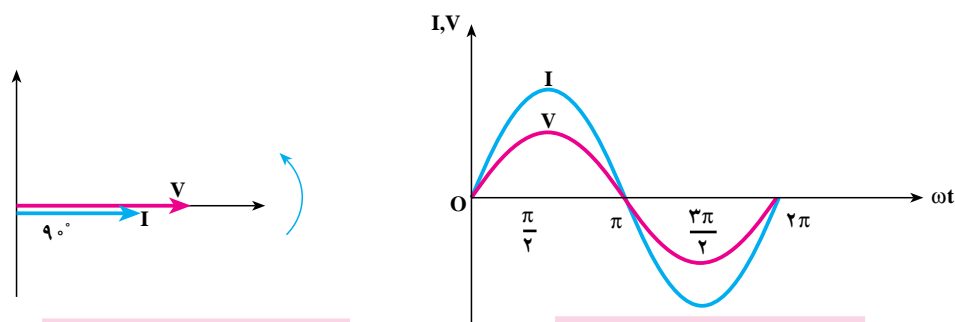
الکتریکی عقب‌تر است. با توجه به منحنی تغییرات جریان و ولتاژ در عناصر اهمی و سلفی خالص، دیاگرام برداری جریان و ولتاژ مطابق شکل‌های ۱-۳ و ۲-۳ خواهد بود.



الف: منحنی تغییرات جریان و ولتاژ

ب: دیاگرام برداری جریان و ولتاژ

شکل ۱-۳- منحنی تغییرات و دیاگرام برداری جریان و ولتاژ در سلف خالص



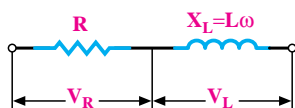
الف: منحنی تغییرات ولتاژ و جریان

ب: دیاگرام برداری ولتاژ و جریان

شکل ۲-۳- منحنی تغییرات جریان و ولتاژ در مقاومت اهمی خالص و دیاگرام برداری آنها

## ۳-۲- مدار معادل الکتریکی یک سلف حقیقی

وجود مدارهای سلفی در موتورها، مولدها، ترانسفورماتورها و دستگاه‌های اندازه‌گیری الکتریکی و مدارات الکترونیکی و مخابراتی ایجاب می‌کند تا این عنصر را از منظر واقعی آن مطالعه کنیم. از آن‌جا که یک سیم پیچ (بوبین) از هادی



شکل ۳-۳- مدل یک مقاومت سلفی حقیقی

الکتریکی با یک طول معین ساخته می‌شود و با توجه به رابطه‌ی  $R = \rho \frac{l}{A}$ ، سلف حقیقی علاوه بر راکتانس از مقاومت اهمی نیز برخوردار است، رفتار سلف حقیقی با رفتار مقاومت‌های سلف خالص (ایده‌آل) در مدارهای الکتریکی متفاوت خواهد بود. از این رو، یک سلف را مطابق شکل ۳-۳ به صورت یک راکتانس القایی و یک مقاومت اهمی سری با آن مدل می‌کنند. راکتانس القایی را با  $X_L$  نشان می‌دهند که، با توجه به رابطه‌ی  $X_L = 2\pi fL$  به فرکانس شبکه بستگی دارد. در جریان DC به علت  $f = 0$ ، راکتانس سلف، صفر است و سلف فقط خاصیت اهمی خواهد داشت. مقاومت یک سیم‌پیچ در جریان DC کم‌تر از مقاومت آن در جریان متناوب است. مقاومتی که یک سلف واقعی در جریان متناوب نشان می‌دهد، مقاومت ظاهری یا **امپدانس**<sup>۱</sup> نامیده می‌شود، و آن را با  $Z$  نشان می‌دهند که واحد آن اهم است.

مقاومت ظاهری عناصر غیرفعال الکتریکی در جریان متناوب از رابطه‌ی عمومی ۳-۱ محاسبه می‌شود.

$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_m}{I_m} \quad (3-1)$$

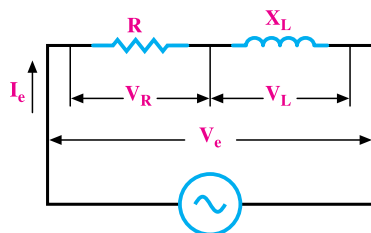
$$V_e = ZI_e \text{ و } V_m = ZI_m \quad (3-2)$$

### ۳-۳ محاسبه‌ی امپدانس مدار R - L سری

مدار ساده‌ی یک مقاومت اهمی و یک مقاومت سلفی با اتصال سری در شکل ۳-۴ نشان داده شده است. این مدار می‌تواند معادل مدار یک سیم‌پیچ یا یک مقاومت القایی حقیقی باشد. در این مدار سری جریان  $I_e$ ، از مقاومت اهمی  $R$  و راکتانس القایی  $X_L$  عبور می‌کند. بنابراین، ولتاژهای دو سر مقاومت اهمی و مقاومت سلفی مطابق روابط ۳-۳ و ۳-۴ خواهند بود.

$$V_R = R \cdot I_e \quad (3-3)$$

$$V_L = X_L \cdot I_e = 2\pi fL \cdot I_e = L\omega I_e \quad (3-4)$$



شکل ۳-۴ مدار الکتریکی R - L سری

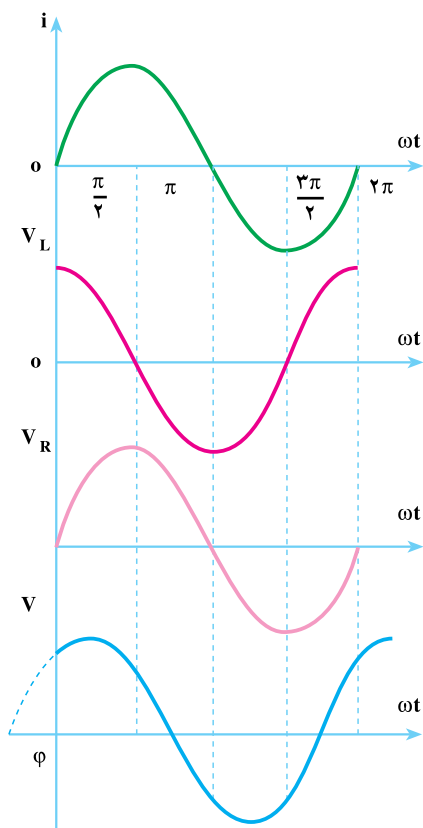
<sup>۱</sup> Impedance

ولتاژ  $V_R$  با جریان  $I_e$  هم فاز است ولی ولتاژ  $V_L$  از جریان  $I_e$ ،  $90^\circ$  درجه الکتریکی جلوتر خواهد بود.  $V_L$  و  $V_R$  هم فاز نیستند؛ بنابراین، برای محاسبه‌ی  $V_e$  از جمع برداری  $\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_L$  استفاده می‌شود. از آن جا که جریان در همه‌ی عناصر مدارهای سری یکسان است، برای محاسبه‌ها و تحلیل مدار، جریان را مبنا قرار می‌دهند و بقیه‌ی مشخصات مدار را براساس جریان تعیین می‌کنند. اگر معادله‌ی زمانی جریان را به صورت  $i = I_m \sin \omega t$  فرض کنیم، معادله‌های زمانی ولتاژ  $V_R$  و  $V_L$  از روابط ۳-۵ و ۳-۶ تعیین خواهند شد.

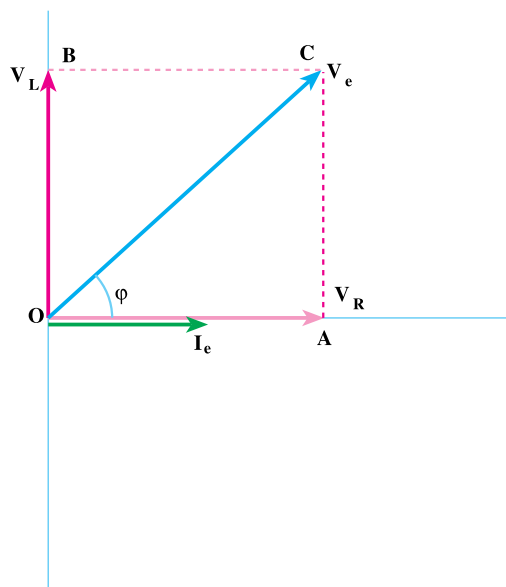
$$v_R = R \cdot I_m \sin \omega t \quad (3-5)$$

$$v_L = X_L \cdot I_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (3-6)$$

از روابط ۳-۵ و ۳-۶ با توجه به منحنی تغییرات  $V_L$  و  $V_R$ ، دیاگرام برداری مطابق شکل ۳-۵ ب رسم می‌شود.



الف: منحنی تغییرات  $V, V_L, V_R, i$  در مدار R-L سری



ب: دیاگرام برداری مدار R-L سری

شکل ۳-۵

از شکل ۵-۳-ب دیاگرام برداری، می‌توان نوشت :

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$\vec{OA} = \vec{V}_R$$

$$\vec{OC} = \vec{V}_e$$

$$\vec{AC} = \vec{OB} = \vec{V}_L$$

$$\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_L \quad (3-7)$$

با منظور کردن روابط ۲-۳، ۳-۳ و ۴-۳ در رابطه‌ی ۷-۳ خواهیم داشت :

$$(ZI_e)^2 = (I_e R)^2 + (I_e X_L)^2$$

$$I_e^2 Z^2 = I_e^2 R^2 + I_e^2 X_L^2 = I_e^2 (R^2 + X_L^2) \quad (3-8)$$

اگر طرفین رابطه‌ی ۸-۳ را به  $I_e^2$  تقسیم کنیم، امپدانس مدار R - L سری مطابق رابطه‌ی ۹-۳ به دست خواهد آمد.

$$Z^2 = R^2 + X_L^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad (3-9)$$

### ۳-۴-۳ اختلاف فاز و ضریب توان مدار R - L سری

۱-۴-۳-۳ اختلاف فاز: زاویه‌ی بین ولتاژ  $V_e$  و جریان  $I_e$  را **اختلاف فاز** می‌گویند و با

حرف  $\varphi$  نشان می‌دهند.

از شکل ۵-۳-ب زاویه‌ی  $\varphi$  مطابق رابطه‌ی ۱۰-۳ در مدار R - L سری محاسبه می‌شود.

$$\tan \varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{V_L}{V_R} = \frac{I_e \cdot X_L}{I_e \cdot R} = \frac{X_L}{R} = \frac{L\omega}{R} \quad (3-10)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{X_L}{R} \quad (3-11)$$

۲-۴-۳-۳ ضریب توان  $\cos \varphi$  : کسینوس زاویه‌ی  $\varphi$  را **ضریب توان مفید مدار R - L**

**سری** می‌گویند. از شکل ۵-۳-ب می‌توان مقدار آن را تعیین کرد.  $\cos \varphi$  به ضریب توان معروف است و منظور از آن همان ضریب توان مفید است اما کلمه‌ی مفید یا مؤثر در اصطلاح  $\cos \varphi$  بیان نمی‌شود.

$$\cos \varphi = \frac{OA}{OC} = \frac{V_R}{V_e} = \frac{I_e \cdot R}{I_e \cdot Z}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad (3-12)$$

$$R = Z \cos \varphi \quad (3-13)$$

ضریب توان یکی از مشخصه‌های مهم مدارهای الکتریکی است و به صورت  $\cos \varphi$  یا  $p.f$  نشان داده می‌شود.

برای توان غیر مؤثر نیز ضریب توان تعریف می‌شود و آن را با  $\sin \varphi$  نشان می‌دهند. از شکل ۳-۵ ب مقدار ضریب توان غیر مؤثر مطابق رابطه‌ی ۳-۱۴ محاسبه می‌شود.

$$\sin \varphi = \frac{AC}{OC} = \frac{V_L}{V_e} = \frac{I_e \cdot X_L}{I_e Z} = \frac{X_L}{Z}$$

$$\sin \varphi = \frac{X_L}{Z} \quad (3-14)$$

### ۳-۵-۳ توان‌های مدار R-L سری

۳-۵-۳-۱ توان اکتیو (مؤثر): مدار R-L، از مقاومت اهمی و مقاومت سلفی تشکیل می‌شود و عبور جریان از مقاومت اهمی موجب می‌شود که توان مفید در مدار R-L سری به مصرف برسد. بنابراین، توان مؤثر در مدار R-L، فقط در مقاومت اهمی مصرف می‌شود. مقدار توان مؤثر در مدار R-L سری را براساس روابط زیر محاسبه می‌کنند.

$$P_e = I_e^2 \cdot R \quad (3-15)$$

$$Z = \frac{V_e}{I_e} \quad (3-16)$$

$$R = Z \cos \varphi \quad (3-17)$$

با جایگزینی روابط ۳-۱۶ و ۳-۱۷ در رابطه‌ی ۳-۱۵ خواهیم داشت:

$$P_e = I_e^2 \times Z \cos \varphi = I_e^2 \times \frac{V_e}{I_e} \times \cos \varphi \quad (3-18)$$

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi$$

۳-۵-۳-۲ توان غیر مؤثر (راکتیو یا دواته): وجود مقاومت القایی در مدار R-L سری موجب می‌شود مدار توان غیر مؤثر داشته باشد. مقدار این توان از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$P_d = I_e^2 \cdot X_L = I_e^2 \cdot L\omega \quad (3-19)$$

از رابطه‌ی ۳-۱۴ می‌توان نتیجه گرفت :

$$X_L = Z \sin \varphi \quad (3-20)$$

اگر در رابطه‌ی ۳-۱۹ به جای  $X_L$  مقدار آن را از رابطه‌ی ۳-۲۰ جایگزین کنیم، خواهیم داشت :

$$P_d = I_e^2 \times Z \sin \varphi = I_e^2 \times \frac{V_e}{I_e} \times \sin \varphi$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi \quad (3-21)$$

**۳-۵-۳- توان ظاهری:** با توجه به رابطه‌های ۲-۲۴، ۳-۱۸، و ۳-۲۱ توان ظاهری در

مدار R - L سری با استفاده از رابطه‌ی ۳-۲۲ محاسبه می‌شود. چون  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  پس :

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + p_d^2} = \sqrt{(V_e I_e \cos \varphi)^2 + (V_e I_e \sin \varphi)^2} = V_e I_e [V.A] \quad (3-22)$$

### ۳-۶- ضریب کیفیت مدار R - L سری (Quality Factor)

ضریب کیفیت مدارهای الکتریکی در حالت عام به صورت رابطه‌ی ۳-۲۳ تعریف می‌شود.

$$Q = \frac{\text{ماکزیم انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی مصرفی کل در هر سیکل}} \quad (3-23)$$

به عبارت دیگر، ضریب کیفیت بیانگر خاصیت مدار است که تا چه حد سلفی، خازنی یا اهمی است.

برای به دست آوردن رابطه‌ی ضریب کیفیت به کارگیری روابط (\*) و (\*\*) در اثبات ضروری

است. در زیر با چگونگی مراحل رسیدن به رابطه‌ی نهایی آشنا می‌شوید.

$$I_m = \sqrt{2} I_e \quad (*)$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (**)$$

همان طوری که اشاره شد :

$$Q = 2\pi \frac{\text{ماکزیم انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی مصرفی در هر سیکل}} = 2\pi \frac{W_L}{W_R}$$

$$\begin{cases} W_L = \frac{1}{\sqrt{2}} L I_L^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} L I_{Lm}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} L (\sqrt{2} I_e)^2 = L I_e^2 \\ W_R = P.T = R.I_e^2.T = R.I_e^2.\frac{\sqrt{2}\pi}{\omega} \end{cases}$$

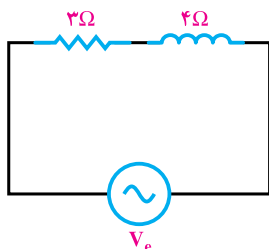
$$Q = \sqrt{2}\pi \frac{W_L}{W_R} = \sqrt{2}\pi \frac{L I_e^2}{R I_e^2 \frac{\sqrt{2}\pi}{\omega}} = \sqrt{2}\pi \frac{L \cdot \omega}{R \cdot \sqrt{2}\pi}$$

$$Q = \frac{L \cdot \omega}{R} = \frac{X_L}{R} \quad (3-24)$$

$$Q = \frac{L\omega}{R} \quad (3-25)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی ۳-۲۵ با ۳-۱۰ می‌توان نتیجه گرفت که در مدار R - L سری، ضریب کیفیت مدار همان  $\tan \varphi$  است.

$$Q = \tan \varphi = \frac{L\omega}{R} = \frac{X_L}{R} \quad (3-26)$$



شکل ۳-۶

**مثال ۱:** مدار R - L سری شکل ۳-۶ با ولتاژ متناوبی به

معادله،  $V(t) = 5^\circ \sin 4^\circ \cdot t$  تغذیه می‌شود مطلوب است :

الف : امپدانس مدار. از رابطه‌ی ۳-۹ می‌توان محاسبه کرد :

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\Omega$$

ب : معادله‌ی جریان مدار : از رابطه‌ی ۳-۱ می‌توان محاسبه کرد :

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{5^\circ}{5} = 1^\circ A$$

و با توجه به رابطه‌ی ۳-۱۱ می‌توان نوشت :

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{X_L}{R} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{4}{3} \right) = 53^\circ \quad \text{و} \quad \theta_V = 0^\circ$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I$$

$$53^\circ = 0^\circ - \theta_I \Rightarrow \theta_I = -53^\circ$$



$$i_{(t)} = I_m \sin(\omega t + \theta_i) \rightarrow i_{(t)} = 1 \sin(40^\circ t - 53^\circ)$$

پ: اندازه‌ی ضریب خودالقایی سلف:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{4}{400} = 0.01 \text{ H}$$

ت: معادله‌ی ولتاژ دو سر مقاومت اهمی R و القایی  $X_L$ .

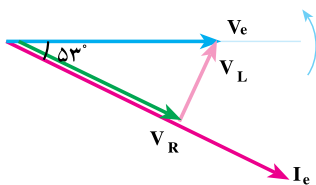
$$V_{R_m} = R \cdot I_m = 3 \times 1 = 3^\circ V \quad \text{با توجه به رابطه‌ی ۳-۵ می‌توان نوشت:}$$

$$v_{R(t)} = R \cdot I_m \sin(\omega t + \theta_i) = 3^\circ \sin(40^\circ t - 53^\circ)$$

و با توجه به رابطه‌ی ۳-۶ می‌توان نوشت:

$$V_{L_m} = X_L \cdot I_m = 4 \times 1 = 4^\circ V$$

$$v_{L(t)} = X_L \cdot I_m \sin\left[(\omega t + \theta_i) + \frac{\pi}{2}\right] = 4^\circ \sin(40^\circ t - 53^\circ + 90^\circ) = 4^\circ \sin(40^\circ t + 37^\circ)$$



ث: رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار.

ج- توان‌ها و مثلث توان

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{5^\circ}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1^\circ}{\sqrt{2}}$$

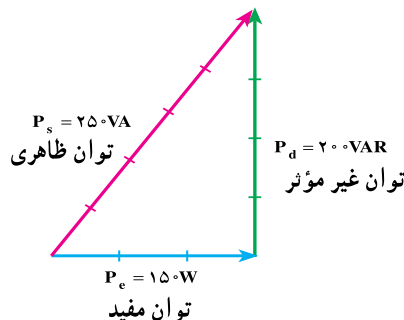
$$P_s = V_e \cdot I_e = \frac{5^\circ}{\sqrt{2}} \times \frac{1^\circ}{\sqrt{2}} = 25^\circ \text{ VA} \quad \text{با توجه به رابطه‌ی ۳-۲۲ داریم:}$$

و با توجه به رابطه‌ی ۳-۱۸ داریم:

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi = P_s \cdot \cos \varphi = 25^\circ \cos(53^\circ) = 25^\circ \times 0.6 = 15^\circ \text{ W}$$

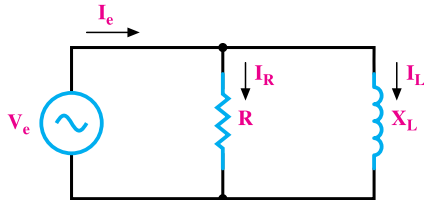
و با توجه به رابطه‌ی ۳-۲۱ داریم:

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = P_s \cdot \sin \varphi = 25^\circ \sin 53^\circ = 25^\circ \times 0.8 = 20^\circ \text{ VAR}$$



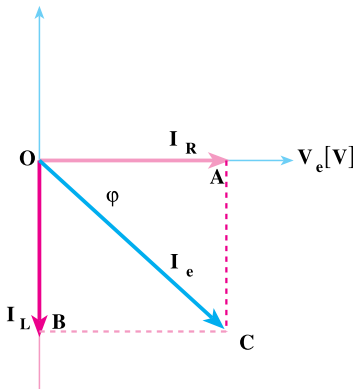
### ۳-۷ مدار R-L موازی

مدارهای R-L موازی از یک مقاومت اهمی و یک راکتانس القایی با اتصال موازی تشکیل می‌شوند. مدار الکتریکی اتصال موازی R-L به صورت شکل ۳-۷ است. این مدارها به طور گسترده در مدارهای الکترونیکی و مخابراتی به کار می‌روند. تله‌های امواج و فیلترسازی امواج



شکل ۳-۷ مدار الکتریکی موازی R-L

از جمله کاربردهای این مدارهاست. با توجه به مدار شکل ۳-۷ می‌توان گفت که جریان مدار ( $I_e$ ) از دو جریان  $I_R$  و  $I_L$  تشکیل می‌شود. چون ولتاژ دو سر راکتانس القایی و مقاومت اهمی با هم برابرند و زاویه‌ی فاز جریان‌های  $I_R$  و  $I_L$  یکسان نیستند، در مطالعه مدارهای R-L موازی، ولتاژ را مبنا قرار می‌دهند و دیاگرام برداری  $I_R$  و  $I_L$  را بر اساس ولتاژ مبنا رسم می‌کنند. بردار جریان  $I_R$  با ولتاژ هم‌فاز و بردار جریان  $I_L$  از ولتاژ  $90^\circ$  پس‌فاز است و مطابق شکل ۳-۸ رسم می‌شوند.



شکل ۳-۸ دیاگرام برداری مدار R-L موازی

جریان کل مدار  $I_e$  از جمع برداری  $I_R$  و  $I_L$  به دست می‌آید:

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_L \quad (3-27)$$

#### ۳-۷-۱ محاسبه‌ی امپدانس مدار R-L موازی: با توجه به شکل ۳-۷ و دیاگرام

برداری جریان‌ها (شکل ۳-۸) می‌توان نوشت:

$$I_e = \frac{V_e}{Z} \quad \text{و} \quad I_R = \frac{V_e}{R} \quad \text{و} \quad I_L = \frac{V_e}{X_L}$$

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \quad \text{و} \quad \overline{OB} = \overline{AC}$$

$$I_e^2 = I_R^2 + I_L^2 \quad (3-28)$$

با جایگزین کردن مقادیر  $I_L$ ،  $I_R$  و  $I_e$  در رابطه‌ی ۳-۲۸ می‌توان نوشت:

$$\frac{V_e}{Z} = \frac{V_e}{R} + \frac{V_e}{X_L}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_L} \Rightarrow Z = \frac{R \cdot X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad (3-29)$$

۲-۷-۳. محاسبه‌ی اختلاف فاز و ضریب توان مدار **R-L موازی**: در شکل

۳-۸ در مثلث OAC می‌توان نوشت:

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{I_L}{I_R} = \frac{\frac{V_e}{X_L}}{\frac{V_e}{R}} = \frac{V_e R}{V_e X_L}$$

$$\tan \varphi = \frac{R}{X_L} \quad (3-30)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{R}{X_L} \quad (3-31)$$

برای محاسبه‌ی ضریب توان‌های مؤثر و غیرمؤثر از مثلث OAC، روابط زیر را می‌نویسیم:

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{I_R}{I_e}$$

$$\cos \varphi = \frac{\frac{V_e}{R}}{\frac{V_e}{Z}} = \frac{V_e \cdot Z}{V_e \cdot R}$$

$$\cos \varphi = \frac{Z}{R} \quad (3-32)$$

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{I_L}{I_e} = \frac{Z}{X_L} \quad (3-33)$$

۳-۷-۳. محاسبه‌ی توان‌های مدار **R-L موازی**: از دیاگرام برداری شکل ۳-۸

می‌توان نوشت:

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I_e} \Rightarrow I_R = I_e \cos \varphi \quad (1)$$

$$P_e = I_R^2 R = I_R \cdot \frac{V_e}{I_R} = V_e \cdot I_R \quad (2)$$

با جاگذاری (۱) در (۲) خواهیم داشت:

$$P_e = I_e \cdot V_e \cdot \cos \varphi \quad (3-34)$$

با توجه به رابطه‌ی ۳-۳۳ و جای‌گذاری روابط می‌توانیم توان راکتیو را به‌دست آوریم.

$$P_d = X_L I_L^2 = \frac{V_e}{I_L} \times I_L^2 \text{ و } I_L = I_e \sin \varphi$$

$$P_d = V_e I_L = V_e I_e \sin \varphi \quad (3-35)$$

توان ظاهری از  $P_e$  و  $P_d$  به قرار زیر محاسبه می‌شود:

$$P_s = \sqrt{P_d^2 + P_e^2} = \sqrt{V_e^2 I_e^2 \sin^2 \varphi + V_e^2 I_e^2 \cos^2 \varphi}$$

$$P_s = V_e I_e \quad (3-36)$$

#### ۴-۷-۳- محاسبه‌ی ضریب کیفیت مدار R - L موازی

$$Q = \frac{2\pi \times (\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده})}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}} = \frac{2\pi(\frac{1}{2} L I_{Lm}^2)}{I_R^2 \times R \times T} = \frac{2\pi(\frac{1}{2} L I_{Lm}^2)}{I_R^2 \times R \times \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$I_{Lm} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{\sqrt{2} V_e}{L\omega} \text{ و } I_R = \frac{V_e}{R}$$

$$Q = \frac{2\pi \left[ \frac{1}{2} L \times \left( \frac{\sqrt{2} V_e}{L\omega} \right)^2 \right]}{\frac{V_e^2}{R} \times R \times \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{R}{L\omega}$$

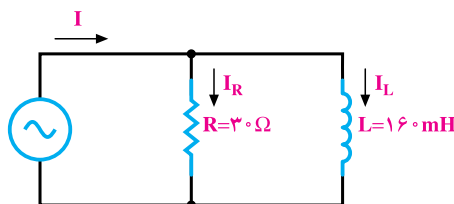
$$Q = \tan \varphi = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{L\omega} \quad (3-37)$$

با مقایسه‌ی روابط ۳-۳۷ و ۳-۳۰ می‌توان گفت:

**مثال ۲:** مدار الکتریکی شکل ۳-۹ از منبع ولتاژ به معادله‌ی  $v = 120\sqrt{2} \sin(250t + 45^\circ)$

تغذیه می‌شود. مطلوب است.

الف: مقاومت القایی سلف.  $X_L = L \cdot \omega = 160 \times 10^{-3} \times 250 = 40 \Omega$



شکل ۳-۹

ب: معادله‌ی جریان هر شاخه.

$$I_{Rm} = \frac{V_m}{R} = \frac{120\sqrt{2}}{30} = 4\sqrt{2} \text{ A}$$

جریان مقاومت هم فاز با ولتاژ

$$i_R = 4\sqrt{2} \sin(25^\circ t + 45^\circ)$$

$$I_{Lm} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{120\sqrt{2}}{40} = 3\sqrt{2} \text{ A}$$

جریان سلف  $9^\circ$  درجه عقب تر از ولتاژ

$$i_L = 3\sqrt{2} \sin(25^\circ t + 45^\circ - 9^\circ)$$

$$i_L = 3\sqrt{2} \sin(25^\circ t - 45^\circ)$$

پ: جریان کل و معادله‌ی زمانی آن.

$$I_R = \frac{I_{Rm}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4 \text{ A}$$

$$I_L = \frac{I_{Lm}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \text{ A}$$

با توجه به رابطه‌ی ۳-۲۷ داریم:

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_L = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ A}$$

$$I_m = I_e \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ A}$$

براساس رابطه‌ی ۳-۳۱ می‌توان نوشت:

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{R}{X_L}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right) = \tan^{-1}(0.75) = 37^\circ$$

بنابراین، جریان کل به اندازه‌ی  $\varphi = 37^\circ$  از ولتاژ منبع عقب تر است و داریم:

$$i = 5\sqrt{2} \sin[(25^\circ t + 45^\circ) - 37^\circ] = 5\sqrt{2} \sin(25^\circ t + 8^\circ)$$

ت: امپدانس مدار.

از رابطه‌ی ۳-۲۹ داریم:

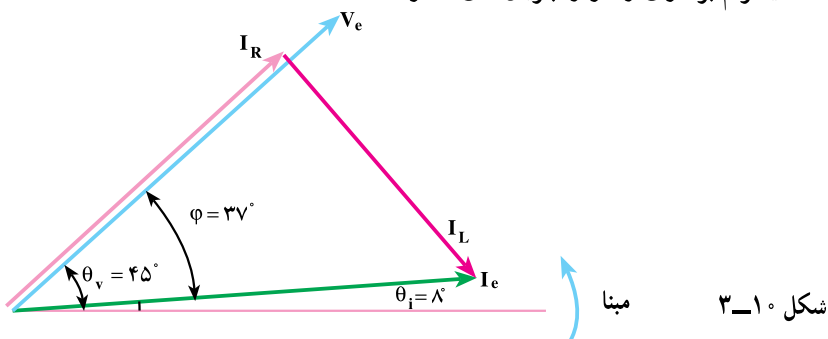
$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{30^2} + \frac{1}{40^2}}} = 24\Omega \quad \text{یا} \quad Z = \frac{30 \times 40}{\sqrt{30^2 + 40^2}} = 24\Omega$$

راه ساده‌ی محاسبه‌ی امپدانس مدار استفاده از رابطه‌ی ۳-۱ است.

$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{120\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 24\Omega$$

ث: دیاگرام برداری ولتاژ و جریان‌های مدار.



ج: توان‌های مدار و رسم مثلث توان.

از رابطه‌ی ۳-۱۵ خواهیم داشت:

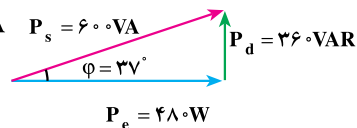
$$P_e = R \cdot I_R^2 = 30 \times (4)^2 = 480W$$

از رابطه‌ی ۳-۳۵ خواهیم داشت:

$$P_d = X_L \cdot I_L^2 = 40 \times (3)^2 = 360VAR$$

و از رابطه‌ی ۳-۳۶ خواهیم داشت:

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{480^2 + 360^2} = 600VA \quad P_s = 600VA$$



می‌توان توان‌های مدار را از روابط ۳-۳۴، ۳-۳۵ و ۳-۳۶ محاسبه کرد. بدیهی است

جواب‌ها یکسان خواهند بود.

$$P_e = V_e I_e \cos \phi = 120 \times 5 \times \cos 37^\circ = 480W$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = 120 \times 5 \times 0.6 = 360 \text{ VAR}$$

$$P_s = V_e I_e = 120 \times 5 = 600 \text{ VA}$$

مثال ۳: در مثال‌های ۱ و ۲ ضریب کیفیت مدار را محاسبه کنید.

راه حل:

در مثال ۱ ضریب کیفیت برابر است با:

$$Q = \frac{L\omega}{R} = \frac{X_L}{R} = \frac{4}{3} = 1.33$$

در مثال ۲ ضریب کیفیت برابر است با:

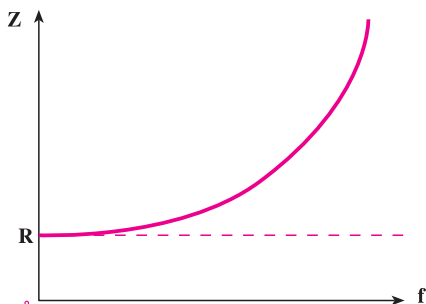
$$Q = \frac{R}{X_L} = \frac{3}{4} = 0.75$$

با وجود این که در دو مثال ۱ و ۲ نسبت راکتانس سلفی به مقاومت اهمی برابر است، در مدار سری ضریب کیفیت بزرگ‌تر است. به عبارت دیگر، خاصیت سلفی بیش‌تر نمایان است؛ در حالی که در مدار موازی خاصیت اهمی مدار بیش‌تر دیده می‌شود. مطلب ذکر شده نشان می‌دهد که در مدار سری، مقاومت و در مدار موازی، عکس مقاومت تعیین‌کننده‌ی خاصیت مدار است.

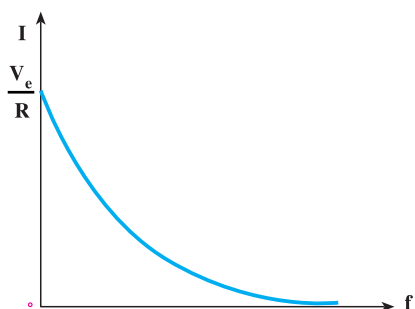
## ۸-۳- اثر فرکانس شبکه بر مدارهای R - L

در مدار R - L سری ارتباط عناصر مدار به صورت  $Z^2 = R^2 + (\omega L)^2$  است. به طوری که اگر مقاومت اهمی مدار تغییر نکند، تغییرات فرکانس در مقاومت القایی  $X_L = \omega L$  اثر می‌گذارد و امپدانس مدار را تغییر می‌دهد. اگر فرکانس مدار  $f = 0$  باشد، اندازه‌ی مقاومت القایی برابر صفر خواهد بود و امپدانس مدار  $Z = R$  می‌شود. این حداقل مقداری است که امپدانس مدار R - L سری دارد. در این حالت، از مدار جریان  $I_e = \frac{V_e}{R}$  عبور می‌کند. این مقدار جریان، حداکثر جریانی است که از مدار R - L سری با دامنه‌ی ولتاژ ثابت  $V_e$  می‌گذرد. اگر فرکانس از صفر به بی‌نهایت افزایش یابد ( $f \rightarrow \infty$ )، امپدانس ( $Z$ ) افزایش یافته، مقدار امپدانس نیز بی‌نهایت می‌شود. در این حالت، از مدار جریانی عبور نخواهد کرد. مدار R - L، مثل مدار باز عمل می‌کند؛ بنابراین، با افزایش فرکانس مدار R - L سری را عملاً می‌توان به مدار باز تبدیل کرد. مطالب بالا در جدول زیر آورده شده است.

$f \text{ (Hz)}$	۰	$\infty$
$Z \text{ (}\Omega\text{)}$	R	$\infty$
$I \text{ (A)}$	$\frac{V_e}{R}$	۰



منحنی تغییرات جریان و امپدانس مدار RL سری به ازای تغییر فرکانس در شکل، ۱۱-۳ از طریق نقطه‌یابی رسم شده است.



شکل ۱۱-۳ اثر فرکانس در مدار RL سری

در مدار R - L موازی، امپدانس از رابطه‌ی  $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(j\pi fL)}$  محاسبه می‌شود.

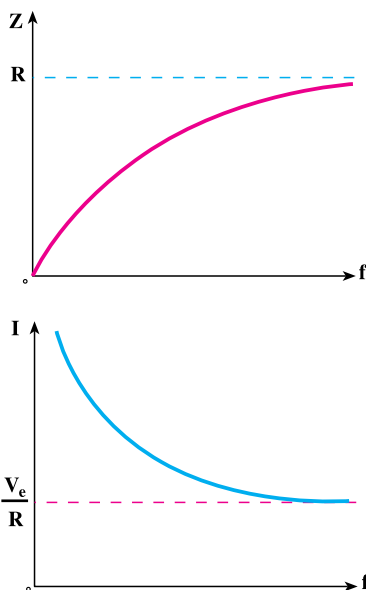
اگر فرکانس منبع صفر شود، آن‌گاه  $\frac{1}{X_L} = \frac{1}{j\pi fL} = \infty$  خواهد شد و در این حالت  $Z = \infty$

می‌شود. به عبارت دیگر، مدار R - L موازی در فرکانس صفر اتصال کوتاه می‌کند و از مدار جریان اتصال کوتاه عبور خواهد کرد. جریان اتصال کوتاه را به  $I_{s.c}$  نشان می‌دهند. اگر فرکانس مدار از صفر به بی‌نهایت افزایش یابد، امپدانس مدار R - L موازی از مقدار اتصال کوتاه ( $Z = 0$ ) به اندازه‌ی مقاومت اهمی - یعنی R - تغییر می‌کند. به طوری که در فرکانس‌های خیلی زیاد می‌توان  $Z = R$  در نظر گرفت. در فرکانس خیلی زیاد از مدار R - L موازی جریان  $I_e = \frac{V_e}{R}$  عبور خواهد کرد. مطالب بالا در جدول زیر آورده شده است.

$f_{(Hz)}$	0	$\infty$
$Z_{(\Omega)}$	0	R
$I_{(A)}$	$\infty$	$\frac{V_e}{R}$



منحنی تغییرات جریان و امپدانس مدار RL موازی به ازای تغییر فرکانس در شکل ۳-۱۲ از طریق نقطه‌یابی رسم شده است.



شکل ۳-۱۲ اثر فرکانس در مدار R-L موازی

اثر تغییرات فرکانس بر امپدانس مدار موجب می‌شود ضریب توان  $\cos \varphi$  و اختلاف فاز  $\varphi$  و توان‌های اکتیو و راکتیو و ظاهری نیز تغییر کند.

در مدار R - L سری با توجه به  $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$  و  $P_e = V_e I_e \cos \varphi$  و  $P_d = V_e I_e \sin \varphi$ ، اگر فرکانس از صفر به بی‌نهایت افزایش یابد، چون امپدانس از  $Z = R$  به  $Z = \infty$  تغییر می‌کند،  $\cos \varphi$  از ۱ به صفر،  $\sin \varphi$  از صفر به یک و  $\varphi$  از صفر به  $90^\circ$  درجه تغییر خواهد کرد. بنابراین، توان اکتیو از مقدار ماکزیمم به صفر تغییر می‌یابد و توان غیرمؤثر از مقدار صفر به  $P_d = V_e I_e$  رشد می‌کند.

👉 نتیجه: افزایش فرکانس در مدار R - L سری، خاصیت القایی مدار را افزایش می‌دهد.

در مدار موازی با توجه به  $\cos \varphi = \frac{Z}{R}$  و  $P_e = V_e I_e \cos \varphi$  و  $P_d = V_e I_e \sin \varphi$ ، رشد فرکانس از صفر به مقدار خیلی زیاد موجب می‌شود امپدانس از مقدار صفر به  $R$  تغییر کند. در این حالت،  $\cos \varphi$  از صفر به یک،  $\sin \varphi$  از یک به صفر و  $\varphi$  از  $90^\circ$  درجه به صفر درجه تغییر می‌کند. توان اکتیو از صفر به مقدار  $P_e = V_e I_e$  و توان راکتیو از مقدار حداکثر به صفر تغییر می‌کند.

👉 نتیجه: افزایش فرکانس در مدار  $R-L$  موازی، خاصیت سلفی مدار را کاهش می‌دهد.

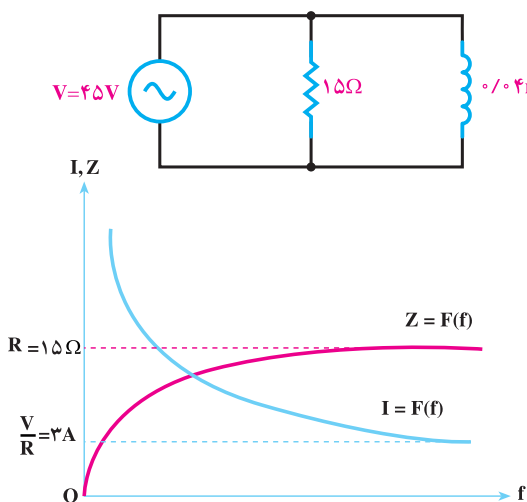
در شکل‌های ۱۳-۳ دو نمونه از اثر فرکانس بر روی  $I$  و  $Z$  در مدار  $R-L$  سری و  $R-L$  موازی موازی نشان داده شده است.

$f(\text{Hz})$	$Z(\Omega)$	$I(\text{A})$
$0$	$0$	$\infty$
$\infty$	$R = 15$	$\frac{V}{R} = \frac{V}{15}$

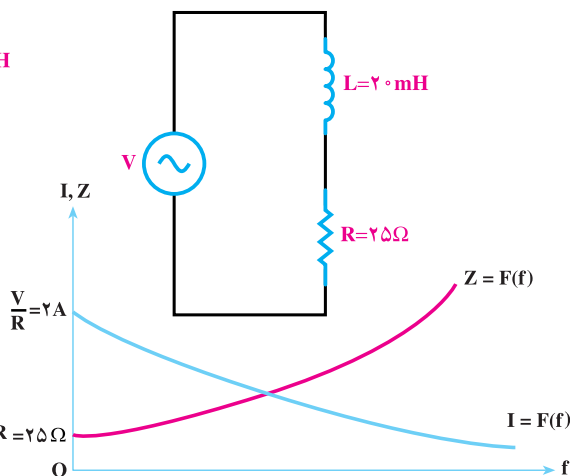
مدار  $R-L$  موازی

$f(\text{Hz})$	$Z(\Omega)$	$I(\text{A})$
$0$	$R = 25$	$\frac{V}{R} = \frac{V}{25}$
$\infty$	$\infty$	$0$

مدار  $R-L$  سری



ب: اثر فرکانس در مدار  $R-L$  موازی



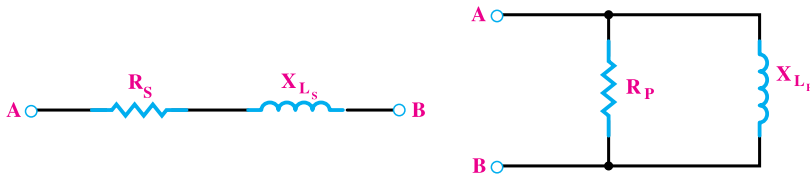
الف: اثر فرکانس در مدار  $R-L$  سری

شکل ۱۳-۳

### ۹-۳- تبدیل مدار RL سری به RL موازی و برعکس

هر گاه بخواهیم یک مدار R-L سری را به R-L موازی و یا بالعکس تبدیل کنیم باید  $Z_s$  و  $\varphi_s$  در حالت سری با  $Z_p$  و  $\varphi_p$  در حالت موازی برابر باشند.

همان طوری که اشاره شد روابط امپدانس و ضریب قدرت در مدارهای R-L سری و R-L موازی به صورت زیر است :



$$\begin{cases} Z_s = \sqrt{R_s^2 + X_{L_s}^2} \\ \cos \varphi_s = \frac{R_s}{Z_s} \end{cases} \quad \begin{cases} Z_p = \frac{R_p \cdot X_{L_p}}{\sqrt{R_p^2 + X_{L_p}^2}} \\ \cos \varphi_p = \frac{Z_p}{R_p} \end{cases}$$

**I. در تبدیل مدار R-L موازی به R-L سری داریم:**

$$\cos \varphi_p = \cos \varphi_s \quad \text{شرط اول تبدیل}$$

$$\frac{Z_p}{R_p} = \frac{R_s}{Z_s} \quad \text{معادل طرفین را قرار می دهیم}$$

$$R_s = \frac{Z_p \cdot Z_s}{R_p} \quad \text{مقدار } R_s \text{ را به دست می آوریم}$$

$$R_s = \frac{Z_p^2}{R_p} \quad \text{با توجه به شرط دوم تبدیل } Z_p = Z_s \text{ در معادله } R_s \text{ قرار می دهیم.}$$

بر پایه همین مراحل برای راکتانس معادل در مدار سری نیز چنین می توان نوشت :

$$X_s = \frac{Z_p^2}{X_{L_p}}$$

## II. در تبدیل مدار R-L سری با R-L موازی داریم:

$$\cos \phi_P = \cos \phi_S \quad \text{شرط اول تبدیل}$$

$$\frac{Z_P}{R_P} = \frac{R_S}{Z_S} \quad \text{معادل طرفین را قرار می‌دهیم}$$

$$R_P = \frac{Z_P Z_S}{R_S} \quad \text{مقدار } R_P \text{ را به دست می‌آوریم}$$

$$R_P = \frac{Z_S^2}{R_S} \quad \text{با توجه به شرط دوم تبدیل } Z_P = Z_S \text{ در معادله } R_P \text{ قرار می‌دهیم.}$$

بر پایه همین مراحل برای راکتانس معادل مدار موازی نیز چنین می‌توان نوشت:

$$X_P = \frac{Z_S^2}{X_{L_S}}$$



۱- در مدار شکل مقابل مطلوب است :

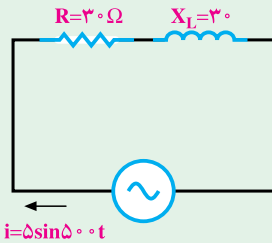
الف : ولتاژ دو سر  $R$  و  $X_L$  و معادلات زمانی آن‌ها.

ب : ولتاژ منبع و معادله‌ی زمانی آن.

پ : رسم دیاگرام برداری جریان و ولتاژها.

ت : توان اکتیو، راکتیو و ظاهری و رسم مثلث توان‌ها.

جواب :



$$V_R = 10.6V, P_e = 375W \text{ و } V_{R(t)} = 10.6\sqrt{2} \sin 500t$$

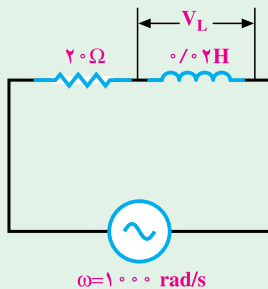
$$V_L = 10.6V, P_d = 375VAR \text{ و } V_{L(t)} = 10.6\sqrt{2} \sin(500t + 90^\circ)$$

$$V = 150V, P_s = 530/3 VA \text{ و } V(t) = 150\sqrt{2} \sin(500t + 45^\circ)$$

۲- در یک مدار RL سری معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب  $v(t) = 200 \sin(314t + 20^\circ)$  و

$i(t) = 10 \sin(314t - 10^\circ)$  است اندازه‌ی  $R$  و  $L$  چه قدر است؟

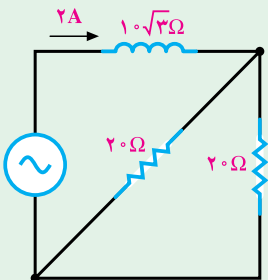
جواب :  $R = 17/32 \Omega$  و  $L = 0/03H$



۳- در مدار شکل مقابل ولتاژ دو سر سلف  $V_L = 40V$

است ولتاژ منبع چند ولت است؟

جواب :  $V = 56/5V$



۴- در مدار شکل مقابل ولتاژ منبع چند ولت است؟

جواب :  $V_e = 40V$

۵- یک مقاومت ۵ اهمی با یک سلف نامشخص به طور سری به هم متصل اند. معادله‌ی ولتاژ

دو سر مقاومت  $v_R = 25 \sin(2000t + 30^\circ)$  است. اگر  $\phi = \frac{\pi}{3}$  رادیان باشد، مطلوب است :

الف : ضریب خودالقایی سلف

ب : معادله‌ی جریان مدار

پ : معادله‌ی ولتاژ کل

ت : معادله‌ی ولتاژ دو سر سلف

جواب :  $L = 4/3 \text{ mH}$

$$i(t) = 5 \sin(200 \cdot t + 3^\circ)$$

$$V(t) = 5 \sin(200 \cdot t + 9^\circ)$$

$$V_{L(t)} = 43/3 \sin(200 \cdot t + 12^\circ)$$

۶- از یک مدار RL سری شدت جریانی به معادله‌ی  $i = 3\sqrt{2} \sin 100 \pi t$  می‌گذرد. اگر  $\cos \phi = 0/6$  و ولتاژ دو سر سلف  $V_L = 200 \text{ V}$  باشد، مثلث توان‌ها را با درج مقادیر رسم کنید.

جواب  $P_e = 450 \text{ W}$  ،  $P_d = 600 \text{ VAR}$  ،  $P_s = 750 \text{ VA}$

۷- در یک مدار RL سری با  $L = 10 \text{ mH}$  و  $R = 3 \Omega$  مقدار فرکانس چه قدر انتخاب شود تا جریان به اندازه‌ی  $\frac{\pi}{6}$  تأخیر فاز داشته باشد.

جواب :  $f = 27/5 \text{ Hz}$

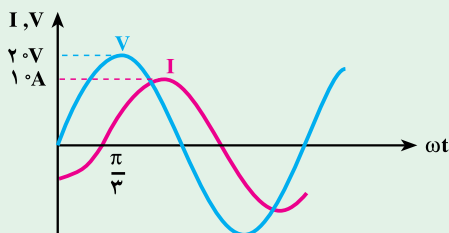
۸- در یک مدار RL سری با  $L = 5 \text{ mH}$  و  $R = 2 \Omega$  درچه فرکانسی ضریب کیفیت مدار

$\frac{\pi}{10}$  می‌شود؟

جواب :  $f = 200 \text{ Hz}$

۹- در یک مدار RL سری تابع تغییرات ولتاژ و جریان مطابق شکل زیر است اندازه‌ی R و

$X_L$  چه قدر است؟



جواب :  $X_L = 1/73 \Omega$  ،  $R = 1 \Omega$

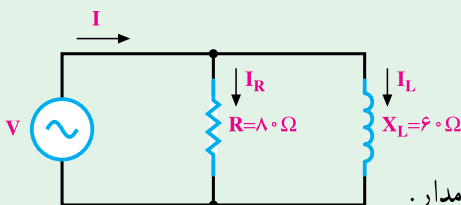
۱۰- در مدار شکل زیر  $i(t) = 5\sqrt{2} \sin 25 t$  می‌باشد، مطلوب است.

الف : امپدانس مدار.

ب : ولتاژ منبع و معادله‌ی آن.

پ : جریان  $I_R$  و  $I_L$  و معادله‌های آن‌ها.

ت : رسم دیاگرام برداری ولتاژ و جریان‌های مدار.



ث: توان‌های اکتیو، راکتیو ظاهری و رسم مثلث توان.

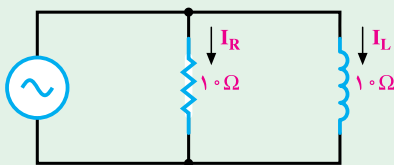
جواب:  $P_e = 720 \text{ W}$  ,  $Z = 48 \Omega$  ,  $V_{(t)} = 240\sqrt{2} \sin(25^\circ t + 53^\circ)$

$P_d = 960 \text{ VAR}$  ,  $I_{R(t)} = 3\sqrt{2} \sin(25^\circ t + 53^\circ)$

$P_s = 1200 \text{ VA}$  ,  $I_{L(t)} = 4\sqrt{2} \sin(25^\circ t - 37^\circ)$

۱۱- در مدار شکل مقابل اگر  $I_L = 3$  آمپر باشد، مطلوب است

الف: ولتاژ منبع  
ب: جریان منبع



پ: معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع

جواب:  $V_e = 30 \text{ V}$

$I_e = 3\sqrt{2} \text{ A}$

$V_{(t)} = 30\sqrt{2} \sin \omega t$

$I_{(t)} = 6 \sin(\omega t - 45^\circ)$

۱۲- در مدار شکل زیر، معادله‌ی ولتاژ و

جریان منبع به ترتیب  $i = 2 \sin(50^\circ t - \frac{\pi}{4})$  و

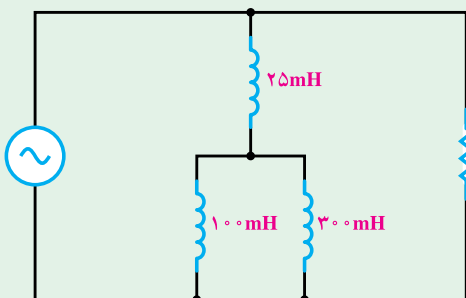
$V = 50\sqrt{2} \sin 50^\circ t$  است. مطلوب است:

الف: امپدانس کل مدار.

ب: اندازه‌ی R.

پ: توان‌های اکتیو، راکتیو، ظاهری و

مثلث توان‌ها.



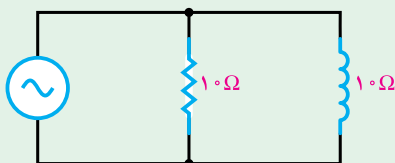
ت: رسم دیاگرام برداری ولتاژ و جریان‌های مدار.

جواب:

$R = 50 \Omega$  ,  $Z = 25\sqrt{2} \Omega$  ,  $P_e = 50 \text{ W}$  ,  $P_d = 50 \text{ VAR}$  ,  $P_s = 50\sqrt{2} \text{ VA}$

۱۳- مدار RL موازی شکل زیر را به یک مدار RL سری تبدیل کنید.

جواب:



$R_s = 50 \Omega$

$X_{Ls} = 50 \Omega$