نتیجه

۱ــ تابع $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم حد این تابع را در صفر تعیین کنیم.

حل: داریم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos x}$$

با توجه به این‌که $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$ و $\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos x}=۱$ داریم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=۱\times۱=۱ \;\Rightarrow\; \lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=۱$$

۲ــ می‌خواهیم حد تابع $f(x)=\frac{\sin ۲x}{x}$ را در صفر تعیین‌کنیم.

تابع $f(x)=\frac{\sin ۲x}{x}$ را می‌توان به‌صورت $f(x)=۲\times\frac{\sin ۲x}{۲x}$ نوشت. پس :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{x}=\lim_{x\to ۰}(۲\frac{\sin ۲x}{۲x})=۲\times\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{۲x}=۲(۱)=۲$$

به‌طور کلی ثابت می‌شود که :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan mx}{x}=m \quad و \quad \lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{x}=m$$

مثال ۱: $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x^۲}$ را محاسبه کنید.

حل: داریم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲ x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}۲(\frac{\sin x}{x})^۲$$

$$=۲\times\lim_{x\to ۰}(\frac{\sin x}{x})^۲=۲(۱)^۲=۲$$

مثال ۲: حد $\frac{\tan kx}{\cos kx\sin ۲x}$ در $x=۰$ برابر ۲ است. مقدار k را تعیین کنید.

حل: داریم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan kx}{\cos kx\ \sin ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin kx}{\cos^۲ kx\sin ۲x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos^۲ kx}\times\frac{\lim_{x\to ۰}\frac{\sin kx}{x}}{\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{x}}$$

$$=۱\times\frac{k}{۲}=\frac{k}{۲} \;\Rightarrow\; \frac{k}{۲}=۲ \;\Rightarrow\; k=۴$$

مثال ۳: برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}} \dfrac{\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})}{x-\frac{\pi}{۶}}$ فرض می‌کنیم $x-\frac{\pi}{۶}=t$ ، در این صورت $۲x-\frac{\pi}{۳}=۲(x-\frac{\pi}{۶})=۲t$ خواهد بود و خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} \frac{\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})}{x-\frac{\pi}{۶}} = \lim_{t\to ۰}\frac{\sin ۲t}{t} = ۲$$

تمرین

۱ــ هریک از حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin ۳x}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲}{۳x}\sin\dfrac{۳}{۲}x$

پ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}} \dfrac{\sin(۳x-\pi)}{x-\frac{\pi}{۳}}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin ۵x}{۳x}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x\tan ۳x}{۳x^۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x^۲-a^۲}$

چ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \dfrac{\tan x-۱}{۴x-\pi}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x\sin ۲x\sin ۳x}{x^۳}$

خ) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^۳}$

۲ــ اگر به ازای هر x داشته باشیم $۲-x^۲ \le g(x) \le ۲\cos x$ ،حد تابع $g(x)$ را در $x=۰$ تعیین کنید.

۳ــ فرض کنید به ازای $-۱ \le x \le ۱$ داشته باشیم :

$$\sqrt{۵-۲x^۲} \le f(x) \le \sqrt{۵-x^۲}$$

حد تابع $f(x)$ را در $x=۰$ تعیین کنید.

۴ــ حد تابع $f(x)=|x|$ را در $x=۰$ تعیین کنید.

نکات زیر در محاسبهٔ برخی از حدها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱ــ بخش‌پذیری چند جمله‌ای‌ها بر $x-x_۰$: اگر چند جمله‌ای $ax^n+bx^{n-۱}+\quad+l$ به

ازای $x = x_0$ برابر صفر شود (x_0 ریشهٔ چندجمله‌ای باشد)، چند جمله‌ای بر $x - x_0$ بخش‌پذیر است (از این خاصیت برای تجزیهٔ چند جمله‌ای می‌توان استفاده کرد).

مثال ۱: چند جمله‌ای $2x^2 + x - 3$ به ازای $x = 1$ برابر با صفر است، پس این چند جمله‌ای بر $x - 1$ بخش‌پذیر است.

$$x = 1 \xrightarrow{\text{در چند جمله‌ای}} 2(1)^2 + (1) - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^2} + x - 3 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-\cancel{2x^2} + 2x} & 2x + 3 \\ \quad 3x - \cancel{3} & \\ \quad \underline{-3x + \cancel{3}} & \\ \qquad 0 & \end{array} \qquad \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = (x - 1)(2x + 3)$$

مثال ۲: چند جمله‌ای $x^3 + 7x^2 + 4x - 12$ به ازای $x = -2$ برابر صفر است، پس بر $x + 2$ بخش‌پذیر می‌باشد.

$$x = -2 \xrightarrow{\text{در چند جمله‌ای}} (-2)^3 + 7(-2)^2 + 4(-2) - 12 = -8 + 28 - 8 - 12 = 0$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 7x^2 + 4x - 12 & x + 2 \\ \cline{2-2} \quad R = 0 & x^2 + 5x - 6 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x^3 + 7x^2 + 4x - 12 = (x + 2)(x^2 + 5x - 6)$$

و چون $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$ ، پس :

$$x^3 + 7x^2 + 4x - 12 = (x + 2)(x + 6)(x - 1)$$

اینک چند نمونه از حدهایی را که به کمک بخش‌پذیری چند جمله‌ای‌ها بر $x - x_0$ محاسبه می‌شوند در زیر می‌آوریم :

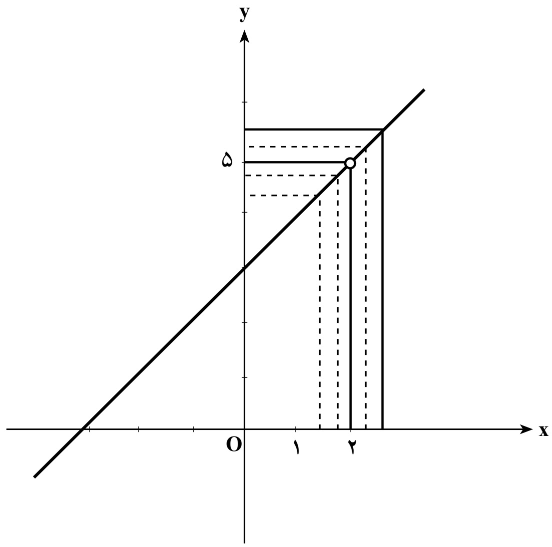
مثال ۱: حد تابع $q(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ را در $x = 2$ تعیین کنید.

حل: چون صورت و مخرج کسر در $x = 2$ برابر صفرند پس بر $x - 2$ بخش‌پذیرند، یعنی دارای عامل مشترک $x - 2$ می‌باشند، و چون $x \neq 2$ داریم $x - 2 \neq 0$ و می‌توان این عامل مشترک را از صورت و مخرج کسر حذف نمود ؛ بنابراین خواهیم داشت :

$$q(x) = \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 3)}{\cancel{x - 2}} = x + 3 \quad \text{و} \quad x \neq 2$$

و از آن‌جا :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3) = 2 + 3 = 5$$



نمودار تابع $x \neq ۲$ ، $q(x) = x + ۳$ یا $x \neq ۲$ ، $y = x + ۳$ نیز نشان می‌دهد که حد تابع $q(x) = \frac{x^۲ + x - ۶}{x - ۲}$ در $x = ۲$ برابر ۵ است.

مثال ۲: حد تابع $q(x) = \frac{۲x^۳ + x^۲ + ۲x + ۳}{x^۲ - x - ۲}$ را در $x = ۱$ به دست آورید.

حل: چون صورت و مخرج کسر در $x = -۱$ صفر می‌شوند، پس بر $x + ۱$ بخش‌پذیرند و خواهیم داشت :

$$\frac{۲x^۳ + x^۲ + ۲x + ۳}{x^۲ - x - ۲} = \frac{\cancel{(x+۱)}(۲x^۲ - x + ۳)}{\cancel{(x+۱)}(x - ۲)} = \frac{۲x^۲ - x + ۳}{x - ۲}$$

$$\lim_{x \to -۱} \frac{۲x^۳ + x^۲ + ۲x + ۳}{x^۲ - x - ۲} = \lim_{x \to -۱} \frac{۲x^۲ - x + ۳}{x - ۲} = \frac{۲(-۱)^۲ - (-۱) + ۳}{(-۱) - ۲} = \frac{۶}{-۳} = -۲$$

۲ــ گویا کردن کسرها: اگر تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ ، یکی یا هر دو، اصم باشند و حد آن‌ها در $x = x_۰$ برابر صفر باشد، آن‌گاه برای محاسبهٔ حد تابع $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ در $x = x_۰$ صورت یا مخرج یا هر دو را گویا می‌کنیم.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱: حد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x + ۴} - ۲}{x}$ در $x = ۰$ چگونه به‌دست می‌آید؟

حل: ابتدا با محاسبهٔ مقدار $f(x)$ برای برخی از مقادیر x که به عدد صفر نزدیک می‌شوند جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	−۱	−۰/۹	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	→	۰	.	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۰/۹	۱
f(x)	۰/۲۶۷۹	۰/۲۶۵۹	۰/۲۵۸۳	۰/۲۵۱۶	۰/۲۵۰۲	۰/۲۵۰۰۲	→		.	۰/۲۴۹۹	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۸	۰/۲۴۱	۰/۲۳۷	۰/۲۳۶

این جدول نشان می‌دهد که در $x=۰$ حد تابع $\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}$ برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

از طرفی چون حد صورت و مخرج کسر بالا در $x=۰$ برابر صفر است پس برای تعیین حد تابع از گویا کردن صورت کسر استفاده می‌کنیم. بدین‌منظور کسر را در $\frac{\sqrt{x+۴}+۲}{\sqrt{x+۴}+۲}=۱$ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}=\frac{(\sqrt{x+۴}-۲)(\sqrt{x+۴}+۲)}{x(\sqrt{x+۴}+۲)}=\frac{(x+۴)-۴}{x(\sqrt{x+۴}+۲)}$$

$$f(x)=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+۴}+۲)}=\frac{۱}{\sqrt{x+۴}+۲} \quad , \quad x\neq ۰$$

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{x+۴}+۲}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۲: **حد تابع** $q(x)=\frac{x^۲-۹}{۳-\sqrt{x+۶}}$ در $x=۳$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

حل: چون حد صورت و مخرج کسر در $x=۳$ صفر است پس برای تعیین حد تابع، مخرج کسر را گویا می‌کنیم.

$$\frac{x^۲-۹}{۳-\sqrt{x+۶}}=\frac{(x^۲-۹)(۳+\sqrt{x+۶})}{(۳-\sqrt{x+۶})(۳+\sqrt{x+۶})}=\frac{(x-۳)(x+۳)(۳+\sqrt{x+۶})}{۳-x}$$

$$=-(x+۳)(۳+\sqrt{x+۶})$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{۳-\sqrt{x+۶}}=\lim_{x\to ۳}-(x+۳)(۳+\sqrt{x+۶})$$

$$=-(۳+۳)(۳+\sqrt{۹})=-۳۶$$

مثال ۳: **حد تابع** $q(x)=\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{\sqrt{۲x-۱}-۳}$ را در $x=۵$ به‌دست آورید.

حل: برای تعیین حد، هم صورت کسر و هم مخرج کسر را گویا می‌کنیم.

$$\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{\sqrt{۲x-۱}-۳}=\frac{(۲-\sqrt{x-۱})(\sqrt{۲x-۱}+۳)(۲+\sqrt{x-۱})}{(\sqrt{۲x-۱}-۳)(\sqrt{۲x-۱}+۳)(۲+\sqrt{x-۱})}=\frac{(۴-x+۱)(\sqrt{۲x-۱}+۳)}{(۲x-۱-۹)(۲+\sqrt{x-۱})}$$

$$=\frac{-(\cancel{x-۵})(\sqrt{۲x-۱}+۳)}{۲(\cancel{x-۵})(۲+\sqrt{x-۱})}=\frac{-(\sqrt{۲x-۱}+۳)}{۲(۲+\sqrt{x-۱})}\qquad (x\neq -۵)$$

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{\sqrt{۲x-۱}-۳}=\lim_{x\to ۵}-\frac{\sqrt{۲x-۱}+۳}{۲(۲+\sqrt{x-۱})}=-\frac{\sqrt{۱۰-۱}+۳}{۲(۲+\sqrt{۵-۱})}=\frac{-۶}{۸}=\frac{-۳}{۴}$$

تمرین

هریک از حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{x-۴}{x^{۲}-۵x+۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{۲}+۲x-۳}{x-۱}$

پ) $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{x^{۲}-x-۲}{x^{۲}-۲x-۳}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۲x+۱}{۲x^{۲}+x-۳}$

ث) $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{۳x^{۳}+x^{۲}+x+۳}{x^{۲}+۲x+۱}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{x^{۲}-۵x+۶}$

چ) $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{۳x^{۲}-۱۲}{۲-x-x^{۲}}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۱}{x^{۲}-۲x+۱}$

خ) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{۴}-۲x+۱}{۲x^{۲}-۳x+۱}$

د) $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{x+\sqrt{x+۶}}{x+۲}$

ذ) $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{۴-x}$

ر) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\frac{x}{\sqrt{x}}$

ز) $\lim\limits_{x\to -۵}\frac{x+۵}{\sqrt{۳x+۱۶}-۱}$

ژ) $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{۲x+\sqrt{x+۱۸}}{\sqrt{۳x+۷}-۱}$

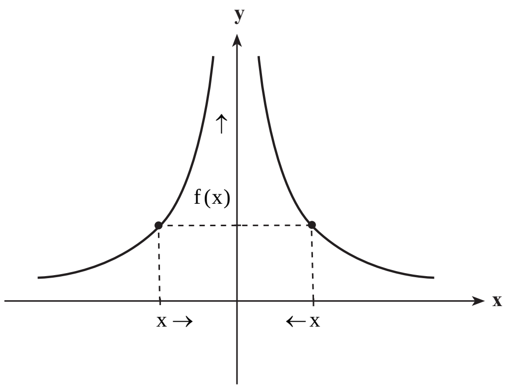
تعمیم حد

می‌دانیم تابع $f(x)=\frac{۱}{|x|}$ در صفر تعریف نشده است و برای رسم نمودار آن در حوالی صفر بهتر است رفتار این تابع را در حوالی صفر بررسی کنیم. به ازای مقدارهای نزدیک صفر برای x روشن است که مقدارهای $\frac{۱}{|x|}$ بسیار بزرگ می‌شوند و هرچه مقدارهای x را به صفر نزدیک‌تر کنیم

مقدارهای $\frac{۱}{|x|}$ بزرگ‌تر خواهند شد. جدول زیر درستی این مطلب را نشان می‌دهد.

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$\rightarrow ۰ .$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$\frac{۱}{|x|}$	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$\rightarrow .$	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰

از طریق این جدول می‌توان تشخیص داد که نمودار این تابع در حوالی صفر به شکل زیر است.



با نزدیک شدن متغیر x (در دامنه تابع) به صفر مقدارهای $\frac{۱}{|x|}$ بزرگ می‌شوند به‌گونه‌ای که $\frac{۱}{|x|}$ می‌تواند از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شود به شرط آن که x به اندازه کافی به صفر نزدیک شده باشد. در این حالت گوییم با نزدیک شدن x به صفر، $\frac{۱}{|x|}$ به سمت +. می‌رود و حد این تابع در صفر +. است و می‌نویسیم:

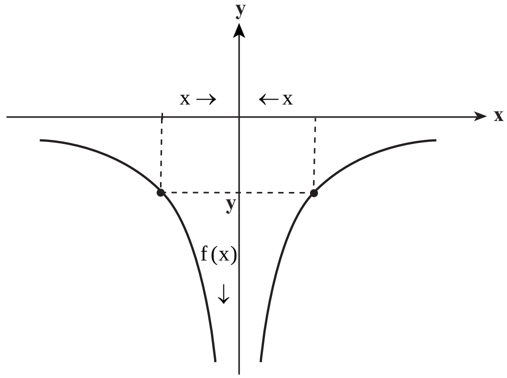
$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{|x|}=+.$$

به‌طور کلی برای هر تابع $y=f(x)$ که روی بازه I تعریف شده باشد و نقطه a به‌گونه‌ای باشد که بتوان از داخل I به a نزدیک شد و با نزدیک شدن متغیر x (در دامنه تابع) به a مقدارهای $f(x)$ بزرگ می‌شوند به‌گونه‌ای که $f(x)$ بتواند از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شود به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشد. در این حالت می‌گوییم با نزدیک شدن x به a، $f(x)$ به سمت +. می‌رود و حد این تابع در a، +. است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+.$$

در برخی موارد با نزدیک شدن متغیر x (در دامنه یک تابع) به نقطه‌ای مانند a مقدارهای تابع

از هر عدد از پیش داده شده‌ای کمتر می‌شوند. مثلاً در مورد تابع $y=-\frac{1}{|x|}$ با نزدیک شدن x به صفر مقدارهای تابع از هر عدد از پیش داده شده‌ای کمتر می‌شوند. نمودار این تابع به شکل زیر است.



در چنین حالاتی می‌گویند با نزدیک شدن x به a، f(x) به سمت $-.$ می‌رود و حد این تابع در a، $-.$ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to a} f(x) = -.$$

برای مثال $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{|x|} = -.$

در حالتی که a یک نقطه میانی دامنه تابع باشد و متغیر x فقط با مقادیر بزرگ‌تر از a به a نزدیک شود و مقدارهای f(x) از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شوند می‌گوییم حد راست تابع در a، $+.$ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +.$$

و اگر متغیر x فقط با مقادیر کوچک‌تر از a به a نزدیک شود و مقدارهای f(x) از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شوند می‌گوییم حد چپ تابع در a، $+.$ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +.$$

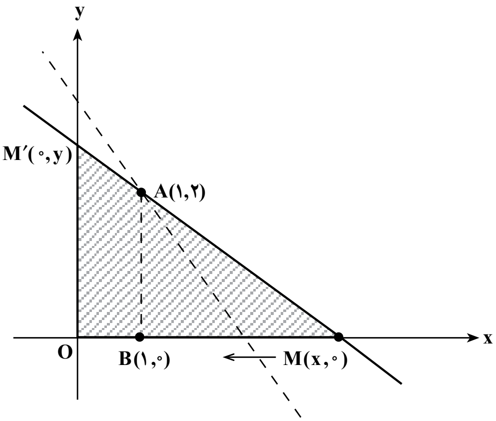
به‌طور مشابه حدهای راست و چپ با مقدار $-.$ تعریف می‌شوند.

برای مثال برای تابع $y=\frac{1}{x}$ داریم :

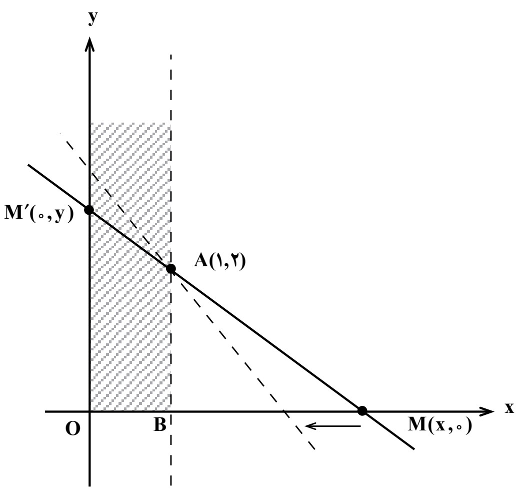
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +. \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -.$$

مثال ۱: در دستگاه محورهای مختصات xoy، از نقطهٔ $A=(1,2)$ خطی رسم می‌کنیم تا

محور xها را در نقطهٔ $M=(x,\circ)$ ، ۱   x ؛ و محور yها را در نقطهٔ $M'=(\circ,y)$ قطع کند. مساحت مثلث OMM' را به $S_{OMM'}$ نشان می‌دهیم. (شکل زیر)



وقتی خط مذکور حول نقطهٔ A چنان دوران کند که نقطهٔ M به نقطهٔ $B(۱,\circ)$ نزدیک شود، مساحت مثلث تغییر می‌کند (درواقع x از طرف راست به عدد ۱ نزدیک می‌شود ولی همواره $x\neq ۱$ است زیرا اگر $x=۱$ باشد، مثلثی وجود نخواهد داشت.)



با استفاده از تشابه دو مثلث OMM' و ABM می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{BM}{OM}=\frac{AB}{OM'}\Rightarrow\frac{x-۱}{x}=\frac{۲}{y}\Rightarrow\ y=\frac{۲x}{x-۱}$$

بنابراین مساحت مثلث OMM' برابر است با :

$$S_{OMM'} = \frac{۱}{۲} OM.OM' = \frac{۱}{۲} x.y = \frac{۱}{۲} x \times \frac{۲x}{x-۱} = \frac{x^۲}{x-۱}$$

$$S_{OMM'} = f(x) = \frac{x^۲}{x-۱}$$

حال اگر x (که بزرگ‌تر از ۱ است) از طرف راست به ۱ نزدیک شود، خواهیم داشت :

x	۱	.	.	۱/۰۰۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵	۲
f(x)	+.	.	.	۱۰۰۰۰۲	۱۰۰۰۲	۱۰۰۲	۱۰۲	۱۲/۱	۴/۵	۴

به‌طوری که دیده می‌شود، با نزدیک شدن x به عدد ۱ مقدار f(x) افزایش می‌یابد و هرگاه x به‌قدر کافی به عدد ۱ نزدیک شود، مقدار f(x) از هر عدد مثبت از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد. پس بنا به تعریف، می‌گوییم f(x) به سمت +. می‌رود. یعنی :

$$\lim_{x \to ۱^+} S_{OMM'} = +.$$

مثال ۲: تابع $f(x) = \frac{۱}{x^۲}$ $(x \neq ۰)$ را درنظر می‌گیریم و مقدارهای f(x) را برای xهایی که به صفر نزدیک می‌شوند محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	−۱	−۰/۲	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	−۰/۰۰۰۱	→	۰	.	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۲	۱
f(x)	۱	۲۵	$۱۰^۲$	$۱۰^۴$	$۱۰^۶$	$۱۰^۸$	→	+.	.	$۱۰^۸$	$۱۰^۶$	$۱۰^۴$	$۱۰^۲$	۲۵	۱

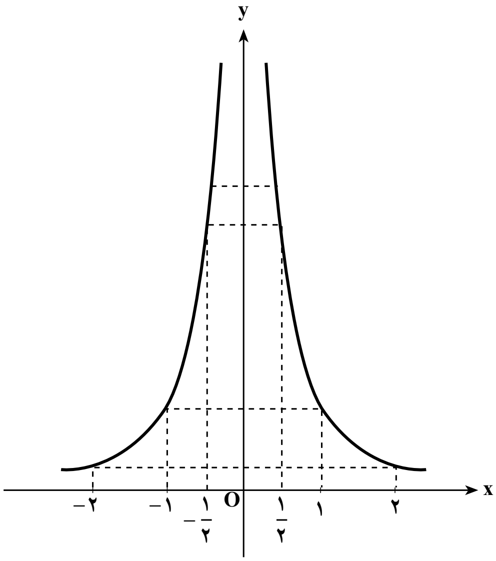
به‌طوری که دیده می‌شود وقتی x از طرف راست یا چپ به عدد صفر نزدیک می‌شود، مقادیر f(x) به‌تدریج بزرگ می‌شوند و اگر x به عدد صفر بسیار نزدیک شود، مقدار f(x) نیز بسیار بزرگ خواهد شد. بنابراین تابع $f(x) = \frac{۱}{x^۲}$ وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، به سمت +. می‌رود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to ۰} f(x) = \lim_{x \to ۰} \frac{۱}{x^۲} = +.$$

اینک با استفاده از نمودار، حد این تابع را در $x = ۰$ بررسی می‌کنیم.

x	−۲	−۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
y	$\frac{۱}{۴}$	۱	۴	تعریف نشده	۴	۱	$\frac{۱}{۴}$

نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، f(x) به سمت +. می‌رود.



مثال ۳: حد تابع $f(x)=\frac{-۵}{(x-۲)^{۲}}$ را در $x=۲$ تعیین کنید.

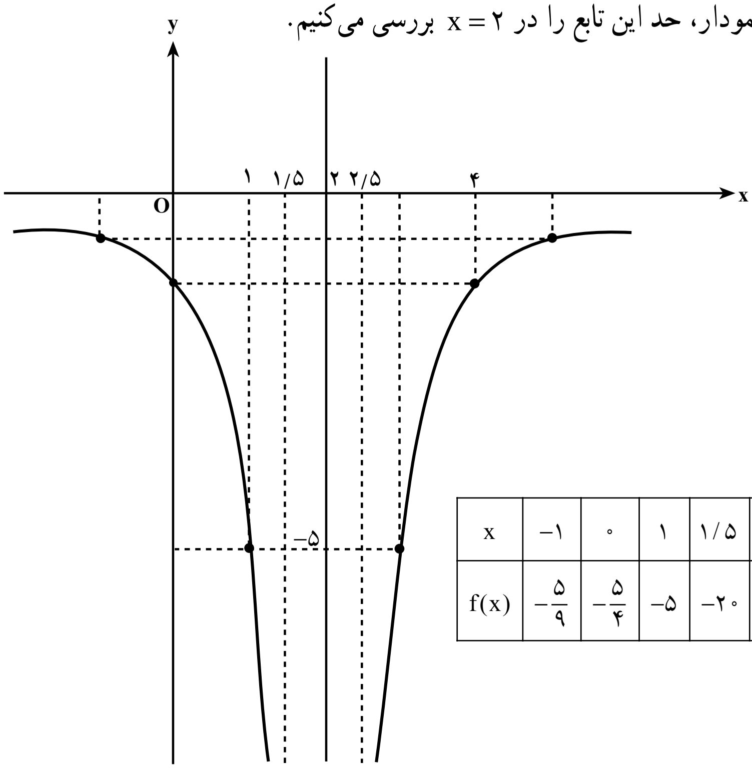
حل: جدول زیر مقدارهای تابع را برای بعضی از مقدارهای x نزدیک عدد ۲ نشان می‌دهد.

x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	۲	.	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳
f(x)	−۵	−۲۰	−۵۰۰	-۵×۱۰^{۴}	-۵×۱۰^{۶}	→	−.	− .	۵×۱۰^{۶}	-۵×۱۰^{۴}	−۵۰۰	−۲۰	−۵

به‌طوری که دیده می‌شود وقتی x از طرف راست یا چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، مقدارهای f(x) به‌تدریج کم می‌شوند، و وقتی x به‌قدر کافی به عدد ۲ نزدیک شود، f(x) از هر عدد منفی داده شده‌ای کمتر خواهد شد. بنابراین، بنا به تعریف می‌توان گفت که در تابع بالاوقتی x به ۲ نزدیک می‌شود، f(x) به سمت −. می‌رود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{-۵}{(x-۲)^{۲}}=-.$$

اینک با استفاده از نمودار، حد این تابع را در $x = ۲$ بررسی می‌کنیم.



x	−۱	۰	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۴
f(x)	$-\frac{۵}{۹}$	$-\frac{۵}{۴}$	−۵	−۲۰	تعریف نشده	−۲۰	−۵	$-\frac{۵}{۴}$

نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که وقتی x به عدد ۲ نزدیک می‌شود، f(x) به سمت −. می‌رود.

مثال ۴: برای یافتن حد $f(x) = \frac{۱}{x-۱}$ در $x = ۱$ جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	۱		.	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵	۲
f(x)	−۱	−۲	−۱۰	−۱۰۰	−۱۰۰۰	→	−.	+.	.	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰	۲	۱

به‌طوری که دیده می‌شود، هنگامی که x از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک می‌شود، مقادیر f(x) به‌تدریج کم می‌شوند و وقتی x به اندازه کافی به عدد ۱ نزدیک شود، f(x) از هر عدد منفی داده شده‌ای کمتر خواهد شد. پس f(x) به سمت −. می‌رود یعنی :

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۱}{x-۱} = -.$$

وقتی x از طرف راست به عدد ۱ نزدیک می‌شود، مقادیر f(x) به‌تدریج بزرگ می‌شوند و هنگامی که x به عدد ۱ به اندازه کافی نزدیک شود، مقدار f(x) از هر عدد داده شده‌ای بزرگ‌تر

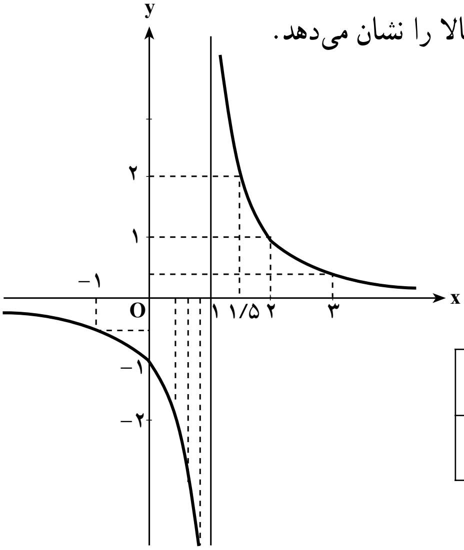
خواهد شد. پس f(x) به سمت +. می‌رود. یعنی در این حالت :

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{۱}{x-۱} = +.$$

بنابراین در تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ وقتی x به عدد ۱ نزدیک می‌شود داریم :

$$\lim_{x\to ۱^-}\left(f(x)=\frac{۱}{x-۱}\right) = -. \quad , \quad \lim_{x\to ۱^+}\left(f(x)=\frac{۱}{x-۱}\right) = +.$$

نمودار تغییرات تابع نیز درستی محاسبات بالا را نشان می‌دهد.



x	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳
f(x)	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	-۲	تعریف نشده	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$

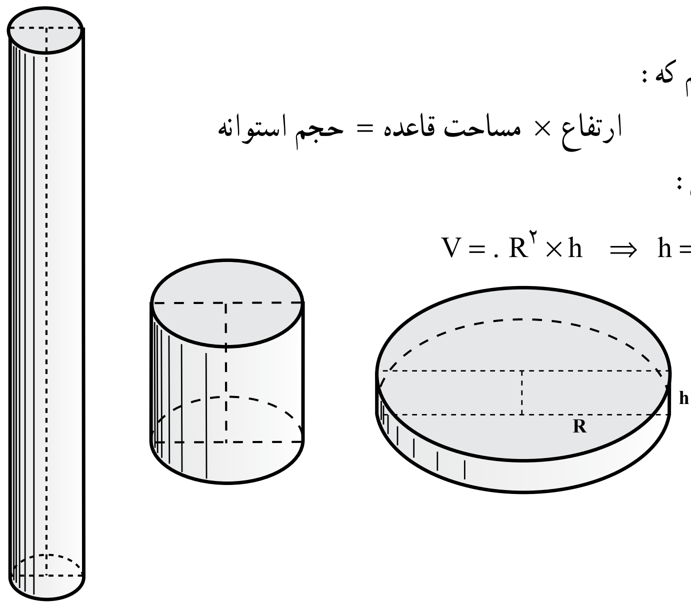
مثال ۵: استوانه‌ای به حجم ثابت V داده شده است. شعاع قاعدهٔ استوانه را R و ارتفاع آن را h می‌نامیم. می‌خواهیم تغییرات ارتفاع استوانه را هنگامی که شعاع قاعدهٔ استوانه تغییر می‌کند، بررسی کنیم.

می‌دانیم که :

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم استوانه

بنابراین :

$$V = .\, R^{۲} \times h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{.\, R^{۲}}$$



امّا دامنهٔ تغییرات R بازهٔ $(۰,+.)$ است بنابراین :

$$\lim_{R\to ۰^+} h = \lim_{R\to ۰^+} \frac{V}{.\ R^۲} = +.$$

پس دو کمیت R و h چنان به یکدیگر وابسته‌اند که هرگاه R به صفر نزدیک شود h به سمت +. می‌رود.

مثال ۶: حد دو تابع $f_۱(x) = x - ۳$ و $f_۲(x) = \frac{۱}{f_۱(x)} = \frac{۱}{x-۳}$ را در $x = ۳$ با محاسبهٔ مقادیر $f_۱(x)$ و $f_۲(x)$ متناظر با xهای نزدیک ۳ به‌کمک جدول زیر تعیین می‌کنیم.

x	۱	۲	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	→	۳	.	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱	۳/۵	۴
$x-۳$		−۱	−۰/۵	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	→	۰	.	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$\frac{۱}{x-۳}$		−۱	−۲	−۱۰	−۱۰۰	−۱۰۰۰	→	−.	+..	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰	۲	۱

به‌طوری که دیده می‌شود $\lim_{x\to ۳}(x-۳) = ۰$ اما $\lim_{x\to ۳}\frac{۱}{x-۳}$ برابر است با +. یا −.، بنابر آن‌که x از طرف راست یا از طرف چپ به ۳ نزدیک شود.

نکته: می‌دانیم که $\lim_{x\to ۰} x^۲ = ۰$ و $\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲} = +.$. ارتباط این‌گونه حدها در ماهیت کسرها نهفته است که وقتی مخرج کسر کوچک‌تر می‌شود، مقدار کسر بزرگ‌تر می‌گردد. بنابراین می‌توانیم چنین نتیجه بگیریم که :

الف ــ هرگاه $\lim_{x\to x_۰} f(x) = ۰$ و همواره $f(x)\ \ ۰$ (یعنی f(x) با مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود)، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{۱}{f(x)} = +.$$

ب ــ هرگاه $\lim_{x\to x_۰} f(x) = ۰$ و همواره $f(x)\ .\ ۰$ ، یعنی f(x) با مقادیر منفی به صفر نزدیک شود، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{۱}{f(x)} = -.$$

به مثال‌های زیر توجه کنید :

الف) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

ب) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

پ) $\lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{x} = -\infty$

ت) $\lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{x} = +\infty$

ث) $\lim_{x\to -3^+} \frac{4}{(x+3)^2} = +\infty$

ج) $\lim_{x\to 2} \frac{-11}{(x-2)^2} = -\infty$

چ) $\lim_{x\to 3^-} \frac{5}{(x-3)^3} = -\infty$

تمرین

هر یک از حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+3}{x-1}$

ب) $\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2}$

پ) $\lim_{x\to -2^-} \frac{4x}{(x+2)^2}$

ت) $\lim_{x\to -1^+} \frac{-1}{(x+1)^2}$

ث) $\lim_{x\to 3^+} \frac{2x+3}{(x-3)^2}$

ج) $\lim_{x\to 2^-} \frac{-x+3}{(x-2)^3}$

چ) $\lim_{x\to 2} \frac{3x+5}{x^2-4}$

ح) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4}{2x-1}$

خ) $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^4}$

د) $\lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^4}$

ذ) $\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x^2-9}$

ر) $\lim_{x\to 1} \frac{-5x^2}{x^2-1}$

ز) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

س) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan^2 x$

ش) $\lim_{x\to \frac{\pi}{9}^+} \tan(3x-\frac{\pi}{3})$

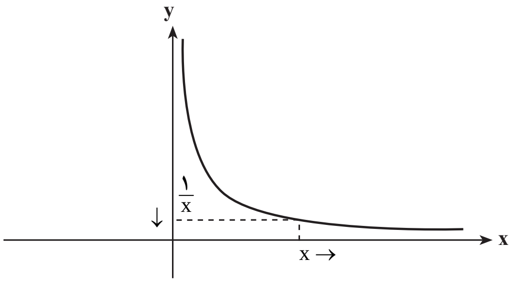
ص) $\lim_{x\to 0^+} \cot^3 x$

ض) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sin x}$

ط) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$

ظ) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-\cos x}$

ع) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}^-} \frac{\tan x+\sqrt{3}}{\tan x-\sqrt{3}}$



اگر تابعی مانند $y=f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a,+.)$ تعریف شده باشد و بخواهیم چگونگی نمودار آن را برای مقادیر بزرگ x تشخیص دهیم. باید با بزرگ شدن مقادیر x تشخیص دهیم $f(x)$ چگونه تغییر می‌کند. برای مثال برای تابع $y=\frac{۱}{x}$ با بزرگ شدن مقادیر x، مقدارهای $\frac{۱}{x}$ کوچک می‌شوند و به صفر نزدیک می‌شوند. نمودار این تابع برای مقادیر بزرگ x به شکل بالا است.

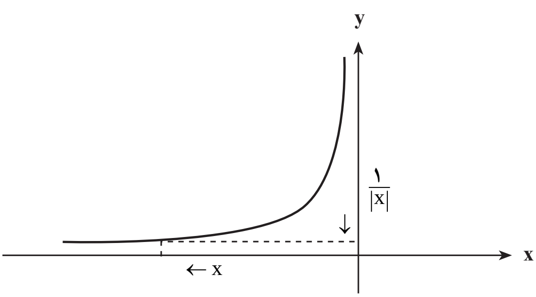
در این مورد می‌گویند با رفتن x به سمت $+.$ مقدار تابع $y=\frac{۱}{x}$ به صفر نزدیک می‌شود.

به‌طور کلی برای هر تابع $y=f(x)$ که روی بازه $(a,+.)$ تعریف شده باشد و با بزرگ شدن متغیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند به‌گونه‌ای که $f(x)$ بتواند به هر مقدار که بخواهیم به L نزدیک شود به شرط آن که x به اندازه کافی بزرگ شده باشد، در این حالت می‌گوییم با رفتن x به سمت $+.$ ، $f(x)$ به سمت L نزدیک می‌شود و حد این تابع در $+.$ برابر L است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to +.} f(x)=L$$

برای مثال : $\lim\limits_{x\to +.} \frac{۱}{x}=۰$

همچنین اگر تابعی مانند $y=f(x)$ در بازه‌ای مانند $(-.\,,a)$ تعریف شده باشد و بخواهیم چگونگی نمودار آن را برای مقادیر منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ x تشخیص دهیم، باید با کم شدن مقادیر x در اعداد منفی، تشخیص دهیم $f(x)$ چگونه تغییر می‌کند. برای مثال برای تابع $y=\frac{۱}{|x|}$ با کم شدن مقادیرx در اعداد منفی و بزرگ شدن آن‌ها از لحاظ قدر مطلق، مقدارهای $\frac{۱}{|x|}$ کوچک می‌شوند و به صفر نزدیک می‌شوند. نمودار این تابع برای مقادیر بزرگ x به شکل مقابل است.



در این مورد می‌گویند با رفتن x به سمت $-.$ مقدار تابع $y=\frac{۱}{|x|}$ به صفر نزدیک می‌شود.

به طور کلی برای هر تابع $y=f(x)$ که روی بازه $(-.\,,a)$ تعریف شده باشد و با کم شدن

مقادیر x در اعداد منفی، مقدارهای f(x) به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند به‌گونه‌ای که f(x) بتواند به هر مقدار که بخواهیم به L نزدیک شود به شرط آن که x به اندازه کافی در اعداد منفی کم شده باشد، در این حالت می‌گوییم با رفتن x به سمت -. ، f(x) به سمت L نزدیک می‌شود و حد این تابع در -. برابر L است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to -.} f(x) = L$$

برای مثال : $\lim_{x \to -.} \frac{۱}{|x|} = ۰$

مثال ۱: سیبی را به‌طور برابر میان دو نفر تقسیم می‌کنیم. به هر یک نصف سیب می‌رسد. اگر ۲ سیب را میان ۳ نفر به تساوی تقسیم کنیم به هر یک $\frac{۲}{۳}$ سیب می‌رسد و از تقسیم ۳ سیب میان ۴ نفر، سهم هر یک $\frac{۳}{۴}$ سیب می‌شود. این تقسیم را با افزودن یک سیب در مقابل افزایش یک نفر ادامه می‌دهیم. هنگامی که شمارهٔ نفرات به ۱۰۰ می‌رسد تعداد سیب‌ها ۹۹ تاست و سهم هر نفر $۰/۹۹ = \frac{۹۹}{۱۰۰}$ می‌شود و وقتی شمارهٔ نفرات ۱۰۰۰ باشد شمارهٔ سیب‌ها ۹۹۹ و سهم هر نفر $۰/۹۹۹ = \frac{۹۹۹}{۱۰۰۰}$ است. آشکار است هر قدر شمارهٔ نفرات بیش‌تر شود سهم هر نفر بیش‌تر می‌شود. اگر این روند را همچنان ادامه دهیم سرانجام سهم هر نفر چه خواهد شد؟

اگر شمارهٔ نفرات را با x و سهم هر نفر را که تابعی از x است با f(x) نشان دهیم خواهیم داشت :

$$f(x) = \frac{x-۱}{x}$$

پاسخ نهایی، یافتن حد تابع f در +. است، این مطلب را با تشکیل یک جدول بررسی و جواب را پیدا کنید.

مثال ۲: تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را درنظر می‌گیریم و مقادیر f(x) را برای xهای به‌قدر کافی بزرگ محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	→	+.
$f(x)=\frac{۱}{x}$	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	→	۰

این جدول نشان می‌دهد که وقتی x به سمت $+.$ می‌رود $\frac{۱}{x}$ به صفر نزدیک می‌شود. یعنی :

$$\lim_{x \to +.} \frac{۱}{x} = ۰$$

هم‌چنین مقادیر f(x) برای xهای منفی که از لحاظ قدرمطلق بزرگ هستند را محاسبه و در جدول زیر می‌نویسیم :

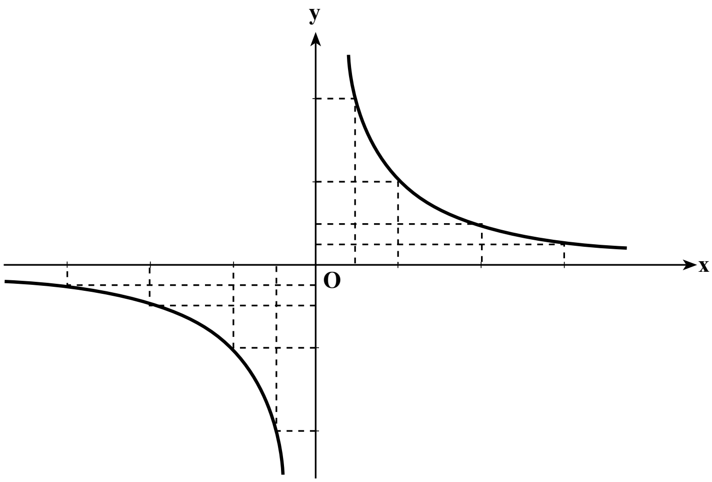
x	$\boxed{-.}$	.	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰
f(x)	$\boxed{۰}$	.	−۰/۰۰۰۰۱	−۰/۰۰۰۱	−۰/۰۰۱	−۰/۰۱	−۰/۱

به‌طوری که دیده می‌شود وقتی x به سمت $-.$ می‌رود، $\frac{۱}{x}$ به ۰ نزدیک می‌شود یعنی

$$\lim_{x \to -.} \frac{۱}{x} = ۰$$

بنابراین داریم : $\lim_{x \to +.} \frac{۱}{x} = ۰$ و $\lim_{x \to -.} \frac{۱}{x} = ۰$

نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که درxهای مثبت بزرگ و xهای منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ، f(x) به ۰ نزدیک می‌شود.



x	−۲	−۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
y	$-\frac{۱}{۲}$	−۱	−۲	تعریف نشده	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$

مثال ۳: در تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ مقادیر تابع را برای مقدارهایی از x که در جدول زیر نوشته‌ایم محاسبه می‌کنیم و در جای خود می‌نویسیم و از روی آن حد تابع را در .+ در .- مشخص می‌کنیم.

x	−.	.	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	→	+.
f(x)	۲	.	۲/۰۰۰۰۵	۲/۰۰۰۵	۲/۰۰۵	۲/۰۵	$-\frac{۱}{۲}$	۱/۹۵۱	۱/۹۹۵	۱/۹۹۹۵	۱/۹۹۹۹۵	→	۲

جدول بالا نشان می‌دهد که :

$$\lim_{x\to +.}\frac{۲x-۱}{x+۲}=۲ \quad , \quad \lim_{x\to -.}\frac{۲x-۱}{x+۲}=۲$$

نکته: دیدیم که $\lim_{x\to +.}\frac{۱}{x}=۰$ و $\lim_{x\to -.}\frac{۱}{x}=۰$ است. هم‌چنین $\lim_{t\to ۰}t=۰$، پس اگر $t=\frac{۱}{x}$ خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to ..}\frac{۱}{x}=\lim_{t\to ۰}t=۰$$

به این ترتیب با استفاده از این تعویض متغیر می‌توان محاسبهٔ حد در . را به محاسبهٔ حد در صفر $(t\to ۰)$ بازگردانید.

اینک با استفاده از مطلب بالا حد $\frac{۲x-۱}{x+۲}$ را در .) به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۲x-۱}{x+۲}=\frac{x(۲-\frac{۱}{x})}{x(۱+\frac{۲}{x})}=\frac{۲-\frac{۱}{x}}{۱+\frac{۲}{x}} \quad , \quad x\neq ۰$$

$$\frac{۱}{x}=t \;\Rightarrow\; \lim_{x\to ..}\frac{۲x-۱}{x+۲}=\lim_{t\to ۰}\frac{۲-t}{۱+۲t}=\frac{۲-۰}{۱+۰}=۲$$

بنابراین حد کسر بالا در .) برابر با ۲ است.

مثال ۴: حد $\frac{۶x-۱}{۲x+۳}$ را در .) تعیین کنید.

می‌توان نوشت :

$$\frac{۶x-۱}{۲x+۳}=\frac{x(۶-\frac{۱}{x})}{x(۲+\frac{۳}{x})}=\frac{۶-\frac{۱}{x}}{۲+\frac{۳}{x}} \quad , \quad \frac{۱}{x}=t$$

$$\lim_{x\to ..} \frac{۶x-۱}{۲x+۳} = \lim_{t\to ۰} \frac{۶-t}{۲+۳t} = \frac{۶-۰}{۲+۰} = ۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ..} \frac{۶x-۱}{۲x+۳} = ۳$$

مثال ۵: کسر $\frac{-۲x^۲+x-۱}{x^۲+۷x+۲}$ داده شده است. می‌خواهیم حد این کسر را در .) تعیین کنیم.

چون $x\neq ۰$ است،
$$\frac{-۲x^۲+x-۱}{x^۲+۷x+۲} = \frac{x^۲(-۲+\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲})}{x^۲(۱+\frac{۷}{x}+\frac{۲}{x^۲})}$$

$$\frac{۱}{x} = t \Rightarrow \lim_{x\to ..} f(x) = \lim_{t\to ۰} \frac{-۲+t-t^۲}{۱+۷t+۲t^۲} = \frac{-۲+۰-۰}{۱+۰+۰} = \frac{-۲}{۱} = -۲$$

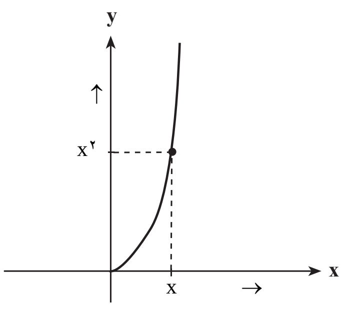
$$\Rightarrow \lim_{x\to ..} \frac{-۲x^۲+x-۱}{x^۲+۷x+۲} = -۲$$

مثال ۶: حد $\frac{۳x+۱}{x+\sqrt{x+۱}}$ را در .+ ، تعیین می‌کنیم.

$$\frac{۳x+۱}{x+\sqrt{x+۱}} = \frac{x(۳+\frac{۱}{x})}{x(۱+\sqrt{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}})} \quad , \quad \frac{۱}{x} = t \quad , \quad ۰.\ t$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +.} f(x) = \lim_{t\to ۰^+} \frac{۳+t}{۱+\sqrt{t+t^۲}} = \frac{۳}{۱} = ۳$$

در محاسبه حد توابع در .+ و .− ممکن است با بزرگ شدن مقادیر x، مقدارهای f(x) به عدد خاصی نزدیک نشوند و مقادیر f(x) نیز بزرگ شوند و از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شوند. مثلاً در مورد تابع $y=x^۲$ وضعیت به همین شکل است و با بزرگ شدن x، مقدار $x^۲$ نیز بزرگ می‌شود و از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر می‌شود. نمودار تابع نیز این مطلب را نشان می‌دهد.



این به معنای آن است که با رفتن x به سمت $+\infty$ ، $x^{۲}$ نیز به سمت $+\infty$ می‌رود. در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده است اگر با رفتن x به سمت $+\infty$ ، f(x) نیز به سمت $+\infty$ برود. گوییم حد این تابع در $+\infty$ ، $+\infty$ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

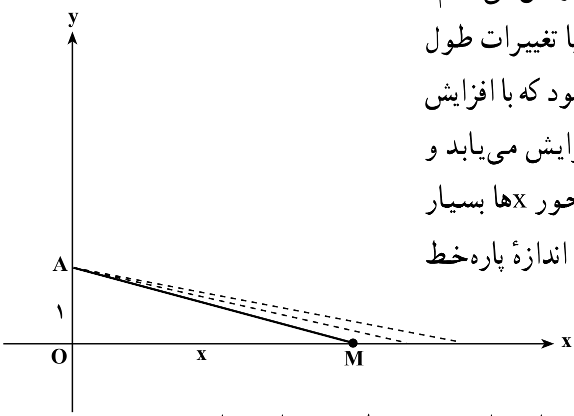
برای مثال $\lim_{x\to+\infty} x^{۲}=+\infty$.

اما اگر با رفتن x به سمت $+\infty$ ، f(x) به سمت $-\infty$ برود. گوییم حد این تابع در $+\infty$ ، $-\infty$ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

برای مثال $\lim_{x\to+\infty} -x^{۲}=-\infty$. به شکل مشابه مفاهیم $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ تعریف می‌شوند. مثلاً $\lim_{x\to-\infty} x^{۲}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} -x^{۲}=-\infty$.

مثال ۱: نقطهٔ ثابت A را به عرض ۱ روی محور yها و نقطهٔ متغیر M را به طول $x\,(x>۰)$ روی محور طول‌ها درنظر گرفته از A به M وصل می‌کنیم.



آن‌گاه تغییرات طول پاره‌خط AM را با تغییرات طول پاره‌خط OM مقایسه می‌کنیم. دیده می‌شود که با افزایش طول OM اندازهٔ پاره‌خط AM نیز افزایش می‌یابد و هنگامی که نقطهٔ M در جهت مثبت محور xها بسیار دور شود، یعنی x به سمت $+\infty$ برود، اندازهٔ پاره‌خط AM نیز به سمت $+\infty$ می‌رود.

اگر طول پاره‌خط AM را که تابعی از x است f(x) بنامیم، خواهیم داشت :

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱}$$

زیرا

$$OA=۱\ ,\ OM=x\ ,\ A\hat{O}M=۹۰ \Rightarrow AM^{۲}=OM^{۲}+OA^{۲}$$
$$=x^{۲}+۱$$

درنتیجه

$$AM=\sqrt{x^{۲}+۱}$$