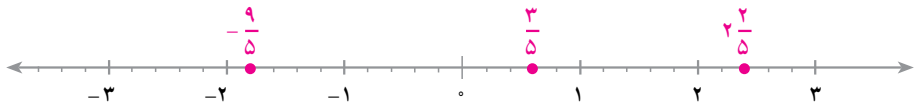


اعداد حقیقی و آمار



مجموعه‌ی عددهای حقیقی

نمایش عددهای حقیقی



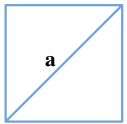
تا این جا با عددهای گویا و نمایش آن‌ها روی محور آشنا شده‌اید. هر عدد گویا یک نقطه‌ی نمایش روی محور دارد؛ مثلاً $\frac{3}{5}$ ، $\frac{2}{5}$ و $-\frac{9}{5}$ عددهایی گویا هستند. نقاط نمایش این عددها، روی محور بالا مشخص شده است.

عددهایی چون 0 ، -2 ، $+3$ ، $-\frac{3}{2}$ ، $\frac{25}{100}$ هم از جمله اعداد گویا هستند. این عددها را می‌توانیم به ترتیب، به شکل کسرهای $\frac{0}{1}$ ، $\frac{-2}{1}$ ، $\frac{3}{1}$ ، $\frac{-3}{2}$ ، $\frac{25}{100}$ بنویسیم.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که

آیا غیر از عددهای گویا، اعدادی دیگر وجود دارند؟

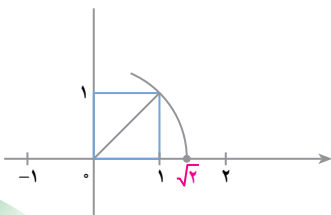
برای پاسخ دادن به این سؤال، مربعی به ضلع 1 را در نظر بگیرید. با به کار بردن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه، می‌توانید طول قطر این مربع را حساب کنید.



$$a^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$a = \sqrt{2}$$

می‌توانیم روی محور اعداد، نقطه‌ای را به دست آوریم که طول آن $\sqrt{2}$ باشد.



شکل روبه‌رو، چگونگی این کار را نشان می‌دهد.

آیا $\sqrt{2}$ عددی گویاست؟

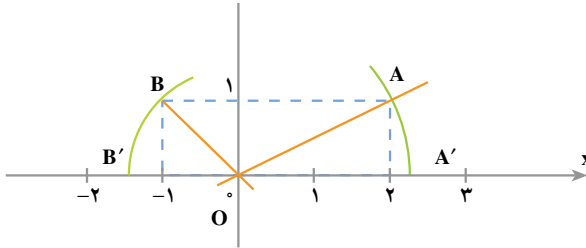
در دبیرستان برای شما ثابت خواهند کرد که $\sqrt{2}$ عددی گویا نیست؛ یعنی، کسری متعارفی را نمی‌توان یافت که مساوی $\sqrt{2}$ باشد. به‌طور کلی، ثابت می‌شود که اگر عدد طبیعی n مجذور کامل نباشد، \sqrt{n} عددی گویا نیست؛ مثلاً عددهای $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ و $\sqrt{6}$ گویا نیستند.

این مطلب نشان می‌دهد که روی محور نقاطی هست که طول آن‌ها عددی گویا نیست. این نقاط، عددهایی را نمایش می‌دهند که عددهای اصم یا گنگ نامیده می‌شوند. مجموعه‌ی تمام عددهای گویا و عددهای اصم را **مجموعه‌ی اعداد حقیقی** می‌نامیم.

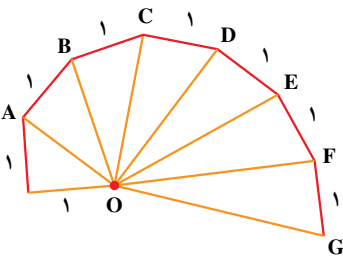
کار در کلاس

۱- به شکل زیر دقت کنید. طول پاره‌خط‌های OA و OB را حساب کنید.

$OA =$ _____ $OB =$ _____



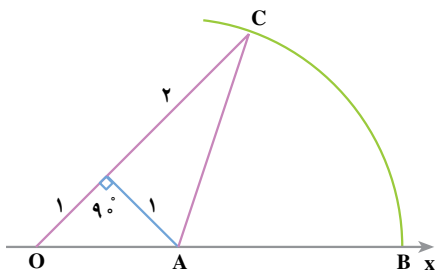
هر یک از نقاط A' و B' چه عددی را نمایش می‌دهند؟



۲- در شکل سمت چپ، تعدادی مثلث

قائم‌الزاویه رسم شده است که در هر کدام یک ضلع زاویه‌ی قائمه به طول ۱ واحد است. طول پاره‌خط‌های OA ، OB ، OC ، و ... را حساب کنید و در کنار آن‌ها بنویسید.

(به تصویر روی جلد کتاب توجه کنید)



۳- در شکل سمت چپ، به مرکز A
و شعاع AC یک دایره زده‌ایم تا محور Ox
را در نقطه‌ی B قطع کند. نقطه‌ی B چه
عددی را نمایش می‌دهد؟

محور عددهای حقیقی

در صفحه‌ی قبل دیدید که هر نقطه از محور، یک عدد حقیقی را نشان می‌دهد. اعداد گویا هم از جمله عددهای حقیقی هستند. مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با حرف \mathbb{R} نمایش می‌دهیم؛ بنابراین:

$$1 \in \mathbb{R} \quad -5 \in \mathbb{R} \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \quad -\frac{3}{5} \in \mathbb{R} \quad \pi \in \mathbb{R}$$

مجموعه‌ی اعداد حقیقی شامل همه‌ی عددهایی است که تاکنون با آن‌ها آشنا شده‌اید. مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از \mathbb{Z} را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$A = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

یا به اختصار می‌توانیم به صورت $A = \{x | x > 0\}$ نشان دهیم. نمودار زیر، نمایش این مجموعه را روی محور نشان می‌دهد.



هریک از عددهای ۶، $\frac{2}{5}$ ، $\frac{11}{3}$ به این مجموعه تعلق دارند. عدد ۲ و عددهای کوچک‌تر از

۲ عضو این مجموعه نیستند، به همین دلیل، روی عدد ۲ یک دایره‌ی توخالی می‌گذاریم.

$$B = \{x | -3 < x < 2\}$$

حالا فرض کنیم

این مجموعه شامل عددهای حقیقی بین ۳- و ۲ است؛ یعنی هر عددی که از ۲ کوچک‌تر و از ۳- بزرگ‌تر باشد، عضو این مجموعه است. نمودار این مجموعه به صورت زیر است. چرا در شروع و پایان نمودار، از دایره‌های توخالی استفاده کرده‌ایم؟



با توجه به تعریف این مجموعه، علامت \in یا \notin قرار دهید.

$-2 \in B$, $-4 \in B$, $\sqrt{2} \in B$, $2 \in B$
 $-3 \in B$, $\frac{1}{2} \in B$, $0 \in B$, $3/5 \in B$

کار در کلاس

۱- نمودار زیر، مجموعه $A = \{x | x < 2\}$ را نمایش می‌دهد.



درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید.

$1 \in A$ _____ $2 \in A$ _____ $0 \in A$ _____ $-2/3 \in A$ _____
 $4 \in A$ _____ $0/3185 \in A$ _____ $\sqrt{2}-1 \in A$ _____

۲- در شکل زیر، نمودار مجموعه $B = \{x | -1 \leq x\}$ داده شده است.
 $-1 \leq x$ را بخوانید (« x بزرگ‌تر از -1 یا مساوی با آن است.»)
 چون عدد -1 نیز به این مجموعه تعلق دارد، دایره‌ی ابتدا را توپر در نظر می‌گیریم.



درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید.

$-1 \in B$ _____ $2 \in B$ _____ $-1/2 \in B$ _____ $0/95 \in B$ _____

۳- نمایش هر مجموعه را روی محور مقابل آن مشخص کنید.

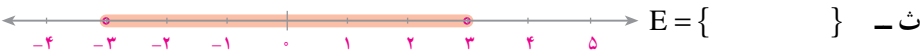
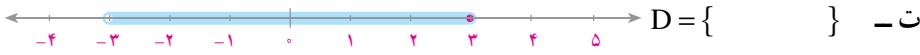
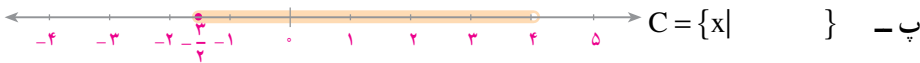


۴- نمایش هر مجموعه را روی محور مقابل آن مشخص کنید.





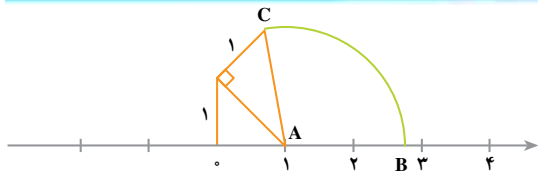
۵- مجموعه‌هایی را که مشخص شده‌اند، بیان کنید.



۶- با توجه به تمرین قبل، درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را

مشخص کنید.

- $-2 \in A$ _____ $-3 \in B$ _____ $-\frac{3}{2} \in C$ _____ $4 \in C$ _____
 $-3 \in D$ _____ $2 \in E$ _____ $-3 \in E$ _____ $3 \in E$ _____



۱- در شکل مقابل، طول AC را حساب کنید. به مرکز A و شعاع AC یک دایره زده‌ایم تا محور را در نقطه‌ی B قطع کند. نقطه‌ی B چه عددی را نمایش

می‌دهد؟ آیا این عدد به مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت تعلق دارد؟

۲- عدد $\sqrt{19}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ آیا این عدد به مجموعه‌ی

$\{x | x > 3\}$ تعلق دارد؟

۳- نمایش هر یک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور مشخص کنید.

$A = \{x | -2 < x < 3\}$

$B = \{x | -1 < x \leq 3\}$

$C = \{x | x \leq 3\}$

$D = \{x | 3 \leq x\}$



نمودار ستونی

نمره‌های درس ریاضی دانش‌آموزان کلاس سوم الف در یک مدرسه‌ی راهنمایی، در امتحان ماهانه به صورت زیر است:

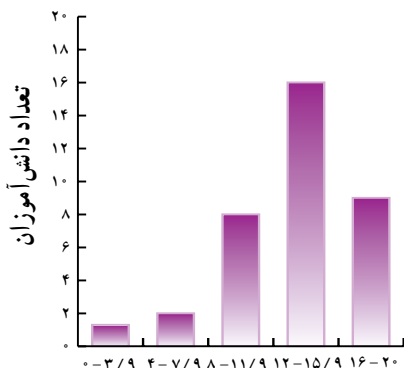
۱۲/۵	۱۳	۱۲	۱۳/۵	۱۴	۱۱	۱۳	۹	۸	۱۵	۱۴	۱۹
۱۵	۱۴	۱۰/۵	۱۱/۵	۱۵	۱۸	۱۷	۱۴	۱۶	۱۸	۱۵	۹/۵
۶	۱۲/۵	۲۰	۱۸/۵	۱۷	۱۵/۵	۱۶/۵	۱۱	۸/۵	۷	۳	۱۳

ابتدا نمره‌ها را به ترتیب از بیشترین نمره تا کمترین نمره مرتب می‌کنیم؛ سپس، برای بررسی وضع کلاس، نمره‌ها را به ۵ دسته با فاصله‌های مساوی تقسیم می‌کنیم.

خیلی بد	۰ تا ۳/۹
بد	۴ تا ۷/۹
ضعیف	۸ تا ۱۱/۹
خوب	۱۲ تا ۱۵/۹
خیلی خوب	۱۶ تا ۲۰

اکنون، جدول داده‌ها را برای نمره‌های کلاس تهیه می‌کنیم. برای این کار، نمره‌ها را

یکی یکی می‌خوانیم و برای هر نمره، در قسمت مربوطه یک خط می‌کشیم. خط‌ها را در دسته‌های پنج‌تایی می‌کشیم تا شمردن آن‌ها راحت باشد. جدول را کامل کنید. نمودار ستونی نمره‌های کلاس را در سمت چپ ملاحظه کنید.



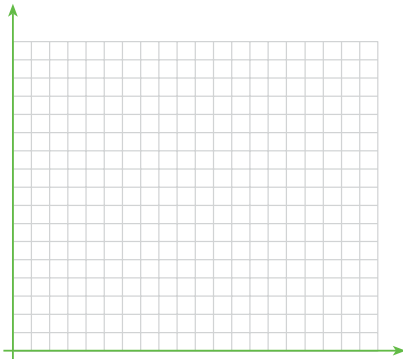
دسته‌ها	خط نشان	فراوانی هر دسته
۰ تا ۳/۹	/	۱
۴ تا ۷/۹	//	۲
۸ تا ۱۱/۹	### ///	۸
۱۲ تا ۱۵/۹	### ### ### /	۱۶
۱۶ تا ۲۰		۹
جمع کل		

نمره‌های ریاضی کلاس سوم ب از همان مدرسه‌ی راهنمایی به صورت زیر است.

۱۵	۱۴	۸	۷	۳	۲	۳/۵	۱۸	۱۶	۱۵
۵	۱۴	۱۳/۵	۱۸/۵	۱۷	۱۵/۵	۱۴	۱۶	۲۰	۱۳
۱۱	۱۰	۸	۹	۱۷	۱	۱۶/۵	۱۷	۱۵/۵	۱۵
۱۴	۱۳	۱۹	۱۴/۵	۱۷/۵	۱۱	۱۰	۱۲		

جدول داده‌ها را برای نمره‌های این کلاس تهیه کنید و نمودار ستونی آن را

بکشید.



فراوانی	خط نشان	دسته‌ها
		۰ تا ۳/۹
		۴ تا ۷/۹
		۸ تا ۱۱/۹
		۱۲ تا ۱۵/۹
		۱۶ تا ۲۰
	—	جمع کل



۱- قد دانش‌آموزان یک کلاس، بر حسب سانتی‌متر به صورت زیر داده شده است. جدول

داده‌ها و نمودار ستونی آن را تهیه کنید.

۱۳۵	۱۳۸	۱۲۲	۱۳۶/۵	۱۳۵/۲	۱۳۰/۸	۱۲۸	۱۳۴/۵	۱۳۲	۱۳۵
۱۲۹/۵	۱۳۰/۵	۱۲۵/۶	۱۲۴/۵	۱۳۱/۳	۱۲۸/۵	۱۳۱/۵	۱۲۹/۵	۱۲۸	۱۳۲/۴
۱۳۴	۱۳۰/۵	۱۲۷/۲	۱۳۲/۷	۱۳۶/۵	۱۳۷/۲	۱۳۱	۱۳۰/۵	۱۲۳	۱۲۷
۱۲۳	۱۲۶	۱۳۳/۵	۱۳۴	۱۳۲/۶	۱۲۹/۵	۱۳۸	۱۳۷		

دسته‌ها را (۱۲۲ تا ۱۲۵/۹)؛ ...؛ (۱۳۴ تا ۱۳۸) بگیرید.

۲- از ۳۵ دانش‌آموز مدرسه‌ی خود ماه تولدشان را بپرسید و یادداشت کنید؛ سپس، جدول

داده‌ها و نمودار ستونی اطلاعات به دست آمده را تهیه کنید.



میانگین

نمره‌های زهره و نرگس در امتحان‌های ماهانه‌ی ریاضی در سال گذشته به صورت زیر است.

زهره: ۱۴ , ۱۳ , $۱۲/۵$, ۱۷ , ۱۰ , ۱۶ , ۱۲ , $۱۷/۵$

نرگس: ۱۹ , $۱۱/۵$, $۱۷/۵$, ۱۳ , $۱۳/۵$, ۱۴ , ۱۳ , $۱۸/۵$

به نظر شما، نمره‌های کدام یک بهتر است؟

یک راه مقایسه، محاسبه‌ی میانگین نمره‌هاست. برای محاسبه‌ی میانگین، نمره‌های هر یک را

جمع می‌کنیم و به تعداد درس‌ها تقسیم می‌کنیم.

$$\text{میانگین نمره‌های زهره} = \frac{۱۱۲}{۸} = ۱۴$$

$$\text{میانگین نمره‌های نرگس} = \frac{۱۲۰}{۸} = ۱۵$$

بنابراین، به نظر می‌رسد که در مجموع، نرگس نمره‌های بهتری گرفته است.

کار در کلاس

محصول پنبه‌ی دو مزرعه در پنج سال گذشته به صورت زیر بوده است (اعددها

برحسب تن است).

۱۲ , ۱۵ , ۱۳ , ۲۰ , ۸

مزرعه‌ی اول

۱۱ , ۱۷ , ۱۸ , ۷ , ۱۳

مزرعه‌ی دوم

میانگین محصول پنبه‌ی هر مزرعه را در پنج سال گذشته حساب کنید.

کدام مزرعه به طور متوسط تولید بیشتری دارد؟

برای مقایسه‌ی نمره‌های دو کلاس سوم الف و ب که در صفحه‌های قبل بیان شد، باید میانگین

آن‌ها را حساب کنیم اما محاسبه‌ی میانگین نمره‌های یک کلاس، به صورتی که در صفحه‌ی قبل

دیدیم، دشوار است. اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد، محاسبه‌ی میانگین به روشی دیگر انجام می‌شود.

نمره‌های دانش‌آموزان کلاس الف را در نظر بگیرید. در جدول زیر، ابتدا متوسط هر دسته را پیدا کنید. متوسط دسته ۰ تا ۳/۹ عدد ۲ است. در این دسته به جای هر عددی که وجود دارد، عدد ۲ را در نظر می‌گیریم.

پس، در این کلاس به جای چه نمره‌ای، عدد ۲ را در نظر می‌گیریم؟ به همین ترتیب، در هر دسته به جای عددهای آن دسته، متوسط دسته را در نظر می‌گیریم.

حاصل ضرب فراوانی در متوسط هر دسته، مجموع داده‌های آن دسته را به طور تقریبی نشان می‌دهد.

جدول را کامل کنید و میانگین تقریبی داده‌ها را به دست آورید.

دسته‌ها	خط نشان	متوسط دسته‌ها	فراوانی	فراوانی × متوسط
۰ تا ۳/۹	/	$\frac{0+3/9}{2} \approx 2$		
۴ تا ۷/۹	//			
۸ تا ۱۱/۹	### ///			
۱۲ تا ۱۵/۹	### ### ### /			
۱۶ تا ۲۰	### ////			
جمع کل	_____	_____		

$$= \frac{\text{مجموع نمره‌ها}}{\text{تعداد دانش‌آموزان}} \approx \text{میانگین نمره‌های دانش‌آموزان کلاس الف}$$

چرا میانگینی که به دست می‌آید، تقریبی است؟
با استفاده از ماشین حساب، مقدار میانگین را به طور دقیق محاسبه کنید و اختلاف آن را با میانگین تقریبی به دست آورید.



جدول زیر از کار در کلاس سه صفحه قبل را برای کلاس ب کامل کنید و میانگین نمره‌های دانش‌آموزان کلاس را حساب کنید.
نمره‌های دانش‌آموزان این کلاس بهتر است یا کلاس الف؟

دسته‌ها	خط نشان	متوسط دسته‌ها	فراوانی	فراوانی \times متوسط
۰ تا ۳/۹				
۴ تا ۷/۹				
۸ تا ۱۱/۹				
۱۲ تا ۱۵/۹				
۱۶ تا ۲۰				
جمع کل				

_____ \approx میانگین کلاس ب

تمرین



- ۱- میانگین قد دانش‌آموزان از تمرین ۱ سه صفحه قبل، را حساب کنید.
- ۲- یک کارخانه، دو کارگاه تهیه لامپ دارد. برای مقایسه‌ی کار دو کارگاه، از هر کدام ۳۰ لامپ به‌طور تصادفی انتخاب شده و طول عمر لامپ‌ها برحسب ساعت اندازه‌گیری شده است. نتیجه‌ی اندازه‌گیری به‌صورت زیر است.

کارگاه اول

۱۵۷	۱۵۴	۱۵۷	۱۶۸	۱۷۲	۱۶۳	۱۵۸	۱۵۷	۱۶۱	۱۷۱
۱۵۳	۱۶۹	۱۵۸	۱۶۵	۱۵۶	۱۵۶	۱۵۹	۱۶۵	۱۶۳	۱۶۱
۱۶۳	۱۶۸	۱۶۷	۱۵۹	۱۵۱	۱۵۳	۱۵۸	۱۶۷	۱۶۹	۱۷۰

کارگاه دوم

۱۶۰	۱۵۸	۱۵۳	۱۵۴	۱۶۵	۱۶۸	۱۶۹	۱۷۱	۱۷۲	۱۶۳
۱۶۱	۱۶۸	۱۵۶	۱۵۱	۱۵۹	۱۶۵	۱۶۳	۱۶۸	۱۶۱	۱۶۰
۱۵۴	۱۵۹	۱۶۳	۱۷۲	۱۷۰	۱۶۸	۱۶۳	۱۵۴	۱۵۸	۱۵۳

دسته‌ها را به‌صورت زیر انتخاب کنید. جدول داده‌ها را در هر دو مورد تهیه کرده و با محاسبه‌ی

میانگین، دو کارگاه را با هم مقایسه کنید.

(۱۵۰ تا ۱۵۴/۹)، (۱۵۵ تا ۱۵۹/۹)، (۱۶۰ تا ۱۶۴/۹)، (۱۶۵ تا ۱۶۹/۹)، (۱۷۰ تا ۱۷۵)