

حساب و مجموعه‌های اعداد



مجموعه‌ی عددهای طبیعی

عددهای طبیعی

عددهای $1, 2, 3, \dots$ اعداد طبیعی هستند. با این عددها در دوره‌ی ابتدایی آشنا شده‌اید و از آن‌ها برای شمردن استفاده می‌کنید.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به صورت

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

نشان می‌دهند.

کار در کلاس

محور اعداد را رسم کرده و اعداد طبیعی را روی آن مشخص کنید؛ عبارت‌های زیر را بانوشتن \in یا \notin کامل کید.

$$1 \bigcirc \mathbb{N}, \quad -2 \bigcirc \mathbb{N}, \quad \frac{2}{5} \bigcirc \mathbb{N}, \quad 135 \bigcirc \mathbb{N}, \quad \dots$$

– کوچک‌ترین عدد طبیعی را بنویسید.

– آیا می‌توان بزرگ‌ترین عدد طبیعی را مشخص کرد؟ چرا؟

جمع و ضرب اعداد طبیعی را یاد گرفته‌اید و می‌دانید که مجموع هر دو عدد طبیعی، عددی طبیعی است و حاصل ضرب هر دو عدد طبیعی نیز عددی طبیعی است.



عدد ۶ را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بنویسید (همهی حالت‌های ممکن را بنویسید). آن‌گاه با استفاده از آن، مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۶ را بنویسید.

عدد اول

۱- عددهای زیر را در صورت امکان به ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک تبدیل کنید.

$$15 = 3 \times 5 \quad 8 = \quad 5 = \quad 4 = \quad 14 =$$

$$7 = \quad 9 = \quad 10 = \quad 49 = \quad 51 =$$

۲- برای هر عدد، یک مقسوم‌علیه، غیر از عدد یک و خود عدد بنویسید.

$$15 \rightarrow \quad 8 \rightarrow \quad 5 \rightarrow \quad 4 \rightarrow \quad 14 \rightarrow$$

$$7 \rightarrow \quad 9 \rightarrow \quad 10 \rightarrow \quad 49 \rightarrow \quad 51 \rightarrow$$

اگر a و b اعدادی طبیعی باشند و $c = a \times b$ باشد، آن‌گاه c عددی طبیعی و هریک از a و b یک مقسوم‌علیه c است. عدد ۱۵ را نیز می‌توان به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی ۳ و ۵ نوشت. عددهایی مانند ۶ و ۱۵ را که می‌توان به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ نوشت، اعداد مرکب می‌نامیم. عددهای ۴، ۸، ۶، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۴ و ۱۶ اعداد مرکب‌اند.

عدد ۵ را نمی‌توان به صورت حاصل ضرب اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ نوشت. می‌دانید که ۵ عددی اول است. هر عدد اول غیر از خودش و ۱، مقسوم‌علیه دیگری ندارد. عددهای اعداد اول ۱۳، ۱۱، ۷، ۵، ۳، ۲ و ... هستند.

عدد ۱ نه مرکب است و نه اول.

فعالیت

مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عددهای زیر را بنویسید.

$$= \text{مجموعه‌ی مضرب‌های عدد } 4 \quad = \text{مجموعه‌ی مضرب‌های عدد } 3$$

آیا می‌توان گفت همه‌ی مضرب‌های یک عدد، مرکب‌اند؟ چرا؟

کار در کلاس

۱- دور هر عدد مرکب یک خط بکشید و توضیح دهید که چگونه مرکب بودن آن را تشخیص دادید. $83, 57, 17, 9, 13, 24, 1, 35, 6, 3, 63$ آیا اعدادی که دور آن‌ها خط نکشیده‌اید، اول‌اند؟ چرا؟

۲- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. علت نادرستی گزاره‌ها را بنویسید.

الف - ۴۹ عددی اول است.

ب - غیر از ۲، هیچ مضرب ۲ اول نیست.

پ - ۳ یک مقسوم‌علیه اول ۱۲ است.

ت - هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، حداقل یک مقسوم‌علیه اول دارد.

ث - تنها مقسوم‌علیه اول ۵، خود ۵ است.

ج - ۲۳ عددی اول است.

ج - ۲۷ عددی اول است.

ح - تنها مضرب اول ۳، خود ۳ است.

۳- پنج عدد مرکب بزرگ‌تر از 20 بنویسید.

۴- مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۱۲ را بنویسید.

مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۱۳ را بنویسید.

آیا می‌توان گفت که هر عدد اول دقیقاً دو مقسوم‌علیه دارد؟

۵- در جدول زیر، همه‌ی عده‌های مرکب و عدد ۱ را خط بزنید.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰

آیا همه‌ی عده‌های باقی‌مانده اول‌اند؟

تعیین عددهای اول

فعالیت



می خواهیم عددهای اول بین ۱ تا ۳۰ را تعیین کنیم. برای این کار، ابتدا عددهای

۱ تا ۳۰ را می نویسیم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰

کافی است عددهای غیر اول را خط بزنیم تا عددهای اول (عددهایی که خط نمی خورند) باقی بمانند.

۱- آیا عدد یک اول است؟ چرا؟

۲- کدام یک از مضرب های عدد ۲ مرکب اند؟ آنها را خط بزنید.

۳- کدام یک از مضرب های عدد ۳ مرکب اند؟ آنها را خط بزنید.

۴- کدام یک از مضرب های مرکب عدد ۳ قبلًاً خط خورده بودند؟

۵- اوّلین مضرب عدد ۳ که خط خورد، کدام عدد بود؟

۶- مضرب های مرکب عدد ۵ را نیز خط بزنید.

۷- کدام یک از مضرب های عدد ۵ قبلًاً خط خورده بود؟

۸- اوّلین مضرب عدد ۵ که خط خورد، کدام عدد بود؟

۹- آیا مضربی از عددهای ۷، ۱۳، ۱۱، ۱۷ و ... باقی مانده است که باید آن را

خط بزنید؟

۱۰- آیا لازم است مضارب عدد ۴ یا ۶ را خط بزنید؟ چرا؟

۱۱- خط زدن مضرب ها تا کجا ادامه می یابد؟

می توانید این کار را طی مراحل زیر انجام دهید :

۱- عدد ۱ را خط بزنید.

۲- مضرب های ۲ را، غیر از خود ۲، خط بزنید.

۳- مضرب های ۳ را، غیر از خود ۳، خط بزنید.

۴- اوّلین عدد خط تزدهی بعدی اوّل است. مضربهای ۵ را غیر از خود خط بزنید.

۵- عدد بعدی که باید مضربهای آن را خط بزنید، ۷ است. برای حذف مضربهای ۷، غیر از خود ۷، اوّلین عددی که باید خط بزنید ۴۹ است. همان طور که می‌بینید، عدد ۴۹ در جدول نیست، پس، کار خط زدن مضربها به پایان رسیده است.

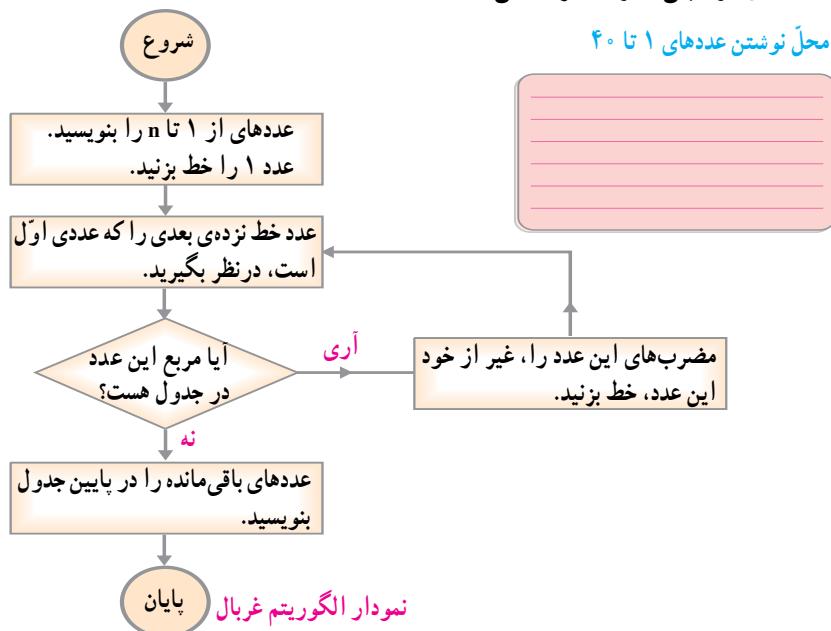
پس از انجام دادن مراحل گفته شده، جدولی مانند جدول زیر خواهد داشت که در آن، همهٔ عددهای خط تزده اوّل‌اند. دور عددهای اوّل خط بکشید.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰

ما در اینجا از روش الگوریتم غربال برای تعیین اعداد اوّل ۱ تا ۳۰ استفاده کرده‌ایم.

کار در کلاس

۱- نمودار زیر، مراحل کار را در الگوریتم غربال ارائه‌ستان برای تعیین عددهای اوّل بین ۱ و عدد طبیعی n نشان می‌دهد. با انتخاب $n = 40$ و استفاده از نمودار زیر، عددهای اوّل بین ۱ و ۴۰ را تعیین کنید.



۲- عددهای ۱ تا ۶۰ را در دفترتان بنویسید. اکنون با به کار بردن الگوریتم غربال، عددهای اول بین ۱ و ۶۰ را به دست آورید.



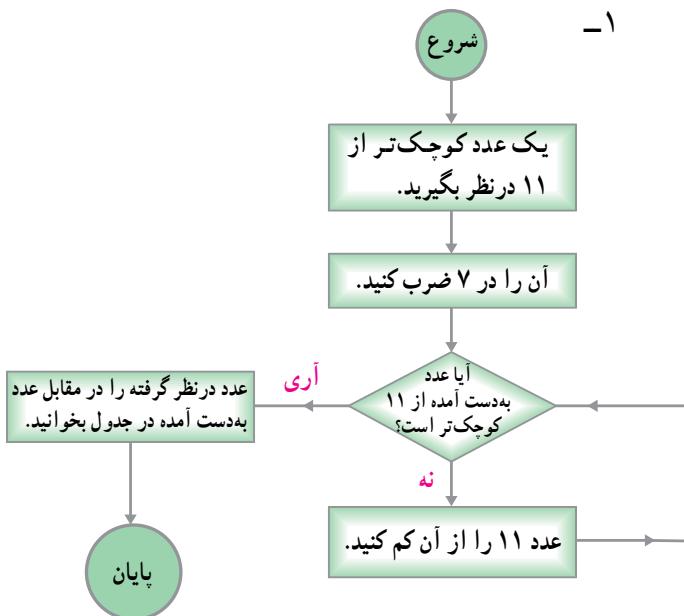
می خواهیم تعیین کنیم که آیا عدد ۴۳ اول است یا نه.
آیا ۴۳ مضرب ۲ است؟ با چه تقسیمی می توانید به این سؤال پاسخ دهید؟
آیا ۴۳ مضرب ۳ است؟ مضرب ۵ چه طور؟ مضرب ۷ چه طور؟
اگر عددهای ۱ تا ۴۳ را بنویسید و الگوریتم غربال را به کار برد، آیا ۴۳ خط می خورد؟ آیا ۴۳ عددی اول است؟
توضیح دهید که چگونه با تقسیم کردن، می توان اول بودن یک عدد را تعیین کرد.



- ۱- مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۲۴ را بنویسید.
- ۲- پنج تا از مضرب‌های ۶ را بنویسید.
- ۳- آیا ۷۷ عددی اول است؟ چرا؟
- ۴- الگوریتم غربال را برای تعیین عددهای اول بین ۱ و ۱۰۰ به کار برد.
- ۵- آیا عدد ۹۷ اول است؟ چرا؟
- ۶- الگوریتم غربال را برای تعیین اعداد اول بین ۸۰ و ۱۳۰ بکار برد.

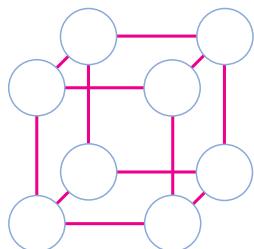


گرفته	عدد در نظر	عدد به دست	آمده
۸		۱	
۵		۲	
۲		۳	
۱۰		۴	
۷		۵	
۴		۶	
۱		۷	
۹		۸	
۶		۹	
۳		۱۰	



۲- بازی با اعداد اول

عدد ۱ و اعداد اول ۱، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ را در گوشاهای مکعب طوری بنویسید که مجموع چهار عدد واقع در هر وجه، ۳۸ باشد.



حل مسئله

در برخی از مسئله‌ها، تغییرات دو مقدار طوری است که حاصل ضرب آن‌ها ثابت می‌ماند. با تشخیص این موضوع و توجه به آن، می‌توانیم این گونه مسئله‌ها را حل کنیم. به یک نمونه توجه کنید.



یک نجار با صرف ۶ ساعت کار در روز می‌تواند یک میز را ۴ روزه سازد. اگر روزی ۸ ساعت کار کند، همان میز را چند روزه می‌سازد؟ در این مسئله حاصل ضرب تعداد ساعات کار در روز در تعداد

روزها، کل ساعت کار لازم برای ساختن میز است؛ بنابراین، عددی ثابت است. حالا اگر فرض کنیم او با ۸ ساعت کار در روز، میز را در a روز می‌سازد، می‌توانیم بنویسیم:

$$6 \times 4 = 8 \times a$$

بنابراین:

$$a = \frac{6 \times 4}{8} = 3$$

برای حل کردن این مسئله، از کدام راهبرد استفاده کرده‌اید؟

حل مسئله

- رسم شکل
- جدول نظام دار
- الگویابی
- حذف حالت‌های نامطلوب
- زیر مسئله
- حل مسئله ساده‌تر
- شکلیل معادله
- حدس و آزمایش

۱- یک کارگر در و پنجره‌ساز، با روزی ۸ ساعت کار می‌تواند یک در را ۶ روزه بسازد؛ ساختن در چند ساعت طول می‌کشد؟ اگر او بخواهد در را ۴ روزه بسازد، در هر روز باید بیشتر از ۸ ساعت کار کند یا کمتر؟ چرا؟

۲- برای نقاشی یک ساختمان، ۳ کارگر ۱۸ روز کار کردند. اگر می‌خواستند کار زودتر انجام شود، تعداد کارگران را باید بیشتر می‌کردند یا کمتر؟ اگر تعداد کارگرها ۶ نفر بود، این کار چند روزه انجام می‌شد؟

۳- زهره می‌خواهد یک رومیزی را گلدوزی کند. او حساب کرده است که اگر هر روز، پس از انجام دادن تکالیف مدرسه، روزی ۴۵ دقیقه کار کند، رومیزی را ۱۲ روزه تمام خواهد کرد. اگر بخواهد رومیزی را ۹ روزه گلدوزی کند، هر روز چند دقیقه باید کار کند؟

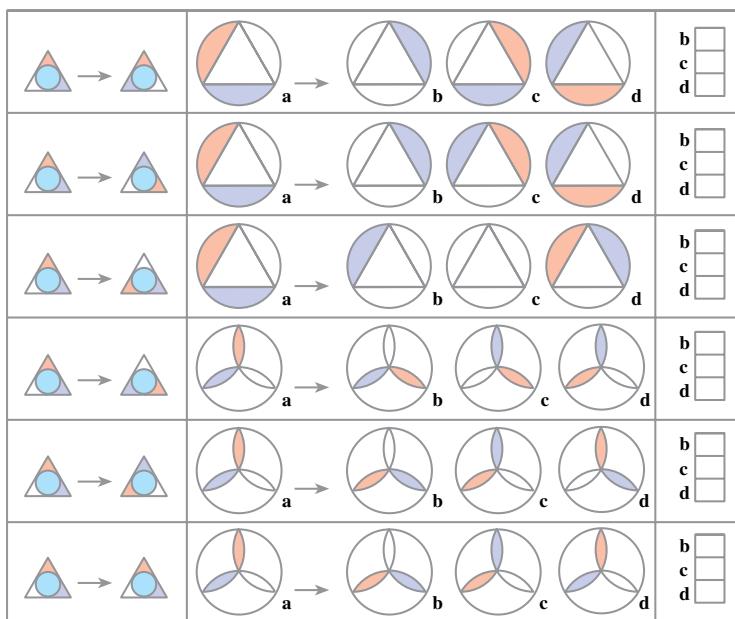


۴- معصومه و مادرش برای بافتن یک قالیچه‌ی کوچک ۷۸ روز کار کردند. اگر خواهر معصومه به آن‌ها کمک می‌کرد این قالیچه را چند روزه می‌بافتند؟

۵- احمد می خواهد یک کتاب را حروف چینی کند. اگر در هر صفحه ۲۴ سطر قرار دهد، متن کتاب 140 صفحه خواهد شد. اگر در هر صفحه ۲۸ سطر قرار دهد، متن کتاب چند صفحه خواهد شد؟

۶- کاری با 8 نفر کارگر، 9 روزه تمام می شود. با $\frac{3}{4}$ این تعداد کارگر، کار چند روزه تمام می شود؟

۷- در هر ردیف، به ارتباط دو شکل سمت چپ توجه کنید. شکل a با کدام یک از شکل های b، c و d همان ارتباط را دارد؟ خانه های مربوط به پاسخ درست را سیاه کنید.



سرگرمی و ریاضی

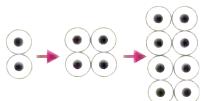


یک بازی دونفره

تعدادی چوب کبریت را در سه دسته قرار دهید.

حالا شما و دوستان به نوبت از یک دسته، هر تعداد چوب کبریت که می خواهید بردارید. در هر نوبت نمی توانید از دو دسته، چوب کبریت بردارید.

نقشه هی خوبی طراحی کنید تا آخرین چوب کبریت را شما بردارید.



توان

عددهای توان دار و قواعد محاسبه با آنها را در سال گذشته یاد گرفته اید. می دانید که مثلاً

$$5^1 = 5$$

$$5^2 = 5 \times 5$$

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5$$

اینک، قواعد محاسبه با عدددهای توان دار را با چند مثال یادآوری می کیم.

الف – اگر a عددی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند،

$$a^{\delta} \times a^{\gamma} = a^{\delta+\gamma} = a^{\lambda}$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^{\delta} \div a^{\gamma} = a^{\delta-\gamma} = a^{\zeta}$$

$$(a \neq 0) \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ب – اگر a و b اعدادی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند،

$$a^{\delta} \times b^{\delta} = (ab)^{\delta}$$

$$a^{\delta} \div b^{\delta} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\delta}$$

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0)$$



تساوی ها را کامل کنید.

$$(a^{\gamma})^{\delta} = a^{\gamma} \times a^{\gamma} \times a^{\gamma} = a \times a \times \dots \times \dots = \dots$$

$$(b^{\gamma})^{\delta} = b^{\gamma} \times b^{\gamma} \times b^{\gamma} = b \times b \times b \times \dots = \dots$$

با توجه به تساوی های بالا، برای ساده کردن این عبارت ها قاعده های بیان کنید.

کار در کلاس

۱- حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$5^7 \times 5^4 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (-2)^3 \times (-2)^5 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 7^3 \times 7 \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$8^5 \div 8^2 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (-3)^7 \div (-3)^2 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 6^5 \div 6 \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

۲- حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$2^4 \times 5^4 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (-6)^3 \times (-6)^2 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (0/5)^3 \times 4^3 \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$24^7 \div 8^7 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 65^3 \div 13^3 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (8/5)^6 \div 5^6 \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

۳- عبارت های زیر را کامل کنید.

$$3^{\square} = 9^4$$

$$8^5 = 2^{\square}$$

$$49^3 = \square^6$$



تمرین

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$5^7 \times 5^4$$

$$7^8 \times 7^2$$

$$8^7 \div 8^3$$

$$10^5 \div 10^3$$

$$(0/4)^3 \times (0/4)^2$$

$$(1/7)^3 \times (1/7)$$

$$(5/1)^4 \div (5/1)^3$$

$$(8/2)^3 \div (8/2)$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^8 \div \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^8 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^5 \div \left(\frac{2}{7}\right)$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$2^4 \times 5^4$$

$$4^3 \times 25^3$$

$$85^2 \div 17^2$$

$$(7/2)^3 \div (0/9)^3$$

$$(0/6)^3 \div 2^3$$

$$(0/12)^5 \div 4^5$$

$$\left(\frac{8}{15}\right)^3 \times \left(\frac{5}{16}\right)^3$$

$$(2/5)^5 \times (0/4)^5$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^8 \div \left(\frac{1}{5}\right)^8$$

۳- حاصل کسرهای زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$\frac{2^5 \times 2^3}{2^4 \times 2^2}$$

$$\frac{6^5}{3^5}$$

$$\frac{21^4}{3^4}$$

$$\frac{3^5}{2^3}$$

$$\frac{3^3}{3^5}$$

$$\frac{4^3}{4^5}$$

۴- کسرهای زیر را ساده کنید.

$$\frac{3^2 \times 2^5}{2^4 \times 2^4}$$

$$\frac{5^6 \times 7^2}{5^4 \times 7^3}$$

$$\frac{4^5 \times 6^3}{4^3 \times 6^5}$$

۵- عبارت‌های زیر را به صورت عبارت‌های توان دار بنویسید.

$$(xy)^2 \times x^3 \times y^4 =$$

$$xy \times y^4 =$$

$$x \times x =$$

$$x \times x^3 =$$

۶- عبارت‌های زیر را ساده کنید و به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$8^2 \times 2^4 =$$

$$9^5 \times 27 =$$

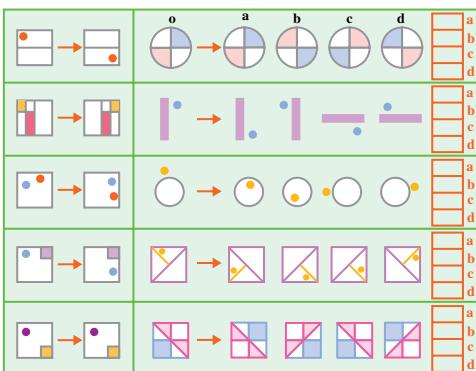
۷- اگر $a^{3x} = 3^x$ باشد، مقدار 3^{x+1} را بر حسب a بنویسید.

حل مسئله



- رسم شکل
- جدول نظامدار
- الگویابی
- حذف حالت های نامطلوب
- زیرمسئله
- حل مسئله های ساده تر
- تشکیل معادله
- حدس و آزمایش

۱- به رابطه‌ی بین دو شکل سمت چپ توجه کنید؛ کدام یک از شکل‌های a، b، c و d همان رابطه را با شکل ۰ دارد؟
پاسخ

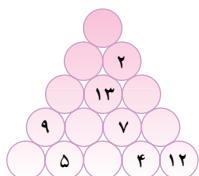


۲- در افسانه‌ها می‌گویند وقتی پادشاه هند از بازی شطرنج خوش شدم، مختصر شطرنج را به حضور طلبید و از او خواست تا جایزه‌ای به عنوان پاداش طلب کند. او درخواست خود را این‌طور مطرح کرد:



«در صفحه‌ی شطرنج و در خانه‌ی اول، برای من یک دانه گندم، در خانه‌ی دوم دو برابر خانه‌ی اول و در خانه‌ی سوم دو برابر خانه‌ی دوم گندم قرار دهید و به همین ترتیب، پیش بروید.» پادشاه از درخواست او تعجب کرد و دستور داد به او یک کيسه گندم بدهند. به نظر شما، آیا درخواست مختصر شطرنج به اندازه‌ی یک کيسه گندم بوده است؟

سرگرمی و ریاضی



عددهای ۱ تا ۱۵ را در دایره‌های مثلث مقابل طوری قرار دهید که مجموع عددهای روی هر ضلع مثلث، عدد ۳۴ شود. مجموع عددهای سه دایره‌ی وسط هم ۳۴ شود.





(ابوریحان محمد بن احمد)

ابوریحان بیرونی

(۳۵۲ ش - ۹۷۳ م)



جذر مُنْطَق (گویا) و أَصَم (گنگ) کدام است؟

جذر منطق آن است که حقیقت او به زبان توان گفتن، همچون سه، نه را و چهار شانزده را. و اما جذر اصم آن است که هرگز حقیقت او به زبان در نباید چون جذر ده، که هرگز عددی نتوان یافتن که او را اندر مثُل خویش زنی، ده آید.

و اصم کَر بود زیرا که جواب ندهد جوینده را، تا نیابدش، مگر به تقریب و تزدیک شدن با او بس. (با تقریب نقصانی)

با وجود گذشت ایام، ابوریحان هنوز از لحاظ فکر جوان و تازه می‌نماید و چنین به نظر می‌رسد که از داشمندان هم عصر ماست. او در وسعت فکر، انتقاد، ریشه‌یابی علت‌های حوادث و عشق عمیق به تحقیق، مقامی ممتاز دارد. ابوریحان در حکمت، ریاضیات، نجوم، جغرافیا و تاریخ استاد بوده و به چندین زبان سلط داشته است. از جمله تألیفات مهم ابوریحان بیرونی کتاب «التفہیم» در مقدمات علم هیئت، هندسه و نجوم است که آن را به صورت سؤال و جواب و به دو زبان عربی و فارسی نگاشته است. علاوه بر این علم مثناث کروی برای اولین بار توسط ابوریحان در کتاب «مقالات علم الهیئت» تدوین و تنظیم شده است. محاسبه تقریبی $\frac{1}{\pi}$ ، تشکیل جدول چیب‌ها (سینوس‌ها) و بررسی مسئله تثیل زاویه که آن را به دوازده مسئله هندسی معادل با آن تبدیل کرده؛ از دیگر آثار اوست.

تحقیقات وی در موضوعاتی از قبیل کروی بودن زمین، ستاره‌های دنباله‌دار و شهاب‌ها و همچنین تحقیق وی در چیستی کهکشان راه شیری که در کتاب «التفہیم» آمده است از اهمیتی بسزا برخوردار است.

ابوریحان معاصر این سیناست و بین این دو داشمند مکاتباتی در موضوعات علمی و فلسفی انجام گرفته است.

جذر

یادآوری



نمودارهای مقابل، رابطه‌ی بین جذر و مجدور را نشان می‌دهند.
عددهایی مثل $4, 16, 49$ و ... را که جذر دقیق دارند، مجدور
یا مربع کامل می‌نامند.

در سال گذشته، روش محاسبه‌ی جذر تقریبی اعداد را یاد
گرفته‌اید؛ مثلاً، جذر 95 تا یک رقم اعشار به صورت زیر بدست می‌آید.

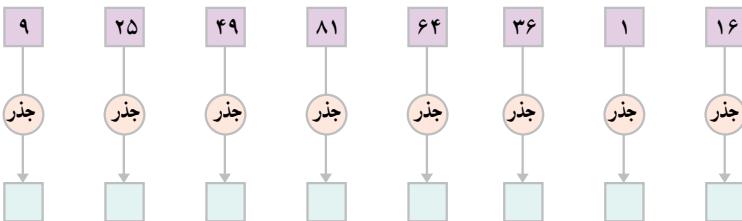
95 بین دو مجدور کامل 81 و 100 است؛ پس، جذر 95 بین 9 و 10 است. با توجه به این
مطلوب، جذر 95 به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$95 = 81 + 14$$

$$\sqrt{95} \approx 9 + \frac{14}{2 \times 9} \rightarrow \sqrt{95} \approx 9 / 7$$

کار در کلاس

۱- نمودارهای زیر را کامل کنید.



۲- جذرها را تا یک رقم اعشار حساب کنید.

$$\sqrt{68} \approx 8 + \underline{\quad} \approx \underline{\quad}$$

$$\sqrt{43} \underline{\quad}$$

$$\sqrt{27} \underline{\quad}$$

$$\sqrt{80} \underline{\quad}$$

جذر تقریبی

اکنون برای محاسبه‌ی جذر یک عدد، روش دقیق‌تری بیان می‌کنیم. به کمک این روش می‌توانیم جذر یک عدد را تا هر تقریبی که بخواهیم، حساب کنیم.

می‌خواهیم جذر ۱۴۳۸ را با تقریب نقصانی کمتر از ۱ به دست آوریم. از سمت راست عدد، دو رقم دو رقم جدا می‌کنیم؛ در اینجا پس از جدا کردن دو رقم اوّل، دو رقم ۴ و ۱ باقی می‌مانند.

$$\sqrt{1438}$$

$$\sqrt{1438}$$

جذر تقریبی ۱۴ (یعنی ۳) را می‌نویسیم و مجدول آن را از ۱۴ کم می‌کنیم.

دو رقم بعدی را پایین می‌آوریم؛ عدد ۳ را دو برابر می‌کنیم. حالا از رقم یکان عدد ۵۳۸ صرف نظر می‌کنیم و عدد ۵۳ را بر ۶ تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت (یعنی ۸) را در سمت راست ۶ می‌نویسیم و حاصل ضرب ۶۸×۸ را با ۵۳۸ مقایسه می‌کنیم.

$$\sqrt{1438}$$

در اینجا، چون حاصل ضرب ۶۸×۸ از ۵۳۸ بیشتر است، به جای ۸، عدد ۷ را قرار می‌دهیم و حاصل ضرب ۶۷×۷ را از ۵۳۸ کم می‌کنیم؛ باقی‌مانده ۶۹ است. اکنون ۷ را در سمت راست ۳ می‌نویسیم و محاسبه تمام می‌شود.

$$\sqrt{1438}$$

جذر ۱۴۳۸ با تقریب نقصانی کمتر از ۱، برابر است با

.۳۷

کار در کلاس

جذر هریک از عددهای زیر را با تقریب نقصانی کمتر از ۱ حساب کنید.

۱۵۹۲

۲۴۱۷

۷۸۰۳

$$\sqrt{796}$$

اکنون با کامل کردن محاسبه‌های رو به رو، جذر ۷۹۶ را به دست آورید.

$$\sqrt{796}$$

دو رقم اول را جدا کنید؛ یک رقم ۷ باقی می‌ماند.
جذر تقریبی ۷ را بنویسید و مجدور آن را از ۷ کم کنید.

$$\begin{array}{r} \sqrt{796} \\ \hline 4 & 2 \\ 396 & 2 \times 2 = 4 \\ & 49 \times 9 = 441 \end{array}$$

دو رقم بعدی را پایین بیاورید؛ عدد ۳۹۶ به دست می‌آید. عدد ۲ را دو برابر کنید. از رقم یکان ۳۹۶ صرف نظر کنید و ۳۹ را بر دو برابر ۲ تقسیم کنید. خارج قسمت (یعنی ۹) را در سمت راست ۴ بنویسید و حاصل ضرب ۴۹×۹ را با ۳۹۶ مقایسه کنید.

$$\begin{array}{r} \sqrt{796} \\ \hline 4 & 2 \\ 396 & 2 \times 2 = 4 \\ & 49 \times 9 = 441 \\ & 48 \times 8 = \end{array}$$

چون حاصل ضرب ۹×۴۹ از ۳۹۶ بیشتر است، به جای ۹، عدد ۸ قرار دهید؛ سپس، حاصل ضرب ۴۸×۸ را از ۳۹۶ کم کنید و باقی مانده را پیدا کنید.

حالا ۸ را در سمت راست ۲ بنویسید. و رابطه‌ی مقابل را کامل کنید. $\sqrt{796} \approx$

کار در کلاس

جذر هریک از عددهای زیر را با تقریب نقصانی کمتر از ۱ به دست آورید.

$$\sqrt{521}$$

$$\sqrt{201}$$

$$\sqrt{675}$$

جذر اعداد اعشاری



به مجدد هر یک از اعداد اعشاری زیر توجه کنید.

$$(0/16)^2 = 0/36 \quad (0/2)^2 = 0/44 \quad (0/15)^2 = 0/225$$

بین تعداد رقم‌های اعشار در دو طرف تساوی، چه رابطه‌ای می‌بینید؟

مشاهده می‌کنید که اگر یک عدد اعشاری را مجدد کنیم، تعداد رقم‌های اعشاری مجدد زوج است؛ پس، برای یافتن جذر یک عدد اعشاری، ابتدا به تعداد رقم‌های اعشاری آن توجه می‌کنیم. در صورتی که تعداد ارقام اعشاری آن فرد باشد، یک صفر در سمت راست آن قرار می‌دهیم تا تعداد ارقام اعشاری زوج شود. اکنون بدون درنظر گرفتن ممیز، جذر را محاسبه می‌کیم.

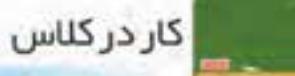
در آخر، ممیز جذر و باقی‌مانده را درج می‌کنیم؛ با توجه به

$$\begin{array}{r} \sqrt{5\cdot 42/80} \\ -4 \\ \hline 142 \\ -129 \\ \hline 23/2 \\ 2 \times 2 = 4 \\ 43 \times 3 = 129 \end{array}$$

این که همواره

۱- تعداد ارقام اعشاری جذر، نصف تعداد ارقام اعشاری
عدد اصلی است.

۲- تعداد ارقام اعشاری باقی‌مانده، مساوی تعداد ارقام اعشاری عدد اصلی است. اکنون جذر مقابل را کامل کنید.



جذرهای زیر را تا یک رقم اعشار حساب کنید.

$$\sqrt{74/00}$$

$$\sqrt{8/4}$$

$$\sqrt{42/7}$$

امتحان جذر

اگر یک جذر را درست انجام داده باشیم،

الف - دو برابر جذر به اضافه‌ی ۱ از باقی‌مانده‌ی جذر بزرگ‌تر است.

ب - مجدور جذر به اضافه‌ی باقی‌مانده، مساوی عدد داده است.

$$\begin{array}{r} \sqrt{1438} \\ \hline 37 \\ 3 \times 2 = 6 \\ \hline 538 \\ 68 \times 8 = 544 \\ \hline 469 \\ 67 \times 7 = 469 \\ \hline 69 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \times 37 + 1 = 75, \quad 75 > 69 \\ (37)^2 + 69 = 1438 \end{array}$$

اگر در محاسبه‌ی جذر پیش روی داشته باشیم یا بخواهیم جذر یک عدد اعشاری را بگیریم، در مورد قسمت الف قبل از درج ممیزها، امتحان جذر را انجام می‌دهیم.

کار در کلاس

در کدام یک از موارد زیر، جذر درست محاسبه شده است؟

(الف)

$$\begin{array}{r} \sqrt{15/30} \\ \hline 3/9 \\ 2 \times 3 = 6 \\ \hline 63 \\ 69 \times 9 = 621 \\ \hline 0/09 \end{array}$$

ب)

$$\begin{array}{r} \sqrt{7/45} \\ \hline 2/7 \\ 2 \times 2 = 4 \\ \hline 345 \\ 47 \times 7 = 329 \\ \hline 0/16 \end{array}$$

(پ)

$$\begin{array}{r} \sqrt{9/50^{\circ}00} \\ \hline 3/07 \\ 2 \times 3 = 6 \\ \hline 50 \\ 60 \times 0 \\ 2 \times 30 = 60 \\ 607 \times 7 = 4249 \\ \hline 0/0751 \end{array}$$

ت)

$$\begin{array}{r} \sqrt{982/60} \\ \hline 31/3 \\ 2 \times 3 = 6 \\ \hline 61 \\ 61 \times 1 = 61 \\ \hline 216 \\ 216 \times 1 = 62 \\ 623 \times 3 = 1869 \\ \hline 2/91 \end{array}$$

در هریک از تمرین‌های زیر پس از محاسبه‌ی جذر، آن را امتحان کنید.

۱- جذرهای زیر را حساب کنید.

$$\sqrt{5039}$$

$$\sqrt{947}$$

۲- جذر ۲ و جذر ۳ را تا دو رقم اعشار به‌دست آورید.

$$\begin{array}{r} \sqrt{2/\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} \\ -1 \\ \hline 10\cdot\cdot \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \hline 2 \times 1 = 2 \\ 25 \times 5 = 125 \\ 24 \times 4 = 96 \end{array}$$

$$\sqrt{3}$$



تمرین

۱- جذر هریک از عددهای زیر را حساب کنید و در هر مورد، جذر را امتحان کنید.

۲۶۰۱

۷۰۴۴

۴۳۵۶

۲- جذر هریک از اعداد زیر را تا دو رقم اعشار به‌دست آورید.

۷۳/۸

۵۲۰

۷

۱۰

- رسم شکل
- جدول نظام‌دار
- الگویابی
- حذف حالات‌ی نامطلوب
- زیر مسئله
- حل مسئله‌ی ساده‌تر
- تشکیل معادله
- حدس و آزمایش

حل مسئله



۱- حجم یک مکعب مستطیل با قاعده‌ی مربع و ارتفاع ۷ سانتی‌متر، ۴۴۱ سانتی‌متر مکعب است. ضلع قاعده‌ی مربع را تا یک رقم اعشار به‌دست آورید.

۲- برای رنگ کردن سطح دیوار، با هریک کیلوگرم رنگ تقریباً ۸ متر مربع را می‌توان به‌طور کامل رنگ کرد. اگر ۴ کیلوگرم رنگ در اختیار داشته باشیم، ضلع بزرگ‌ترین مربعی که می‌توان رنگ کرد، تقریباً چند سانتی‌متر است؟

مجموعه‌ی عددهای صحیح

نمایش مجموعه‌ی عددهای صحیح

هر یک از عددهای ...، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ... را یک عدد صحیح می‌نامیم.

مجموعه‌ی اعداد صحیح را به صورت

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

نشان می‌دهند.

کار در کلاس

محور اعداد را رسم کرده و اعداد صحیح را روی آن مشخص کنید و عبارت‌های زیر را با نوشتن \in یا \notin کامل کنید.

$$-25 \bigcirc \mathbb{Z}$$

$$0 \bigcirc \mathbb{Z}$$

$$+238 \bigcirc \mathbb{Z}$$

$$-\frac{2}{3} \bigcirc \mathbb{Z}$$

$$0/35 \bigcirc \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{2} \bigcirc \mathbb{Z}$$

– آیا کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد صحیح را می‌توان مشخص کرد؟ چرا؟

– کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت و بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی را مشخص

کنید.



مجموعه‌ی عددهای صحیح بین -۳ و ۴ را نوشته و آن‌ها را روی محور مشخص کنید.



این مجموعه را با نمادهای ریاضی نیز می‌توان بیان کرد.

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } -3 < x < 4\}$$

x را می‌خوانیم؛ $x \in \mathbb{Z}$ به طوری که x عضو مجموعه \mathbb{Z} است.
مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از ۴ را بنویسید و آنها را روی محور مشخص کنید.



این مجموعه را با نمادهای ریاضی نشان دهید.

کار در کلاس

۱- هر یک از مجموعه‌های زیر را با نمادهای ریاضی مشخص کنید.

$$A = \{ \circ, 1, 2, 3, 4, \varnothing \} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \quad \}$$

$$B = \{ \text{v}, -8, -9, \cdot \} =$$

$$C = \{ \text{v}, -6, -5, \cdot \} =$$

۲- مجموعه‌های زیر را با اعضاشان مشخص کنید.

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \circ < x < 5\} =$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x < 6\} =$$

$$F = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 2\} =$$

۳- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. هرجا لازم است از مجموعه‌های بالا استفاده کنید.

$$5 \in \mathbb{Z} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\circ \in \mathbb{N} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-38 \in \mathbb{Z} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-5 \in \mathbb{N} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-20 \in B \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$12 \in C \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 \in D \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$6 \in E \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

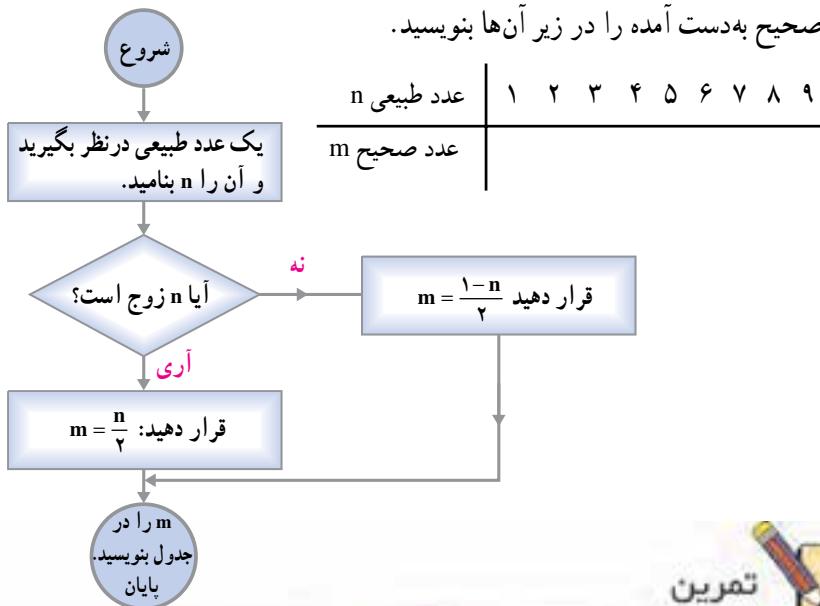
$$\circ \in F \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

۴- قرینه‌های عددهای زیر را به دست آورید.





عددهای طبیعی جدول زیر را به ترتیب، در ورودی نمودار قرار دهید. عددهای صحیح به دست آمده را در زیر آن‌ها بنویسید.



- ۱- در هریک از عبارت‌های زیر، یکی از نمادهای \in یا \subseteq را که درست است، به جای ○ قرار دهید و یک عبارت درست بنویسید.

$\frac{3}{5}$ <input type="radio"/> \mathbb{N}	\circ <input type="radio"/> \mathbb{N}	$-2/3$ <input type="radio"/> \mathbb{Z}	$\sqrt{4}$ <input type="radio"/> \mathbb{N}
$-\frac{6}{2}$ <input type="radio"/> \mathbb{Z}	$-(-2)$ <input type="radio"/> \mathbb{N}	$\frac{12}{-4}$ <input type="radio"/> \mathbb{Z}	5^3 <input type="radio"/> \mathbb{N}
5^{+3} <input type="radio"/> \mathbb{Z}	-12 <input type="radio"/> \mathbb{Z}	$12 \square 18$ <input type="radio"/> \mathbb{N}	$\sqrt{2}$ <input type="radio"/> \mathbb{N}

- ۲- نمایش هر یک از مجموعه‌های زیر را با مشخص کردن اعضای آن‌ها بنویسید.

- مجموعه‌ی A شامل عددهای طبیعی بین ۱ و ۱۰

- مجموعه‌ی B شامل عددهای زوج بین ۳ و ۱۵

- مجموعه‌ی C شامل قرینه‌های اعضای مجموعه‌ی A

$$D = \{x \mid -x \in \mathbb{B}\}$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < \emptyset\}$$

$$F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < \}$$

$$G = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 5^3 < \}$$

$$H = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x < \}$$

$$I = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -8 < x < \}$$

$$J = \{x \mid -x \in \}$$



۳- در هر کدام از مجموعه‌های تمرین ۲، در صورتی که کوچک‌ترین عضو وجود دارد، آن را مشخص کنید.

۴- مجموعه‌های زیر را با نمادهای ریاضی بنویسید.

$$\{-8, -7, -6, \dots, \frac{3}{2}\}$$

$$\{-35, -36, -37, \dots\}$$

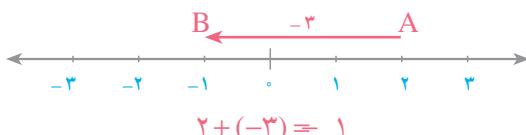
$$\{-4, -3, -2, \dots\}$$

$$\{15, 16, 17, \dots\}$$

$$\{15, 14, 13, \dots, 0\}$$

$$\{15, 14, 13, \dots\}$$

جمع عددهای صحیح



جمع عددهای صحیح و گویا را سال گذشته یاد گرفته‌اید. برای نوشتن جمع عددهای علامت‌دار، مختصرنویسی می‌کنیم و فقط عددها را با علامت‌شان به دنبال یک دیگر می‌نویسیم. مانند نمونه‌ها، عبارت‌ها را مختصر کنید.

$$(+12) + (-8) = 12 - 8$$

$$(+\frac{3}{5}) + (-\frac{1}{8}) = \frac{3}{5} - \frac{1}{8}$$

$$(-9) + (+5) =$$

$$(-\frac{2}{9}) + (+\frac{5}{12}) =$$

$$(-7) + (-11) =$$

$$(-7) + (-\frac{1}{3}) =$$

کار در کلاس

۱- عبارت‌های زیر را با برداشتن پرانتز، مختصر کنید.

$$(-8) + (+15) = -8 + 15$$

$$(+13) + (-10) =$$

$$(+\frac{2}{5}) + (+\frac{1}{5}) =$$

$$(+8) + (+5) =$$

$$(-\frac{3}{7}) + (-\frac{2}{9}) =$$

$$(-15) + (-6) =$$

$$(-\frac{3}{5}) + (+\frac{4}{5}) =$$

$$(+\frac{8}{13}) + (-\frac{3}{2}) =$$



۲- با گذاشتن پرانتز، هر کدام از عبارت‌های زیر را به صورت مجموع دو عدد علامت‌دار بنویسید.

$$-8 + 14 = (-8) + (+14) \quad + 3 - 12 =$$

$$+9 - 5 = \quad -17 - 15 =$$

$$-\frac{6}{5} + \frac{9}{4} = \quad +\frac{1}{6} + \frac{5}{9} =$$

$$+\frac{4}{3} - \frac{7}{2} = \quad -\frac{2}{7} - \frac{3}{8} =$$

اینک، روش محاسبه‌ی حاصل جمع را یادآوری می‌کنیم. گاهی با برداشتن پرانتز و جابجایی، مجموع دو عدد صحیح به جمع یا تفریق عده‌های طبیعی تبدیل می‌شود. در این موارد، محاسبه‌ی حاصل جمع به سادگی انجام می‌شود.

$$(+12) + (+7) = 12 + 7 = 19$$

$$(+13) + (-4) = 13 - 4 = 9$$

$$(-5) + (+7) = 5 + 7 = 7 - 5 = 2$$

هرگاه با برداشتن پرانتز، جمع یا تفریق عادی به دست نیاید، از قرینه‌یابی استفاده می‌کنیم. قرینه‌یابی، عبارت‌ها را به همان حالت‌های بالا تبدیل می‌کند.

$$(-12) + (-7) = 12 - 7 = (12 + 7) = 19$$

$$(-13) + (+4) = 13 + 4 = (13 - 4) = 9$$

$$(+5) + (-7) = 5 - 7 = (7 - 5) = 2$$

کار در کلاس

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$13 - 9 = \quad -7 + 10 = \quad -5 - 7 =$$

$$-8 + 7 = \quad -4 + 9 = \quad -9 + 4 =$$

$$45 - 85 = \quad -67 - 85 = \quad 97 - 115 =$$

۲- حاصل جمع‌های زیر را حساب کنید. ابتدا با برداشتن پرانتز، آن‌ها را

مختصر کنید و سپس، مانند بالا حاصل جمع را به دست آورید.

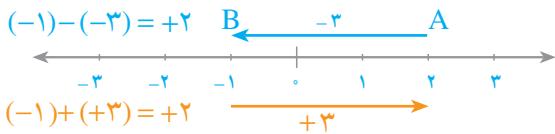
$$(-12) + (+17) \quad (-14) + (+10)$$

$$(-9) + (-7) \quad (+9) + (-15)$$

$$(-45) + (+45) \quad (-62) + (-38)$$



تفریق عددهای صحیح



در سال‌های قبل دیدید که برای تفریق کردن عدد b از عدد a ، می‌توانیم قرینه‌ی b را با a جمع

$$a - b = a + (-b)$$

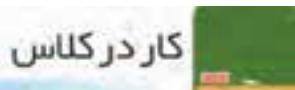
کنیم :

به مثال‌های زیر توجه کنید :

$$(-1) - (-3) = (-1) + (+3) = -1 + 3 = 2$$

$$(-5) - (+4) = (-5) + (-4) = 5 - 4 = 9$$

بنابراین، برای محاسبه‌ی حاصل تفریق، ابتدا تفریق را به جمع تبدیل می‌کنیم و سپس، حاصل جمع را به‌دست می‌آوریم.



۱- با تبدیل تفریق به جمع، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$(-5) - (+3) = (-5) + (-3) \quad (+3) - (+4) =$$

$$(-2) - (-8) = \quad (-6) - (-7) =$$

۲- تفریق‌های زیر را ابتدا به جمع تبدیل کنید و سپس با برداشتن پرانتز، حاصل آن‌ها را به‌دست آورید.

$$(+8) - (+5) = \quad (-5) - (+14) =$$

$$(-9) - (-3) = \quad (+12) - (-15) =$$



به تساوی‌های زیر توجه کنید.

$$(+8) - (+5) = (+8) + (-5) = 8 - 5$$

$$(-9) - (-3) = (-9) + (+3) = -9 + 3$$



با توجه به این دو تساوی، چگونگی مختصر کردن عبارت‌های تفریق را نتیجه بگیرید. با استفاده از نتیجه‌ای که گرفته‌اید، تساوی‌ها را کامل کنید.

$$(+8) - (+5) =$$

$$(-7) - (-4) =$$

$$(-9) - (-3) =$$

$$(+7) - (+4) =$$

کار در کلاس

۱- عبارت‌های زیر را با برداشتن پرانتز مختصر کنید.

$$(-6) - (-7) = -6 + 7$$

$$(-6) + (+7) =$$

$$(+8) - (+12) =$$

$$(+8) + (-12) =$$

$$(-5) - (+11) =$$

$$(-5) + (-11) =$$

۲- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را حساب کنید. ابتدا با برداشتن پرانتز عبارت را مختصر کنید.

$$(-9) - (-3) =$$

$$(+25) + (-36) =$$

$$(-12) + (-18) =$$

$$(+4) - (+18) =$$

$$(-65) - (-145) =$$

$$(-42) - (+58) =$$

تمرین

۱- هریک از عبارت‌های زیر را ابتدا با برداشتن پرانتز مختصر کنید و سپس، حاصل آن را حساب کنید.

$$(-8) - (+12)$$

$$(+13) + (-5)$$

$$(+8) - (+17)$$

$$(-35) - (-15)$$

$$(+47) - (-12)$$

$$(-9) + (-25)$$

۲- هریک از عبارت‌های زیر را تا می‌توانید ساده کنید.

$$((+1) - (-8)) + ((+4) - (+6))$$

$$((+3) + (-5)) - ((+7) + (-2))$$

۳- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را حساب کنید.

$$+14 - 9$$

$$5 + 8$$

$$5 - 12$$

$$-8 + 17$$

$$-8 + 7$$

$$-5 - 12$$

$$-5 - 8$$

$$-9 + 17$$

۴- هریک از مجموعه‌های زیر را به صورت‌هایی که قبلاً دیده‌اید، بیان کنید. مشخص کنید که هر مجموعه کوچک‌ترین عضو با بزرگ‌ترین عضو دارد یا نه.

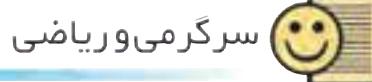
الف - مجموعه‌ی اعداد صحیح بین ۵ - و ۱

ب - مجموعه‌ی عددهای صحیح مثبت

پ - مجموعه‌ی عددهای صحیح منفی

۵- در جای خالی، علامت + یا - قرار دهید تا حاصل عبارت، بزرگ‌ترین عدد ممکن شود.

$$-5 \square (+3) \square (-6) \square (-9)$$



(برای سنین کمتر از ۱۹ سال)

سن شما	عدد به دست آمده	سن شما	عدد به دست آمده
۱۵	-۱	۴	۱
۱۱	-۲	۸	۲
۷	-۳	۱۲	۳
۳	-۴	۱۶	۴
۱۸	-۵	۱	۵
۱۴	-۶	۵	۶
۱۰	-۷	۹	۷
۶	-۸	۱۳	۸
۲	-۹	۱۷	۹

