فصل ششم

مدارهای R – L – C جریان متناوب

هدف‌های رفتاری : در پایان این فصل، از هنرجو انتظار می رود :

۱ـ مدار R–L–Cسری، موازی و مختلط را بررسی و دیاگرام برداری جریان و ولتاژ آنها را رسم کند و زوایای اختلاف فاز را از روی دیاگرام نشان دهد.

۲ـ روابط مربوط به محاسبهٔ مقاومت ظاهری و جریان ولتاژ، ضریب توان و توان‌ها را در مدارهای R–L–C سری، موازی و مختلط بنویسد و با استفاده از فرمول‌های مذکور مقادیر خواسته شده را محاسبه کند.

۳ـ تأثیر فرکانس را بر مقاومت ظاهری، جریان‌ها، توان‌ها و ضریب توان با نوشتن فرمول‌های مربوط در مدارهای سری و موازی بررسی کند.

۴ـ فرکانس رزنانس را برای مدارهای R–L–C سری و موازی محاسبه کرده و موارد کاربرد فرکانس رزنانس را ذکر کند.

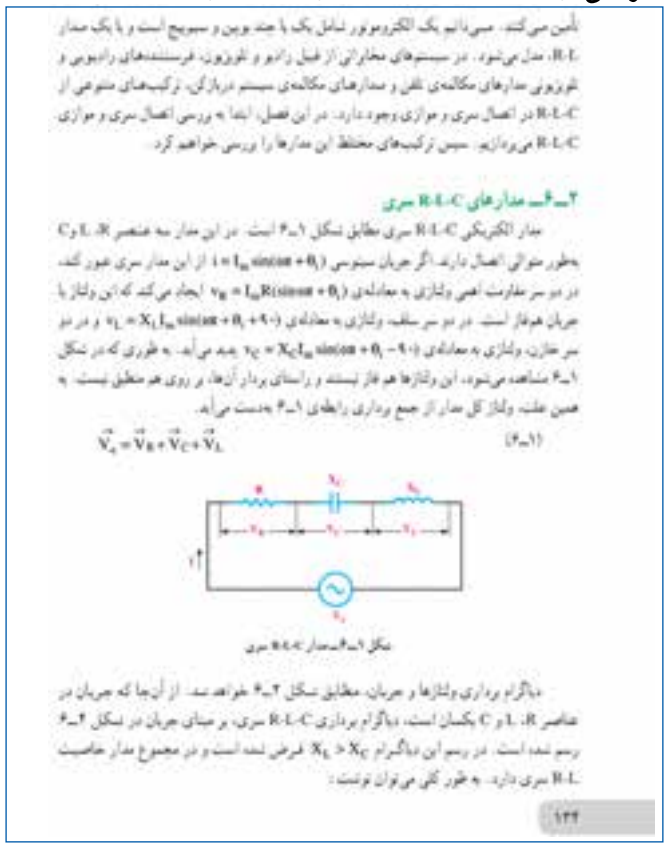
۵ـ پهنای باند و ضریب کیفیت رزنانس مدارهای R–L–C سری و موازی را به‌دست آورد.

۶ـ معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای R–L–C سری و موازی را به‌دست آورد.

۱ـ۶ـ مقدمه

هنرآموز محترم در این فصل نیز شبیه فصل‌های قبلی جهت ایجاد انگیزه بیشتر برای هنرجویان این درس ابتدا به کاربرد محتوای فصل اشاره نمایید تا زمینه مساعدی جهت پیگیری بیشتر درس فراهم شود. مدارهای R–L–C هم در صنعت برق و الکترونیک و هم در مخابرات کاربرد فراوانی دارند الکتروموتورها و ترانسفورماتور معادل یک مدار R–L هستند.

یک خط انتقال برق فشار قوی می‌تواند معادل یک خازن عمل کند. خطوط برق و سطح زمین جوشن‌های آن و هوا نقش دی‌الکتریک را دارد حتی خطوط حامل برق با همدیگر نیز این اثر را دارند. در یک ترانسفورماتور روغنی سیم‌پیچ اوّلیه و ثانویه و عایق بین آنها به همراه روغن و مقاومت اهمی سیم‌پیچ‌ها می‌تواند ترکیبی از المان‌های مقاومت و خازن و سلف را داشته باشد.



تأمین می‌کند. می‌دانیم یک الکتروموتور شامل یک یا چند وین و سیم‌پیچ است و با یک مدار R-L مدل می‌شود. در سیستم‌های مخابراتی از قبیل رادیو و تلویزیون، فرستنده‌های رادیویی و تلویزیونی مدارهای مکالمه‌ی تلفن و مدارهای مکالمه‌ی سیستم دربازگی، ترکیب‌های متنوعی از R-L-C در اتصال سری و موازی وجود دارد. در این فصل، ابتدا به بررسی اتصال سری و موازی R-L-C می‌پردازیم. سپس ترکیب‌های مختلط این مدارها را بررسی خواهیم کرد.

۲ـ۶ـ مدارهای R-L-C سری

مدار الکتریکی R-L-C سری مطابق شکل ۱ـ۶ است. در این مدار سه عنصر R و L و C بطور متوالی اتصال دارند. اگر جریان سینوسی $i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$ از این مدار سری عبور کند، در دو سر مقاومت اهمی ولتاژی به معادله‌ی $v_R = I_m R \sin(\omega t + \theta_i)$ ایجاد می‌کند که این ولتاژ با جریان هم‌فاز است. در دو سر سلف، ولتاژی به معادله‌ی $v_L = X_L I_m \sin(\omega t + \theta_i + 90^\circ)$ و در دو سر خازن، ولتاژی به معادله‌ی $v_C = X_C I_m \sin(\omega t + \theta_i - 90^\circ)$ پدید می‌آید. به طوری که در شکل ۱ـ۶ مشاهده می‌شود، این ولتاژها هم فاز نیستند و راستای بردار آن‌ها، بر روی هم منطبق نیست. به همین علت، ولتاژ کل مدار از جمع برداری رابطه‌ی ۱ـ۶ بدست می‌آید.

$$\vec{V}_s = \vec{V}_R + \vec{V}_C + \vec{V}_L \qquad (۱ـ۶)$$

شکل ۱ـ۶ـ مدار R-L-C سری

دیاگرام برداری ولتاژها و جریان، مطابق شکل ۲ـ۶ خواهد شد. از آنجا که جریان در عناصر R، L و C یکسان است، دیاگرام برداری R-L-C سری، بر مبنای جریان در شکل ۲ـ۶ رسم شده است. در رسم این دیاگرام $X_L > X_C$ فرض شده است و در مجموع مدار خاصیت R-L سری دارد. به طور کلی می‌توان نوشت:

۱۲۲

۲ـ۶ـ مدار R–L–C سری

برای ارتباط بهتر و مؤثرتر هنرجویان در تحلیل مدارهای R–L–C می‌توانیم به آنها بگوییم که

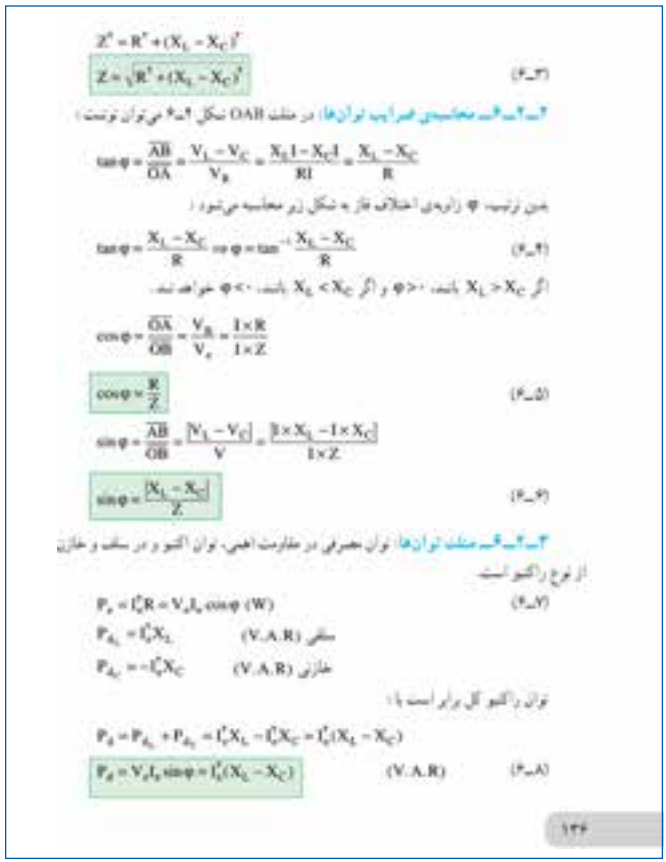
مدار R–L–C سری همان مدار L–C سری است که فقط یک مقاومت اهمی به آن اضافه شده است و برای تحلیل آنها ابتدا بهتر است R را ندید فرض کنیم و مقدار راکتانس نهایی L–C را به‌دست آوریم و حاصل آن (یعنی تفاضل X_L و X_C) را که با X معادل می‌کنیم با مقاومت R به‌صورت یک R–Xسری بررسی کنیم.

خاصیت مدار R–L–C سری، دقیقاً به وضعیت X_L و X_C برمی‌گردد یعنی هرکدام که مقدار بزرگتری داشت نوع مدار را مشخص می‌کند. مدار به‌دست آمده R–X سری یا یک مدار R–L است و یا یک مدار R–C می‌باشد که قبلاً تحلیل آن را در فصل‌های گذشته آموخته‌ایم.

بنابراین مدارهای R–L–C سری نهایتاً به یک R–L یا R–C سری تبدیل و تحلیل آن بسیار آسان خواهد شد. برای محاسبه ولتاژ کل ابتدا V_L و V_C از همدیگر کسر شده و حاصل آن با ولتاژ مقاومت V_R جمع برداری می‌شود.

به دلیل وجود R، توان اکتیو دیگر صفر نبوده و حتی اختلاف فاز بین ولتاژ کل و جریان کل برابر مقدار φ خواهد بود.

خلاصه این موارد به‌صورت شماره گذاری شده در صفحه ۱۳۵ کتاب درسی در ۴ شماره آورده شده است.



$$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (۴\text{ـ}۳)$$

$$\tan\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L I - X_C I}{RI} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\frac{X_L - X_C}{R} \qquad (۴\text{ـ}۴)$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{V_R}{V_s} = \frac{I \times R}{I \times Z}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \qquad (۴\text{ـ}۵)$$

$$\sin\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{|V_L - V_C|}{V} = \frac{|I \times X_L - I \times X_C|}{I \times Z}$$

$$\sin\varphi = \frac{|X_L - X_C|}{Z} \qquad (۴\text{ـ}۶)$$

$$P_a = I_e^2 R = V_e I_e \cos\varphi \ (W) \qquad (۴\text{ـ}۷)$$

$$P_{a_L} = I_e^2 X_L \qquad (V.A.R)$$

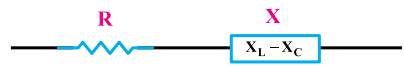
$$P_{a_C} = -I_e^2 X_C \qquad (V.A.R)$$

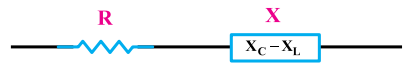
$$P_a = P_{a_L} + P_{a_C} = I_e^2 X_L - I_e^2 X_C = I_e^2 (X_L - X_C)$$

$$P_a = V_e I_e \sin\varphi = I_e^2 (X_L - X_C) \qquad (V.A.R) \qquad (۴\text{ـ}۸)$$

الف) محاسبه امپدانس و ضریب توان :

$$\text{if} \begin{cases} X_L \rangle X_C \rightarrow X = X_L - X_C \\ X_C \rangle X_L \rightarrow X = X_C - X_L \end{cases}$$





شکل ۱ـ۶

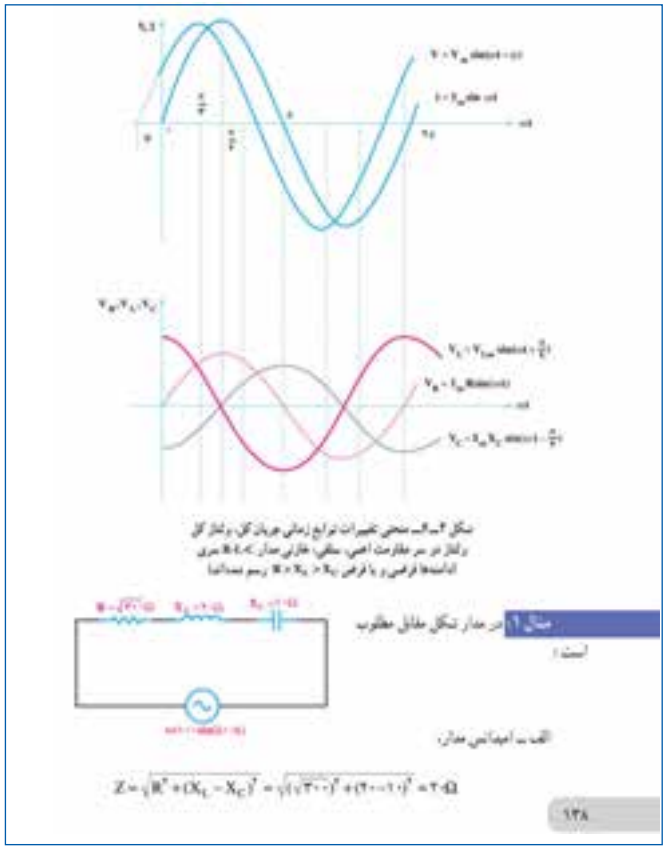
در هر دو صورت بالا برای به‌دست آوردن مقدار Z خواهیم داشت :

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{R}{Z} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{X}{Z}$$

ب) محاسبه توان‌ها در مدارهای R–L–C سری :

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi = R.I_e^{۲}$$

$$P_d = V_e I_e \sin\varphi = X.I_e^{۲}$$



در مثال ۱ صفحهٔ ۱۳۸ با در نظر نگرفتن R داریم :

$$X=X_L-X_C=۲۰-۱۰=۱۰\Omega \qquad (X_L>X_C)$$

پس مدار، خاصیت سلفی خواهد داشت (البته سلفی ــ اهمی)

$$Z=\sqrt{R^{۲}+X^{۲}}=\sqrt{۳۰۰^{۲}+۱۰^{۲}}=۲۰\ \Omega$$

و برای محاسبهٔ توان‌ها داریم :

$$P_e = R.I_e^2 = \sqrt{300} \times (\frac{5}{\sqrt{2}})^2 = 125\sqrt{3} \ \ W$$

$$P_d = X.I_e^2 = 10 \times (\frac{5}{\sqrt{2}})^2 = 125 \ \ VAR$$ (با علامت مثبت چون مدار سلفی است)

$$P_S = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{(125\sqrt{3})^2 + (125)^2} = 250 \ \ VA$$

به نظر می‌رسد با این روش راه‌حل مقداری کوتاه‌تر و موجزتر شده باشد.

۱ـ۲ـ۶ـ تمرین شماره ۱ صفحه ۱۶۰ کتاب درسی (شکل ۲ـ۶)

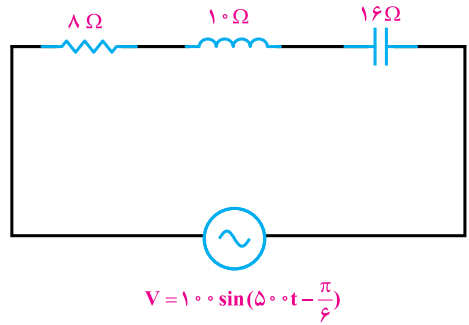
الف)

هدف : محاسبه امپدانس مدار

در مدارات R–L–C، امپدانس کل مدار از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است.

$$X = X_C - X_L = 6 \ \ \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \ \ \Omega$$



شکل ۲ـ۶

ب)

هدف : نوشتن معادلهٔ زمانی جریان منبع

گام ۱) با داشتن مقادیر ولتاژ ماکزیمم و امپدانس کل مدار، می‌توان جریان ماکزیمم را بیابیم.

$$V_m = I_m.Z \ \ , \ \ I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{100}{10} = 10 \ \ A$$

گام ۲) با استفاده از رابطه موجود برای θ_1 و φ به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$X_C > X_L \quad , \quad \varphi < 0$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{X}{R} = \tan^{-1}\frac{16-10}{8} = \tan^{-1}\frac{6}{8} = 36/8^\circ$$

به دلیل اینکه $X_C > X_L$ و $\varphi < 0$ خواهد شد، بنابراین جریان پیش‌فاز است و $\theta_I > 0$ خواهد بود.

$$\varphi = \theta_V - \theta_I \rightarrow -36/8^\circ = -30^\circ - \theta_I \rightarrow \theta_I = 6/8^\circ$$

پ)

هدف : نوشتن ولتاژ دو سر هر المان

ولتاژ مقاومت با جریان کل مدار هم‌فاز است.

$$V_R(t) = I_m R \sin(\omega t + \theta_I) = 80 \sin(500t + 6/8^\circ)$$

ولتاژ سلف ۹۰ درجه جلوتر از جریان است.

$$V_L(t) = I_m X_L \sin(\omega t + \theta_I + \frac{\pi}{2}) = 100 \sin(500t + 6/8^\circ + 90^\circ)$$

$$V_L(t) = 100 \sin(500t + 96/8^\circ)$$

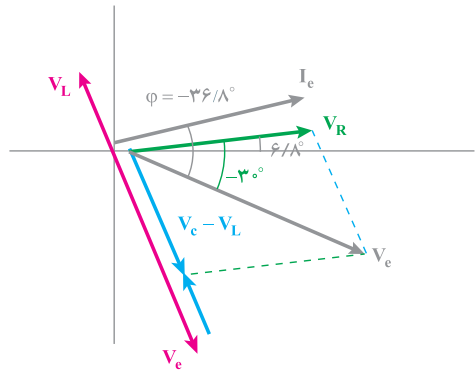
ولتاژ خازن ۹۰ درجه عقب‌تر از جریان است.

$$V_C(t) = I_m X_C \sin(\omega t + \theta_I - \frac{\pi}{2}) = 160 \sin(500t - 83/2^\circ)$$

ت)

هدف : رسم دیاگرام برداری جریان و ولتاژ

توجه داشته باشید که $V_C > V_L$ می‌باشد و مدار خاصیت خازنی دارد. با توجه به مقادیر گفته شده در مورد زوایای هریک از ولتاژها دیاگرام بردار به‌صورت زیر خواهد بود.



شکل ۳ــ۶

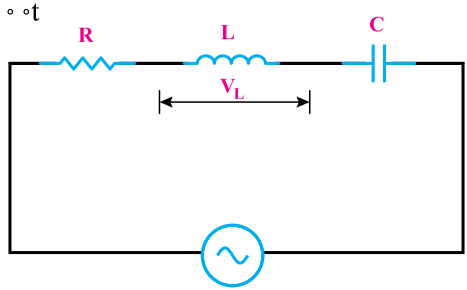
۲ـ۲ـ۶ـ حل تمرین شمارهٔ ۳ صفحه ۱۶۰ کتاب درسی (شکل ۴ــ۶)

هدف : محاسبه مقادیر R و C و L

$$V_L = ۱۸۰\sqrt{۲}\sin(۲۰۰۰t + \frac{\pi}{۲})$$

$$V = ۱۰۰\sqrt{۲}\sin(۲۰۰۰t + ۵۳^\circ)$$

$$i = ۲۰\sqrt{۲}\sin ۲۰۰۰t$$



شکل ۴ــ۶

در یک مدار R–L– C سری، جریان منبع برابر است با جریان تک‌تک المان‌ها

گام ۱) با توجه به مقدار ولتاژ سلف و جریان عبوری از آن به راحتی می‌توانیم مقدار مقاومت سلفی و پس از آن مقدار L را بیابیم.

$$X_L = \frac{V_{L_m}}{I_m} = \frac{۱۸۰\sqrt{۲}}{۲۰\sqrt{۲}} = ۹\ \Omega$$

$$X_L = L\omega \rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{۹}{۲۰۰۰} = ۴/۵\ mH$$

گام ۲) با توجه به روابط موجود برای $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ می‌توان R و C را به‌صورت زیر یافت.

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{۱۰۰\sqrt{۲}}{۲۰\sqrt{۲}} = ۵\ \Omega$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود $\varphi > ۰$ می‌باشد و در نتیجه $X_C < X_L$ خواهد بود، که دلیلی بردرستی محاسبات ما می‌باشد.

$$\varphi = \theta_V - \theta_I = ۵۳^\circ - ۰ = ۵۳^\circ$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \rightarrow R = Z\cos\varphi = ۵\cos ۵۳ = ۳\ \Omega$$

$$\sin\varphi = \frac{|X_L - X_C|}{Z} \rightarrow |X_L - X_C| = Z\sin\varphi = ۵\sin ۵۳^\circ = ۴\ \Omega$$

$$X_L - X_C = ۴ \quad \rightarrow \quad ۹ - X_C = ۴ \quad \rightarrow X_C = ۵\ \Omega$$

$$X_C = \frac{۱}{C\omega} \rightarrow C = \frac{۱}{X_C.\omega} = \frac{۱}{۵ \times ۲۰۰۰} = ۱۰۰\ \mu F$$

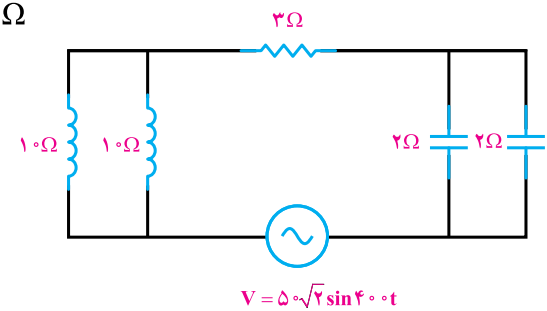
۳ـ۲ـ۶ـ حل تمرین شمارهٔ ۶ صفحه ۱۶۱ کتاب درسی (شکل ۵ـ۶)

هدف : مطلوب است تعیین معادلهٔ زمانی جریان منبع

گام ۱) مدار را به ساده‌ترین شکل درمی‌آوریم.

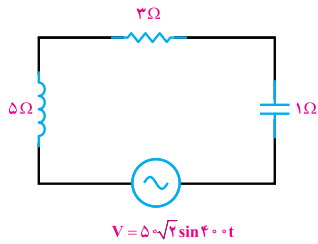
$(۱۰ \| ۱۰) = ۵\ \Omega$

$(۲ \| ۲) = ۱\ \Omega$



شکل ۵ـ۶

ـ در نهایت ساده‌سازی مدار، مدار به صورت R–L– C سری خواهد شد (شکل ۶ـ۶).



شکل ۶ـ۶

تذکر: همکاران گرامی، بعضی از هنرجویان ضعیف هنگام ساده‌سازی دو سلف موازی یا دو خازن موازی، به مقدار واحد گزارش شده توجه ندارند و تفکیکی بین واحد F و Ω قائل نمی‌شوند شما می‌توانید با مثال‌های بیشتر آنها را در این خصوص کمک نمایید. این موارد در فصل L–C و R–L–C بیشتر دیده می‌شود.

گام ۲) محاسبهٔ Z و پس از آن I_m

$$Z = \sqrt{R^۲ + X^۲} = \sqrt{۳^۲ + (۵-۱)^۲} = ۵\ \Omega$$

$$V_m = I_m.Z \quad , \quad I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{۵۰\sqrt{۲}}{۵} = ۱۰\sqrt{۲}\ A$$

گام ۳) محاسبهٔ θ_I

$$X_L > X_C \quad , \quad \varphi > ۰$$

$$\varphi = \tan^{-۱}\frac{|X_L - X_C|}{R} = \tan^{-۱}\frac{۴}{۳} = ۵۳^\circ$$

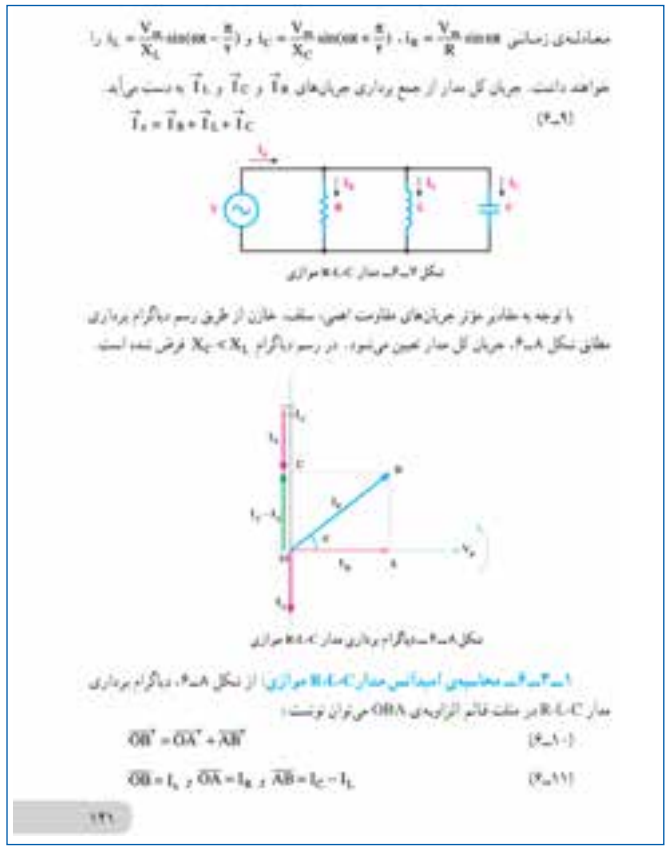
$$\varphi = \theta_V - \theta_I \rightarrow ۵۳^\circ = ۰ - \theta_I \rightarrow \theta_I = -۵۳^\circ$$

گام ۴) نوشتن معادلهٔ زمانی جریان

$$i(t) = ۱۰\sqrt{۲}\sin(۴۰۰t - ۵۳^\circ)$$

۳ـ۶ـ مدار R–L–C موازی

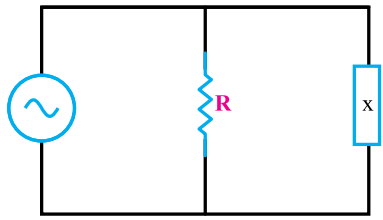
در مدارهای R–L–C موازی نیز، شبیه سری رفتار می‌کنیم بهتر است اینجا هم ابتدا، R را ندید فرض کنیم و یک مدار L–C موازی تشکیل دهیم محاسبه راکتانس نهایی مدار L–C موازی را X می‌نامیم و حاصل آن با مقاومت R یک مدار R–X موازی تشکیل خواهد داد (شکل ۷ـ۶).



الف) محاسبهٔ امپدانس مدار R–L–C سری :

برای محاسبه امپدانس مدار R–X داریم :

$$Z=\frac{R.X}{\sqrt{R^{۲}+X^{۲}}} \qquad (X=\frac{X_L.X_C}{|X_L-X_C|})$$



شکل ۷ــ۶

البته کیفیت مدار همین‌جا نیز قابل تشخیص است یعنی هرکدام از X_L یا X_C کوچکتر باشد مقدار جریان نظیر آن شاخه را بیشتر و خاصیت سلفی یا خازنی را تعیین می‌کند.

مقدار ضریب توان در مدار R–L–C موازی نیز از رابطه $\cos\varphi=\frac{Z}{R}$ قابل تحلیل است :

برای محاسبه جریان کل می‌توانیم ابتدا جریان سلف و خازن را از همدیگر کسر نماییم و حاصل را با جریان مقاومت به‌صورت برداری جمع کنیم.

$$I_X=I_L-I_e \quad , \quad \text{کل}I=\sqrt{I_R^{۲}+I_X^{۲}}$$

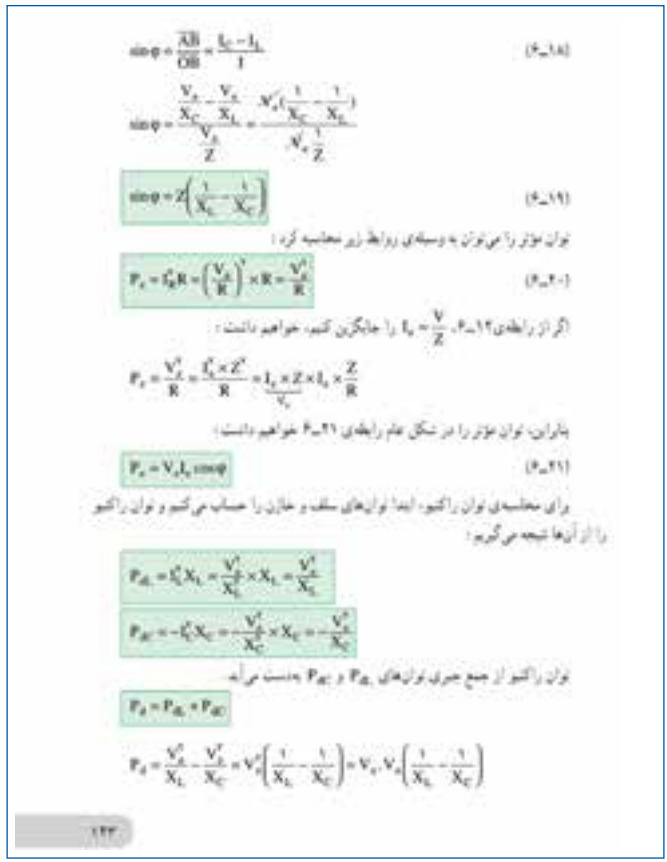
الف) محاسبه توان‌های اکتیو، راکتیو و ظاهری :

برای محاسبه توان‌ها بهتر است از روابط زیر استفاده کنیم :

$$P_e=\frac{V_e^{۲}}{R}=V_eI_e\cos\varphi$$

$$P_d=V_e^{۲}(\frac{۱}{X_L}-\frac{۱}{X_C})=\pm V_eI_e\sin\varphi$$

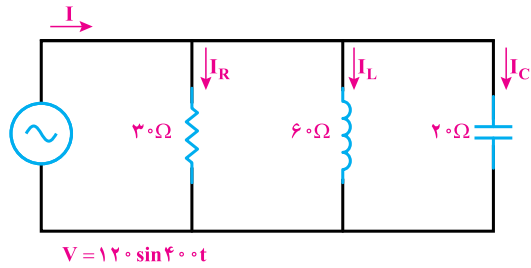
$$P_s=V_eI_e=\sqrt{P_e^{۲}+P_d^{۲}}$$



۱ـ۳ـ۶ـ حل تمرین شمارهٔ ۱۰ صفحه ۱۶۲ کتاب درسی (شکل ۸ـ۶)

الف)

هدف : محاسبهٔ جریان شاخه‌ها و معادلات آنها



شکل ۸ـ۶

گام ۱) با توجه به ولتاژ منبع (در مدارات موازی، ولتاژ برای همهٔ المان‌ها یکی است.) می‌توان جریان هرشاخه را یافت.

$$I_R = \frac{V_m}{R} = \frac{۱۲۰}{۳۰} = ۴ \ A$$

$$I_C = \frac{V_m}{X_C} = \frac{۱۲۰}{۲۰} = ۶ \ A$$

$$I_L = \frac{V_m}{X_L} = \frac{۱۲۰}{۶۰} = ۲ \ A$$

تذکر: همان‌طور که در مدار R–L–C سری ولتاژهای V_L و V_C از هم کسر می‌شدند در مدارات R–L–C موازی نیز I_L و I_C برداری خلاف جهت همدیگر داشته و از هم کم می‌شوند.

جریان مقاومت هم‌فاز با ولتاژ منبع است.

$$i_R = ۴\sin ۴۰۰t$$

جریان خازن، ۹۰° جلوتر از ولتاژ می‌باشد.

$$i_C = ۶\sin(۴۰۰t + \frac{\pi}{۲})$$

جریان سلف، ۹۰° عقب‌تر از ولتاژ می‌باشد.

$$i_L = ۲\sin(۴۰۰t - \frac{\pi}{۲})$$

ب)

هدف : محاسبهٔ جریان منبع و نوشتن معادلهٔ آن

با توجه به روابط موجود برای جریان منبع که حاصل از جمع برداری جریان شاخه‌هاست و اختلاف‌فاز بین ولتاژ و جریان می‌توان معادلهٔ جریان را نوشت.

$$I_e = \sqrt{I_R{}^۲ + (I_C - I_L)^۲} = \sqrt{۴^۲ + (۶-۲)^۲} = ۴\sqrt{۲} \ \ A$$

$$\varphi = \tan^{-۱} R(\frac{۱}{X_C} - \frac{۱}{X_L}) = \tan^{-۱} ۳۰(\frac{۱}{۲۰} - \frac{۱}{۶۰}) = ۴۵^\circ \ , \ X_L > X_C \ \rightarrow \ \varphi > ۰$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I \rightarrow ۴۵^\circ = ۰ - \theta_I \rightarrow \theta_I = -۴۵^\circ$$

$$i(t) = ۴\sqrt{۲}\sin(۴۰۰t - ۴۵^\circ)$$

پ)

هدف : محاسبهٔ امپدانس کل مدار

با توجه به رابطهٔ موجود برای امپدانس خواهیم داشت.

$$\frac{۱}{Z}=\sqrt{\frac{۱}{R^{۲}}+(\frac{۱}{X_C}-\frac{۱}{X_L})^{۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۳۰^{۲}}+(\frac{۱}{۲۰}-\frac{۱}{۶۰})^{۲}}=۰/۰۴۷\ \Omega$$

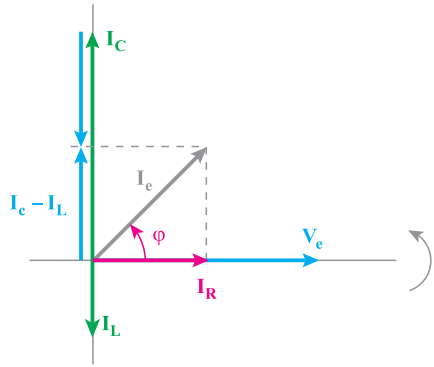
$Z=۲۱/۲۷\ \Omega$

ت)

هدف : رسم دیاگرام برداری جریان و ولتاژ

ابتدا جریان خازن و سلف و مقاومت را نسبت به V_e (مبنا) با توجه به زوایای موجود برای هریک رسم کرده و در نهایت برآیند جریان‌ها را محاسبه می‌کنیم (شکل ۹ ــ۶).

زاویهٔ بین جریان و ولتاژ منبع برابر با φ می‌باشد.

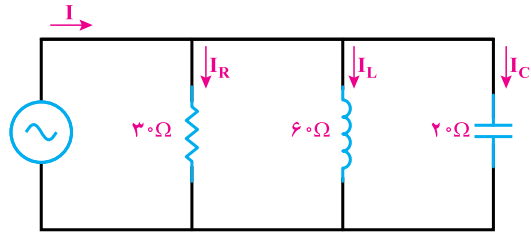


شکل ۹ ــ۶

۲ـ۳ـ۶ـ حل تمرین شمارهٔ ۱۱ صفحه ۱۶۳ کتاب درسی (شکل ۱۰ ـ۶)

الف)

هدف : با توجه به جریان موجود برای مقاومت می‌خواهیم ولتاژ منبع و معادله آن را محاسبه کنیم.



شکل ۱۰ــ۶

در مدارات موازی ولتاژ تمام شاخه‌ها با هم برابر بوده و برابر مقاومت هر شاخه در جریان عبوری از همان شاخه می‌باشد.

$$V_{R_m} = V_e = V_{L_m} = V_{C_m} = RI_{R_m} = ۳۰ \times ۶۰ = ۱۸۰ \ V$$

ولتاژ منبع با ولتاژ و جریان مقاومت هم‌فاز است.

$$V_R(t) = ۱۸۰ \sin ۱۰۰ t$$

ب)

هدف : محاسبهٔ جریان منبع و معادله آن

گام ۱) محاسبهٔ جریان تک‌تک شاخه‌ها

$$I_{L_m} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{۱۸۰}{۶۰} = ۳A$$

$$I_{C_m} = \frac{V_m}{X_C} = \frac{۱۸۰}{۲۰} = ۹A$$

گام ۲) با استفاده از جمع برداری جریان تک‌تک شاخه‌ها و جریان منبع را می‌یابیم.

$$I_e = \sqrt{I_R{}^۲ + (I_C - I_L)^۲} = \sqrt{۶^۲ + (۹-۳)^۲} = ۶\sqrt{۲} \quad A$$

گام ۳) با توجه به رابطهٔ مدارات موازی، اختلاف فاز موجود بین ولتاژ و جریان را می‌یابیم.

$$\varphi = \tan^{-۱} R(\frac{۱}{X_C} - \frac{۱}{X_L}) = \tan^{-۱} ۳۰(\frac{۱}{۲۰} - \frac{۱}{۶۰}) = ۴۵^\circ \ , \ X_L > X_C \ \rightarrow \ \varphi > ۰$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I \rightarrow ۴۵^\circ = ۰ - \theta_I \rightarrow \theta_I = -۴۵^\circ$$

گام ۴) نوشتن معادلهٔ جریان منبع

$$i(t) = ۶\sqrt{۲} \sin(۱۰۰۰t - ۴۵^\circ)$$

پ)

هدف : محاسبهٔ توان‌های مدار و رسم توان

گام ۱) محاسبهٔ توان‌ها با توجه به روابط موجود

$$I_e = \frac{۶\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۶A \ , \ V_e = \frac{۱۸۰}{\sqrt{۲}} V$$

$$P_e = I_e{}^۲.R = V_e I_e \cos\varphi = \frac{۱۸۰}{\sqrt{۲}} \times ۶ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۵۴۰ w$$

$$P_{d_L} = I_L^۲.X_L = (۶)^۲ \times ۶۰ = ۲۷۰ V.A.R$$

$$P_{d_C} = -I_C^2 . X_C = -(۶)^۲ \times ۲۰ = -۸۱۰ \text{ V.A.R}$$

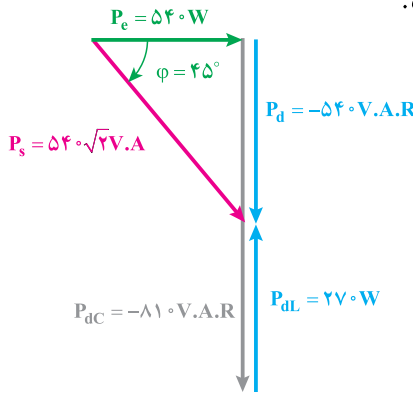
$$\vec{P_d} = \vec{P_{d_L}} + \vec{P_{d_C}} = ۲۷۰ - ۸۱۰ = -۵۴۰ \text{ V.A.R}$$

$$P_s = \sqrt{P_e^۲ + P_d^۲} = V_e I_e = \sqrt{۲} \text{ V.A}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود $|P_d|=|P_e|$ می‌باشد و این مسئله مقدار $\varphi=۴۵^\circ$ را تصدیق می‌کند.

گام ۲) رسم مثلث توان

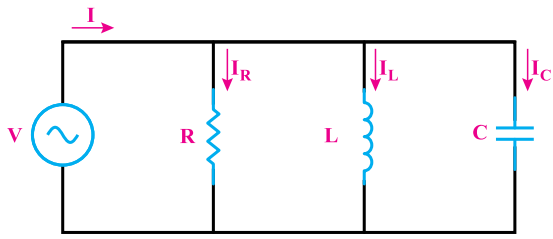
مطابق شکل ۱۱ــ۶ توان راکتیو خازنی نسبت به راکتیو سلفی بیشتر است بنابراین مثلث توان‌ها در کل به بار خازنی شبیه است.



شکل ۱۱ــ۶

۳ـ۳ـ۶ـ حل تمرین شمارهٔ ۱۳ صفحه ۱۶۳ کتاب درسی (شکل ۱۲ـ۶)

هدف : با توجه به جریان‌های بیان شده محاسبهٔ مقدار C و L و R



$$i_C = ۱۰\sin(۲۵۰۰t + \frac{\pi}{۲})$$

$$i = ۵\sin(۲۵۰۰t + \frac{\pi}{۲})$$

$$V = ۱۰۰\sin ۲۵۰۰t$$

شکل ۱۲ــ۶

گام ۱) C را می‌توان با توجه به جریان عبوری از خازن و ولتاژ دو سر آن یافت.

تذکر: همان‌طور که قبلاً گفته شده یادآوری می‌کنیم که با داشتن معادلهٔ ولتاژ کل و جریان کل مقدار Z و φ قابل دسترسی است.

$$Z=\frac{V_m}{I_m}=\frac{۱۰۰}{۵}=۲۰\ \Omega$$

$$X_C=\frac{V_m}{I_{C_m}}=\frac{۱۰۰}{۱۰}=۱۰\ \Omega \rightarrow C=\frac{۱}{X_C.\omega}=\frac{۱}{۱۰\times ۲۵۰۰}=۴۰\mu F$$

گام ۲) ابتدا می‌توان اختلاف فاز را با توجه به معادلهٔ ولتاژ و جریان یافت و سپس با توجه به ضریب توان مؤثر مدار مقدار مقاومت را یافت.

$$X_L>X_C\ ,\ \varphi<۰$$

$$\varphi=\theta_V-\theta_I=۰-۴۵^\circ=-۴۵^\circ$$

$$\cos\varphi=\frac{Z}{R}\rightarrow R=\frac{Z}{\cos\varphi}=\frac{۲۰}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۲۰\sqrt{۲}\ \Omega$$

گام ۳) با توجه به ضریب توان غیرمؤثر مقدار L را به صورت زیر می‌یابیم.

$$\sin\varphi=Z(\frac{۱}{X_L}-\frac{۱}{X_C})\rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲۰(\frac{۱}{X_L}-\frac{۱}{۱۰})\rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۴۰}=\frac{۱}{X_L}-\frac{۱}{۱۰}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{X_L}=\frac{۱}{۱۰}-\frac{\sqrt{۲}}{۴۰}=\frac{۴-\sqrt{۲}}{۴۰}=۰/۰۶\rightarrow X_L=۱۵/۵\ \Omega$$

$$L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{۱۵/۵}{۲۵۰۰}=۶\ mH$$

ب)

گام ۱) با توجه به اینکه جریان مقاومت با ولتاژ دو سر منبع هم‌فاز است معادلهٔ جریان مقاومت به صورت زیر خواهد بود.

$$I_{R_m}=\frac{V_m}{R}=\frac{۱۰۰}{۲۰\sqrt{۲}}=۳/۵\ A$$

$$i_R(t)=۳/۵\sin ۲۵۰۰t$$

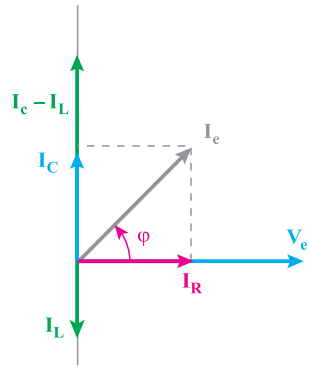
گام ۲) با توجه به اینکه جریان سلف از ولتاژ دو سر منبع ۹۰° عقب‌تر است معادلهٔ جریان مقاومت سلفی به صورت زیر خواهد بود.

$$I_{L_m} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{۱۰۰}{۱۵/۵} = ۶/۴۵\ A$$

$$i_L(t) = ۶/۴۵ \sin(۲۵۰۰t - \frac{\pi}{۲})$$

ج)

رسم دیاگرام ولتاژ و جریان‌ها مطابق شکل ۱۳ــ۶ رسم می‌گردد.

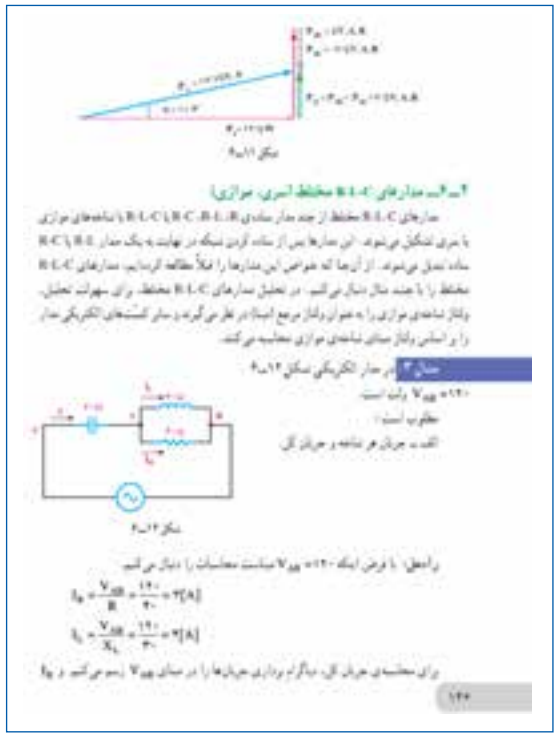


شکل ۱۳ــ۶

۴ـ۶ـ مدارهای R–L–C مختلط (سری ـ موازی)

همکار ارجمند برای معرفی این‌گونه مدارها به هنرجویان بگوییم همان‌طور که در مبانی برق مدارهای مختلط یا سری ــ موازی داشتیم در مدارهای R–L–C نیز گاهی به مدارهایی برخورد می‌کنیم که از ترکیب سری یا موازی چند مقاومت، سلف یا خازن تشکیل شده‌اند.

اساس ساده‌سازی و تحلیل این مدارها، مبنا قرار دادن ولتاژ شاخه‌های موازی است. به عبارت دیگر شبیه مبنا بودن جریان در مدار سری و ولتاژ در مدار موازی، در اینجا نیز مبنا ولتاژ شاخه‌های موازی خواهد بود.



۱ـ۴ـ۶ـ مثال حل شدهٔ صفحه ۱۴۶ کتاب درسی (مثال ۳)

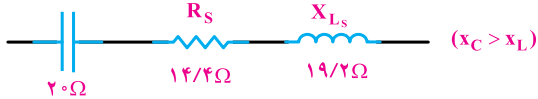
جریان‌های خازن و ولتاژ به سادگی قابل محاسبه هستند در این مثال مبنا ولتاژ دو سر سلف و مقاومت یا V_{AB} است.

یکی از راه‌حل‌هایی که می‌توانیم در نظر بگیریم تبدیل کردن R–L موازی به اتصال R–L سری است سپس مدار تبدیل به یک R–L–C سری می‌شود و در نهایت قابل بررسی خواهد بود. در ادامه همین مثال را از روش تبدیل شاخه موازی به سری حل می‌کنیم.

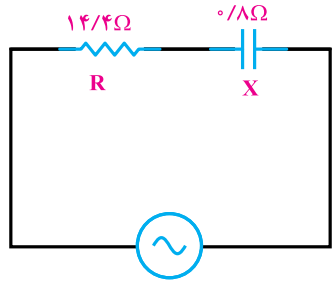
$$R_S = \frac{Z_P^{\,2}}{R_P} = \frac{۲۴^{۲}}{۴۰} = ۱۴/۴\,\Omega$$

$$X_{L_S} = \frac{Z_P^{\,2}}{X_{L_P}} = \frac{۲۴^{۲}}{۳۰} = ۱۹/۲\ \Omega$$

$$Z_P = \frac{۳۰\times۴۰}{\sqrt{۳۰^{۲}+۴۰^{۲}}} = \frac{۱۲۰۰}{۵۰} = ۲۴\ \Omega$$

$\Longrightarrow$ 

از ساده‌سازی این مدار به یک مدار R–C سری می‌رسیم (شکل ۱۴ــ۶).



شکل ۱۴ــ۶

$$X=۲۰-۱۹/۲=۰/۸\,\Omega$$

$$X_C \quad X_{L_S}$$

مقدار جریان کل مدار را قبلاً به‌دست آوردیم که برابر است با :

$$I_e=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵\,A$$

و برای مقدار امپدانس داریم :

$$Z=\sqrt{۱۴/۴^۲+۰/۸^۲}=۱۴/۴۲\,\Omega$$

$$V_e=Z.I_e=۷۲/۱\ v$$

شاید این راه کوتاه‌تر به‌نظر برسد ولی از راه حل کتاب درسی نکات بیشتری دستگیر هنرجویان می‌شود زیرا مرتب قوانین یادگرفته گذشته و روابط آنها را مرور می‌کنند.

در هر حال می‌توانیم این راه حل را نیز به آنها نشان دهیم تا بتوانند در بعضی از مسائل از آن استفاده کنند.

در مثال حل شده صفحه ۱۴۹ (مثال ۴) مجدداً مبنا ولتاژ شاخه موازی بوده و پس از محاسبه $Z_۱$ و $Z_۲$ و برای هر شاخه جریان آن شاخه‌ها و جریان کل را با رعایت اختلاف فاز شاخه به‌دست آورده است.

۵ـ۶ـ رزنانس یا تشدید در مدارهای R–L–C سری

در مدارهای سری در حالت تشدید مقدار امپدانس به دلیل اتصال کوتاه شدن C و L به مقداری معادل R می‌رسد (Z=R) مقدار فرکانس رزونانس از همان رابطه $f_r=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}}$ به‌دست می‌آید.

تغییرات امپدانس و جریان مدار R–L–C سری مطابق منحنی و جدول صفحه ۱۵۳ کتاب درسی آورده شده است.

توان ظاهری هر شاخه با توجه به مثلث توان هر شاخه در شکل ۶ـ۱۸ محاسبه می‌شود.

$$P_{S_1} = \sqrt{P_{a_1}^2 + P_{d_1}^2} = \sqrt{۴۰۰^2 + ۳۰۰^2} = ۵۰۰[V.A]$$

$$P_{S_2} = \sqrt{P_{a_2}^2 + P_{d_2}^2} = \sqrt{۱۲۰^2 + (-۱۶۰)^2} = ۲۰۰[V.A]$$

برای محاسبه‌ی توان ظاهری کل باید به مثلث ABC توجه کرد و نوشت:

$$P_a = P_{a_1} + P_{a_2} = ۴۰۰ + ۱۲۰ = ۵۲۰[W]$$

$$P_d = P_{d_1} - P_{d_2} = ۳۰۰ - ۱۶۰ = ۱۴۰[V.A.R]$$

$$P_S^2 = P_a^2 + P_d^2$$

$$P_S = \sqrt{P_a^2 + P_d^2} = \sqrt{(۵۲۰)^2 + ۱۴۰^2} = ۵۳۸/۵[V.A]$$

ج ـ ضریب قدرت کل شبکه‌ی $\cos\phi$:

$$\cos\phi = \frac{P_a}{P_S} = \frac{۵۲۰}{۵۳۸/۵} = ۰/۹۶$$

۵ـ۶ـ رزنانس در مدارهای R-L-C سری

فرض می‌کنیم مقادیر R، C و L در مدار R-L-C سری در طول تغییرات فرکانس همواره ثابت بمانند. در فرکانس‌های کم، $X_C = \frac{۱}{۲\pi fC}$، راکتانس خیلی زیاد از خود نشان می‌دهد. زیرا در جریان مستقیم، $f = ۰$ است. در حالت بالمدار راکتانس مدار آزادتر زیاد می‌شود که جریان مدار عملاً به صفر می‌رسد. زمانی که فرکانس منبع تغذیه افزایش می‌یابد، راکتانس خازنی کاهش می‌یابد. در مقابل، راکتانس سلفی با توجه به $X_L = ۲\pi fL$ افزایش می‌یابد. با توجه به رابطه‌ی ۳ـ۶، خازن و سلف در امپدانس مدار R-L-C سری رفتار متقابل دارند. در روند افزایش فرکانس از صفر به مقدار ∞، زمانی فرا می‌رسد که راکتانس خازنی و سلفی یکدیگر را خنثی می‌کنند. به عبارت دیگر، عبارت $X_L - X_C$ در رابطه‌ی ۳ـ۶ برابر صفر و ضریب توان مدار برابر یک است؛ چون $Z = R$ می‌شود. در این حالت، در مدار R-L-C هیچ گونه توان راکتیو یا منبع جبرانه نمی‌شود. این حالت از مدار R-L-C را حالت تشدید یا رزناس گویند. فرکانس رزناس با توجه به مطالب گفته شده به قرار زیر محاسبه می‌شود:

$$X_L - X_C = ۰ \qquad (۶\text{ـ}۲۲)$$

۱۵۱

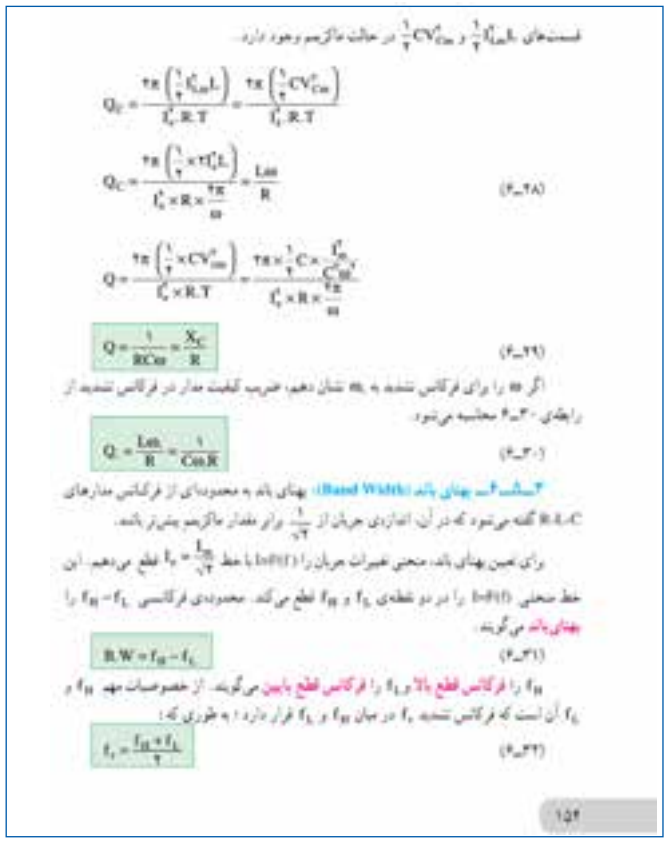
۵ـ۶ـ الف ـ ضریب کیفیت در مدارهای R–L–C

مطابق منحنی آورده شده در صفحه ۱۳۸ کتاب درسی هرگاه در مدار R–L–C سری ولتاژ خازن ماکزیمم است جریان مدار یا I_{L_m} صفر است و هرگاه جریان مدار یا I_{L_m}، ماکزیمم است مقدار V_C برابر صفر است بنابراین برای محاسبه ماکزیمم انرژی ذخیره شده که مربوط به سلف و خازن می‌شود یکی از این دو عنصر می‌توانند در حالت ماکزیمم وجود داشته باشند (یا سلف یا خازن) پس مقدار ضریب کیفیت برابر است با

$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{R}{X_L} = \dfrac{R}{L۲\pi f_r} & \text{مدار موازی} \\ Q = \dfrac{X_C}{R} \quad \text{یا} \quad \dfrac{X_C}{R} & \text{مدار سری} \end{cases}$$

اگر این ضریب کیفیت در فرکانس رزنانس بررسی شود مقدار ω برابر ω_0 به‌دست می‌آید و در نتیجه $Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

(مقدار ضریب کیفیت در حالت تشدید با Q_0 نشان داده می‌شود).



۵ـ۶ـ ب ـ پهنای باند (Band Width)

محدوده فرکانسی که مقدار جریان در محدوده بیشتر از مقدار جریان مؤثر باشد پهنای باند نامیده می‌شود. این محدوده دارای حد بالا f_H و حد پایین f_L است و فرکانس رزنانس دقیقاً مابین این دو مقدار قرار دارد.

مقدار پهنای باند برابر است با :

$$B.W = \frac{f_r}{Q_0} = \frac{R}{2\pi L}$$

به مقادیر f_L و f_H فرکانس‌های نیم‌توان گفته می‌شود زیرا در این فرکانس‌ها مقدار توان مصرفی نصف حالت فرکانس رزنانس است.

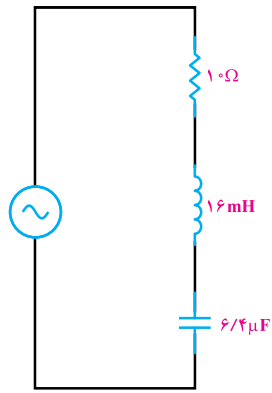
$$P_{L,H} = RI^{۲} = R(\frac{I_m}{\sqrt{۲}})^{۲} = \frac{RI_m^{۲}}{۲} = \frac{P_m}{۲}$$

۱ـ۵ـ۶ـ حل تمرین شماره ۹ صفحه ۱۶۲ کتاب درسی (شکل ۱۵ـ۶)

هدف : محاسبهٔ فرکانس رزنانس و نیم‌توان مدار

گام ۱) f_r در مدارهای سری به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$$f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{L.C}} = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{۱۶\times۱۰^{-۳}\times۶/۴\times۱۰^{-۶}}} = ۴۹۷ \quad HZ$$



شکل ۱۵ـ۶

گام ۲) برای محاسبهٔ فرکانس نیم‌توان به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$BW = \frac{f_r}{Q_\circ}$$

$$Q_\circ = \frac{L\omega_\circ}{R} = \frac{۲\pi f_r L}{R} = \frac{۲\pi\times۴۹۷\times۱۶\times۱۰^{-۳}}{۱۰} = ۵$$

$$BW = \frac{f_r}{Q_\circ} = \frac{۴۹۷}{۵} = ۹۹.۴ \quad HZ$$

$$f_H = f_r + \frac{B.W}{۲} = ۴۹۷ + \frac{۹۹/۴}{۲} = ۵۴۶/۷ \quad HZ$$

$$f_L = f_r - \frac{B.W}{۲} = ۴۹۷ - \frac{۹۹/۴}{۲} = ۴۴۷/۳ \quad HZ$$

۶ـ۶ـ رزنانس در مدارهای R–L–C موازی

در مدارهای R–L–C موازی در حالت رزونانس مدار L–C به حالت مدار باز تبدیل شده و فقط R به‌عنوان امپدانس در مدار باقی می‌ماند(Z=R).

۶ـ۶ـ رزنانس در مدارهای R-L-C موازی

اگر عناصر R، C و L در مدار R-L-C موازی ثابت باشند، با تغییر فرکانس مدار، امپدانس و جریان مدار تغییر می‌کند. اگر فرکانس مدار صفر باشد، جریان I جریان اتصال کوتاه خواهد بود، زیرا $X_L = 2\pi fL$ برابر صفر می‌شود. در مدار موازی R-L-C اگر هر کدام از عناصر R، X_L و X_C صفر شوند، از مدار جریان اتصال کوتاه (∞) عبور خواهد کرد. وقتی فرکانس زیاد می‌شود، $X_L = 2\pi fL$ افزایش و $X_C = \frac{1}{2\pi fC}$ کاهش می‌یابد. در فرکانس f_r (فرکانس تشدید) $X_L = X_C$ می‌شود. در این حالت، با توجه به رابطه $\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2$، مقدار $Z = R$ و جریان مدار $I_r = \frac{V_s}{R}$ می‌شود. این مقدار جریان، حداقل جریانی است که در مدار برقرار می‌شود. در حالت تشدید مدار R-L-C موازی (L و C) دو شاخه‌ی باز شده محسوب می‌شوند. در فرکانس‌های زیاد با این که $X_L = 2\pi fL$ زیاد می‌شود ولی $X_C = \frac{1}{2\pi fC}$ به اتصال کوتاه می‌رود. به گونه‌ای که در فرکانس $f = \infty$، $X_C = 0$، مدار مجدداً اتصال کوتاه می‌شود و جریان اتصال (∞) از مدار عبور خواهد کرد. چون امپدانس مدار در تغییر فرکانس تغییر می‌کند، کمیت‌های وابسته به آن ـ یعنی، $\cos\varphi$، $\sin\varphi$، P_r، P_s، I و φ نیز تغییر می‌کنند.

در فرکانس تشدید می‌توان نوشت:

$$X_L = X_C$$

$$2\pi f_r L = \frac{1}{2\pi f_r C}$$

$$(2\pi f_r)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (۶\text{ـ}۳۵)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی ۶ـ۲۶ و ۶ـ۳۵ نتیجه می‌گیریم که فرکانس تشدید در حالت R-L-C سری و موازی یکسان هستند.

تابع تغییرات $Z = F(f)$ و $I = F(f)$ در شکل‌های ۶ـ۲۲ رسم شده‌اند.

۱۵۷

۶ـ۶ـ الف) محاسبه پهنای باند و ضریب کیفیت در R–L–C موازی

در مدارهای R–L–C موازی مطابق منحنی Z=F(f) و تلاقی آن با خط $y = \frac{Z}{\sqrt{2}}$ (صفحه ۱۵۹ کتاب درسی) می‌بینیم که امپدانس ورودی بالاتری در محدوده بین فرکانس‌های نیم‌توان (پهنای باند) نسبت به مدارهای سری دیده می‌شود.

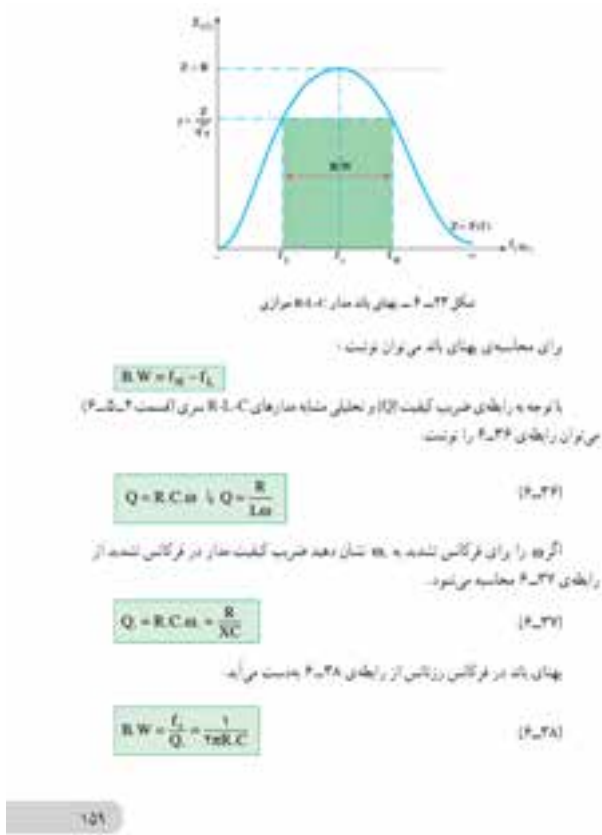
به همین دلیل به مدارهای R–L–C سری به دلیل امپدانس کم در محدوده پهنای باند فیلتر میان‌گذر و به مدارهای R–L–C موازی در این محدوده فرکانس فیلتر میان‌نگذر گفته می‌شود.

۶ـ۶ـ ب) در تحلیلی مشابه مدارهای R–L–C سری، ضریب کیفیت در مدار موازی برابر است با

$$Q = RC\omega \quad \text{یا} \quad Q = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{L\omega}$$

که در حالت رزنانس ω_0 جایگزین ω می‌شود و داریم :

$$B.W = \frac{f_r}{Q_0} = \frac{1}{2\pi R.C}$$



شکل ۲۲ـ۶ ـ پهنای باند مدار R-L-C موازی

برای محاسبه‌ی پهنای باند می‌توان نوشت :

$$B.W = f_{H} - f_{L}$$

با توجه به رابطه‌ی ضریب کیفیت (Q) در تحلیلی مشابه مدارهای R-L-C سری (قسمت ۶ـ۵ـ۶) می‌توان رابطه‌ی ۶ـ۳۶ را نوشت

$$Q = R.C\omega \;\; ; \;\; Q = \frac{R}{L\omega} \qquad (۶\text{ـ}۳۶)$$

اگر ω_0 را برای فرکانس تشدید به ω_0 نشان دهیم ضریب کیفیت مدار در فرکانس تشدید از رابطه‌ی ۶ـ۳۷ محاسبه می‌شود.

$$Q_0 = R.C\omega_0 = \frac{R}{X_C} \qquad (۶\text{ـ}۳۷)$$

پهنای باند در فرکانس رزنانس از رابطه‌ی ۶ـ۳۸ بدست می‌آید.

$$B.W = \frac{f_r}{Q_0} = \frac{1}{2\pi R.C} \qquad (۶\text{ـ}۳۸)$$

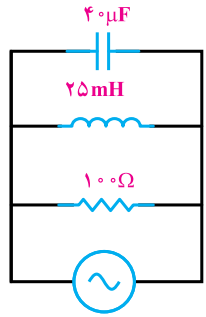
۱۵۹

۱ـ۶ـ۶ـ حل تمرین شماره ۱۴ کتاب صفحه ۱۶۴ (شکل ۱۶ـ۶)

الف)

هدف : محاسبهٔ فرکانس رزنانس با توجه به رابطهٔ موجود

$$f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{L.C}} = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{۲۵\times۱۰^{-۳}\times۴۰\times۱۰^{-۶}}} = ۱۵۹ \ \ HZ$$



شکل ۱۶ـ۶

ب)

هدف : محاسبهٔ ضریب کیفیت با توجه به رابطهٔ موجود برای مدارهای موازی

$$Q_{\circ} = RC\omega_{\circ} = ۱۰۰\times۴۰\times۱۰^{-۶}\times۲\pi\times۱۵۹ = ۴$$

پ)

هدف : محاسبهٔ پهنای باند با توجه به رابطهٔ موجود برای مدارهای موازی

$$B.W = \frac{f_r}{Q_{\circ}} = \frac{۱}{۲\pi R.C} = \frac{۱}{۲\pi\times۱۰۰\times۴۰\times۱۰^{-۶}} = ۳۹/۸ \ \ HZ$$

ت)

هدف : محاسبهٔ فرکانس‌های نیم‌توان با توجه به رابطهٔ موجود برای مدارهای موازی

$$f_H = f_r + \frac{BW}{۲} = ۱۵۹ + \frac{۳۹/۸}{۲} = ۱۷۸/۸۹ \ \ HZ$$

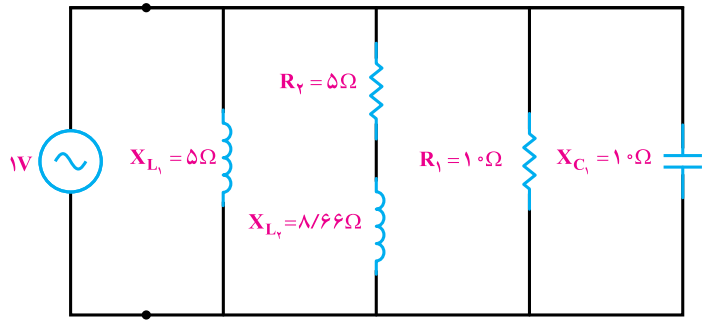
$$f_L = f_r - \frac{B.W}{۲} = ۱۵۹ - \frac{۳۹/۸}{۲} = ۱۳۹ \ \ HZ$$

۲ـ ۶ـ۶ـ حل تمرین شماره ۱۶ صفحه ۱۶۴ کتاب درسی (شکل ۱۷ـ۶)

هدف : محاسبهٔ امپدانس و ضریب توان مدار :

برای محاسبهٔ مقادیر خواسته شده در این مدار منبع ۱ ولتی را به عنوان ورودی در نظر می‌گیریم.

ابتدا باید سعی شود جریان کل عبوری از منبع که برابر حاصل جمع برداری تمام جریان شاخه‌هاست را به‌دست آوریم.



شکل ۶ــ۱۷

همان‌طور که مشاهده می‌شود مدار از دو قسمت R–L– C موازی و R–L سری تشکیل شده، که با توجه به روابط موجود برای هریک، جریان قابل محاسبه است.

$$\begin{cases} I_{L_۱}=\dfrac{V}{X_{L_۱}}=\dfrac{۱}{۵}A \\ I_{R_۱}=\dfrac{V}{R_۱}=\dfrac{۱}{۱۰}A \quad \rightarrow I_۱=\sqrt{I_R^۲+(I_L-I_C)^۲}=\sqrt{(\dfrac{۱}{۱۰})^۲+(\dfrac{۱}{۵}-\dfrac{۱}{۱۰})^۲}=\sqrt{۰/۰۱+۰/۰۱} \\ I_{C_۱}=\dfrac{V}{X_{C_۱}}=\dfrac{۱}{۱۰}A \end{cases}$$

$$I_۱=\sqrt{۰/۰۲}=۰/۱۴A$$

$$Z_۲=\sqrt{R_۲^۲+X_{L_۲}^۲}=\sqrt{۵^۲+۸/۶۶^۲}=۱۰\ \Omega$$

$$I_۲=\frac{V}{Z_۲}=\frac{۱}{۱۰}=۰/۱\ A$$

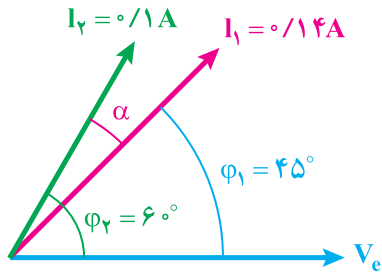
برای محاسبهٔ جریان کل نیاز به زاویهٔ بین دو بردار جریان داریم، که با توجه به اختلاف فاز موجود برای دو قسمت موازی و سری قابل محاسبه است.

$$\varphi_۱=\tan^{-۱}(\frac{I_{L_۱}-I_{C_۱}}{I_{R_۱}})=\tan^{-۱}(\frac{۰/۲-۰/۱}{۰/۱})=۴۵^\circ \ ,\ X_{L_۱}<X_{C_۱}\rightarrow\varphi>۰$$

$$\varphi_۲=\tan^{-۱}(\frac{X_{L_۲}}{R_۲})=\tan^{-۱}(\frac{۸/۶۶}{۵})=۶۰^\circ$$

$$\vec{I}=\vec{I}_۱+\vec{I}_۲$$

با توجه به محاسبات زوایا بین ولتاژ و جریان‌ها مطابق شکل ۶ــ۱۸ خواهد بود.



شکل ۱۸ــ۶

$$\alpha=\varphi_2-\varphi_1=۶۰^\circ-۴۵^\circ=۱۵^\circ$$

$$I=\sqrt{I_1^2+I_2^2+2I_1I_2\cos\alpha}=\sqrt{۰/۱۴^2+۰/۱^2+2(۰/۱۴)(۰/۱)\cos۱۵}=۰/۲۳\ A$$

$$Z=\frac{۱}{۰/۲۳}=۴/۳۵\ \Omega$$

برای محاسبه ضریب توان کل مدار با توجه به رابطه ضریب توان مؤثر و توان‌های حقیقی و ظاهری قابل محاسبه است.

$$P_{e_1}=VI_1\cos\varphi_1=۱\times۰/۱۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰/۱\ w$$

$$P_{d_1}=VI_1\sin\varphi_1=۱\times۰/۱۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰/۱\ V.A.R$$

$$P=VI_2\cos\varphi_2=۱\times۰/۱\times-=۰/۰۵\ w$$

$$P_{d_2}=VI_2\sin\varphi_2=۱\times۰/۱\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰/۰۹\ V.A.R$$

$$P_e=P_{e_1}+P_{e_2}=۰/۱+۰/۰۵=۰/۱۵\ w$$

$$P_d=P_{d_1}+P_{d_2}=۰/۱+۰/۰۹=۰/۱۹\ V.A.R$$

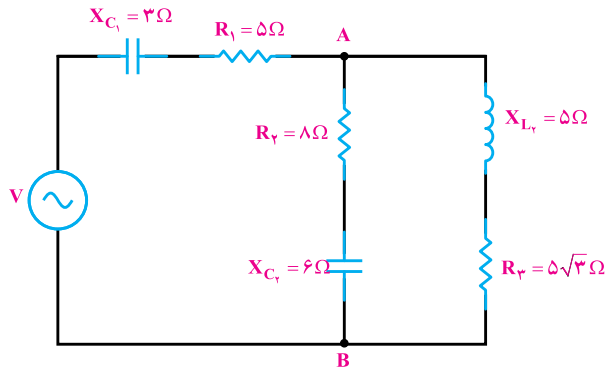
$$P_S=\sqrt{P_e^2+P_d^2}=\sqrt{۰/۱۵^2+۰/۱۹^2}=۰/۲۴\ V.A$$

$$\cos\varphi=\frac{P_e}{P_S}=\frac{۰/۱۵}{۰/۲۴}=۰/۶$$

۳ـ۶ـ۶ـ تمرین: در مدار مختلط زیر با فرض $V_{AB}=۵۰V$ ولتاژ کل مدار را به‌دست آورید.

الف)

هدف : محاسبهٔ ولتاژ کل مدار



شکل ۱۹ــ۶

مدار بالا از ۳ شبکه RL و RC موازی تشکیل شده است. با محاسبهٔ جریان دو شاخهٔ موازی و جریان کل منبع می‌توان ولتاژ کل را محاسبه کرد.

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{C_2}^2} = \sqrt{۸^2 + ۶^2} = ۱۰\ \Omega$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2} = \frac{۸}{۱۰} = ۰/۸$$

$$\varphi_2 = \tan^{-1}(\frac{X_{C_2}}{R_2}) = \tan^{-1}(\frac{۶}{۸}) = ۳۶/۸^\circ$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{Z_2} = \frac{۵۰}{۱۰} = ۵\ A$$

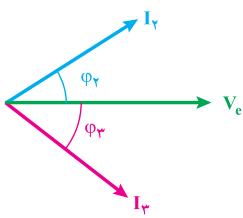
$$Z_3 = \sqrt{R_3^2 + X_{L_3}^2} = \sqrt{(۵\sqrt{۳})^2 + ۵^2} = ۱۰\ \Omega$$

$$\varphi_3 = \tan^{-1}(\frac{X_{L_3}}{R_3}) = \tan^{-1}(\frac{۵}{۵\sqrt{۳}}) = -۳۰^\circ$$

$$I_3 = \frac{V_{AB}}{Z_1} = \frac{۵۰}{۱۰} = ۵\ A$$

$$\vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$$

با توجه به زوایای به‌دست آمده اختلاف فاز جریان‌ها و ولتاژ A و B (V_{AB}) به صورت شکل ۲۰ــ۶ خواهد بود.



شکل ۲۰ــ۶

$$\alpha=\varphi_2+\varphi_3=36/8^\circ+30^\circ=66/8^\circ$$

$$I_1=\sqrt{I_3^2+I_2^2+2I_3I_2\cos\alpha}=\sqrt{5^2+5^2+2(5)(5)\cos(66/8)}=8/3\ A$$

$$Z_1=\sqrt{R_1^2+X_{C_1}^2}=\sqrt{5^2+3^2}=5/8\ \Omega$$

$$V_1=Z_1I=5/8\times8/3=48/42\ V$$

$$\varphi_1=-\tan^{-1}(\frac{X_{C_1}}{R_1})=-\tan^{-1}(\frac{3}{5})=-30/96^\circ$$

باید زاویه ولتاژ و جریان کل دو شاخه موازی را بیابیم که با استفاده از رابطه ضریب توان مؤثر و توان‌های مدار قابل محاسبه است.

$$P_{e_1}=V_1I\cos\varphi_1=48/42\times8/3\times\cos(-30/96)=344\ w$$

$$P_{d_1}=V_1I_1\sin\varphi_1=-206\ V.A.R$$

$$P_{e_2}=V_{AB}I_2\cos\varphi_2=50\times5\times\cos(-36/8)=200\ w$$

$$P_{d_2}=V_{AB}I_2\sin\varphi_2=50\times5\times\sin(-36/8)=-149/76\ V.A.R$$

$$P_{e_3}=V_{AB}I_3\cos\varphi_3=50\times5\times\cos(30)=216\ w$$

$$P_{d_3}=V_{AB}I_3\sin\varphi_3=50\times5\times\sin(30)=125\ V.A.R$$

$$P_{e_{AB}}=P_{e_2}+P_{e_3}=200+216=416\ w$$

$$P_{d_{AB}}=P_{d_2}+P_{d_3}=-149/76+125=-24/76\ V.A.R$$

$$P_{S_{AB}}=\sqrt{P_{e_{AB}}^2+P_{d_{AB}}^2}=\sqrt{416^2+(-24/76)^2}=416/73\ V.A$$

$$\cos\varphi=\frac{P_{e_{AB}}}{P_{S_{AB}}}=\frac{416}{416}=1\rightarrow\varphi=3/4^\circ$$

$$\theta_V=0\rightarrow\ \varphi=\theta_V-\theta_i\rightarrow\theta_{i_{AB}}=3/4^\circ$$

می‌دانیم در این مدار پس از ساده کردن، به یک مدار سری مبدل می‌شود و جریان در تمام مدار ثابت می‌باشد و دارای یک زاویهٔ یکسان است.

$$\theta_{i_{AB}}=\theta_{i_1}=\theta_{i_{\text{کل}}}$$

$$\theta_v=\varphi+\theta_{i_1}=-30/96^\circ+3/4^\circ=-27/56^\circ$$

$$\alpha=\theta_{V_{AB}}+\theta_{V_1}=0^\circ-27/56^\circ=-27/56^\circ$$

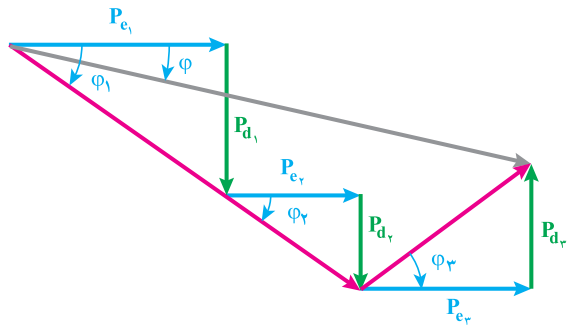
$$V_e=\sqrt{V_1^2+V_{AB}^2+2V_1V_{AB}\cos\alpha}=\sqrt{48/42^2+50^2+2\times48/42\times50\cos(-27/56)}$$

$V_e = ۹۵/۵۹ \quad V$

ب)

هدف : رسم مثلث توان

دقت شود در این مدار ۳ مصرف کنندهٔ توان داریم در نهایت ۳ توان حقیقی خواهیم داشت و ۳ المان ذخیره کنندهٔ انرژی داریم، که به واسطهٔ آن ۳ توان غیرمؤثر داریم، که به دلیل خاصیت خازنی و سلفی بودن مدار دارای جهت مثبت و یا منفی می‌باشد. در کل شکل به صورت زیر خواهد بود (شکل ۲۱ــ۶).



شکل ۲۱ــ۶