فصل چهارم

مدارهای R – C جریان متناوب

هدف‌های رفتاری : در پایان این فصل از هنرجو انتظار می رود :

۱ـ مقادیر مقاومت ظاهری، اختلاف فاز، جریان، ولتاژ، ضرایب توان و ضریب کیفیت مدارهای R–C سری و موازی را با نوشتن فرمول‌های مربوط محاسبه کند.

۲ـ دیاگرام برداری ولتاژها را در مدارهای R–C سری و جریان‌ها را در مدارهای R–C موازی رسم کند.

۳ـ ضریب کیفیت مدارهای R–C سری و موازی را محاسبه کند.

۴ـ تأثیر فرکانس بر مقاومت ظاهری، جریان، اختلاف فاز و ضریب قدرت در مدارهای R–C سری و موازی را شرح دهد.

۵ـ منحنی تغییرات اثر فرکانس بر امپدانس و جریان در مدارهای R–C سری و موازی را از طریق نقطه‌یابی رسم کند.

۶ـ معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای R–C سری و موازی را به‌دست آورد.

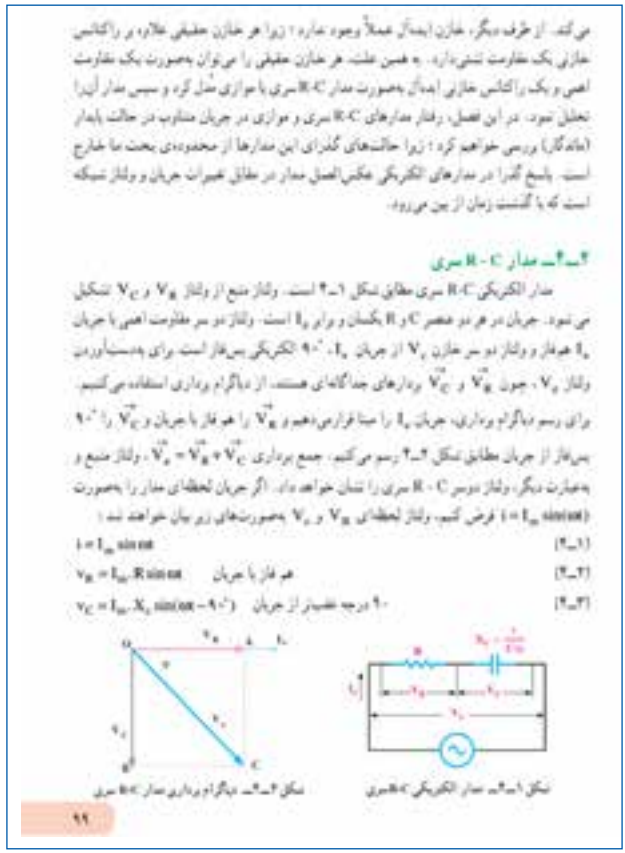
۷ـ مدارهای R–C سری را به موازی و بالعکس تبدیل کند.

۴ـ مدارهای R-C جریان متناوب

یادآوری

همان‌طور که در فصل قبل نیز گفته شد حتماً جهت ایجاد انگیزه برای هنرجویان کاربردهای مدارات R–C نیز گفته شود و سپس در مورد خازن ایده‌آل و خازن واقعی بحث شود.

خازن‌های واقعی عملاً به دلیل داشتن جریان نشتی با R–C سری یا R–C موازی معادل می گردند.



می‌کند. از طرف دیگر، خازن ایده‌آل عملاً وجود ندارد؛ زیرا هر خازن حقیقی علاوه بر راکتانس خازنی یک مقاومت نشتی دارد. به همین علت، هر خازن حقیقی را می‌توان به‌صورت یک مقاومت اهمی و یک راکتانس خازنی ایده‌آل به‌صورت مدار R-C سری یا موازی مدل کرد و سپس مدار آن را تحلیل نمود. در این فصل، رفتار مدارهای R-C سری و موازی در جریان متناوب در حالت پایدار (ماندگار) بررسی خواهیم کرد؛ زیرا حالت‌های گذرای این مدارها از محدوده‌ی بحث ما خارج است. پاسخ گذرا در مدارهای الکتریکی عکس‌العمل مدار در مقابل تغییرات جریان و ولتاژ شبکه است که با گذشت زمان از بین می‌رود.

۴ـ۲ـ مدار R - C سری

مدار الکتریکی R-C سری مطابق شکل ۴ـ۱ است. ولتاژ منبع از ولتاژ V_R و V_C تشکیل می‌شود. جریان در هر دو عنصر C و R یکسان و برابر I_R است. ولتاژ دو سر مقاومت اهمی با جریان I_R هم‌فاز و ولتاژ دو سر خازن V_C از جریان I_R، ۹۰° الکتریکی پس‌فاز است. برای به‌دست‌آوردن ولتاژ V_C، چون $\vec{V}_R$ و $\vec{V}_C$ بردارهای جداگانه‌ای هستند، از دیاگرام برداری استفاده می‌کنیم. برای رسم دیاگرام برداری، جریان I_R را مبنا قرار می‌دهیم و $\vec{V}_R$ را هم‌فاز با جریان و $\vec{V}_C$ را ۹۰° پس‌فاز از جریان مطابق شکل ۴ـ۲ رسم می‌کنیم. جمع برداری $\vec{V}_R + \vec{V}_C = \vec{V}_s$، ولتاژ منبع و به‌عبارت دیگر، ولتاژ دو سر R - C سری را نشان خواهد داد. اگر جریان لحظه‌ای مدار را به‌صورت $i = I_m \sin(\omega t)$ فرض کنیم، ولتاژ لحظه‌ای V_R و V_C به‌صورت‌های زیر بیان خواهد شد:

$$i = I_m \sin \omega t \qquad (۴ـ۱)$$

$$v_R = I_m R \sin \omega t \qquad \text{هم‌فاز با جریان} \qquad (۴ـ۲)$$

$$v_C = I_m X_C \sin(\omega t - 90^\circ) \qquad \text{۹۰ درجه عقب‌تر از جریان} \qquad (۴ـ۳)$$

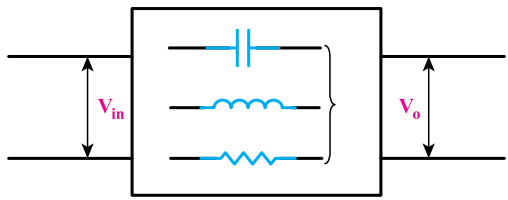
شکل ۴ـ۱ـ مدار الکتریکی R-C سری

شکل ۴ـ۲ـ دیاگرام برداری مدار R-C سری

۹۹

۴ـ۱ـ فیلترها

یکی از کاربردهای مدارهای RC ،RL، و مدارهای RLC و LC استفاده آنها به عنوان فیلتر است، فیلترها مدارهای الکتریکی یا الکترونیکی هستند که اجازه عبور بخشی از فرکانس‌ها را از یک مدار به مدار دیگر می‌دهند و بخش دیگر را عبور نمی‌دهند و دامنه فرکانس عبوری را محدود می‌کنند. این فیلترها، فیلترهای غیرفعال نامیده می‌شوند(شکل ۱ـ۴)، در مقابل این فیلترها، فیلترهای فعال نیز هستند که توسط مدارهای الکترونیکی تقویت می‌شوند.



شکل ۱ـ۴

یکی از کاربردهای مهم فیلترها حذف نویز و فرکانس‌های مزاحم و حذف هارمونیک‌های مزاحم در شبکه الکتریکی است. به عنوان مثال در کارخانجات صنعتی که دستگاه‌ها و ماشین‌های صنعتی تولید هارمونیک می‌نمایند، با قرار دادن این فیلترها می‌توانیم از برگشت آنها به شبکه برق جلوگیری نماییم. این فرکانس‌های مخرب شکل موج سینوسی شبکه برق را به هم ریخته و باعث اعوجاج در آن می‌شوند.

۱ـ۱ـ۴ـ انواع فیلترها

فیلترها به طور کلی به چهار دسته زیر تقسیم می‌شوند :

الف) فیلتر پایین‌گذر

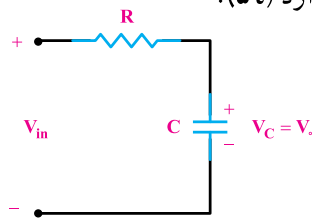
ب) فیلتر بالا گذر

ج) فیلتر میان گذر (فیلتر عبور باند)

د) فیلتر میان‌نگذر (فیلتر حذف باند)

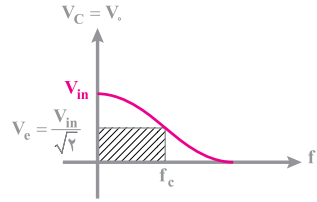
الف) برای آشنایی بیشتر با کاربردهای مدارهای RL و RC به بررسی این فیلتر می‌پردازیم. مثلاً مدار سری RC یا RLدر فیلتر پایین‌گذر به صورت زیر کاربرد دارد، این فیلتر از فرکانسی به پایین را عبور می‌دهد (فرکانس‌های خیلی کم تا فرکانس قطع).

مطابق شکل مدار **۲ـ۴** اگر خروجی مدار ولتاژ خازن یا V_C باشد، خازن برای شارژ نیاز به حداقل زمانی برابر با ۵ ثابت‌زمانی دارد (5τ).



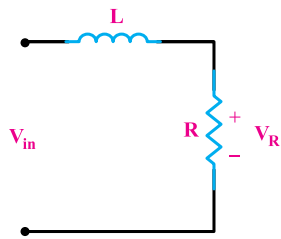
شکل ۲ـ۴

لذا پریود شکل موج ولتاژ ورودی اگر T باشد باید $T \gg 5\tau$ پس در نتیجه فرکانس ولتاژ ورودی (V_{in})، خیلی کم خواهد بود و این به معنی پایین‌گذر بودن این فیلتر است. در نمودار شکل **۳ـ۴** چون بعد از فرکانس f_c مقدار دامنه ولتاژ کاهش می‌یابد و قابل قبول نیست پس f_c فرکانس قطع خواهد بود.



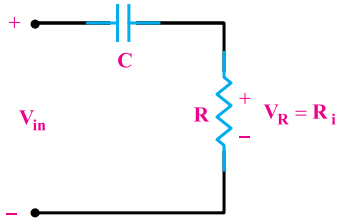
شکل ۳ـ۴

مشابه همین تحلیل در مورد مدار R–L با شکل زیر صادق است (شکل ۴ــ۴).

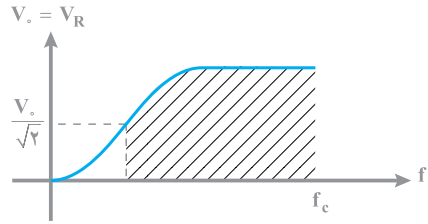


شکل ۴ــ۴

ب) اما چنانچه در مدار RC سری خروجی مدار ولتاژ دو سر مقاومت باشد این فیلتر، فرکانس‌های از حد معینی به بالا را به‌راحتی عبور می‌دهد (فیلتر بالاگذر). در مدار نشان‌داده‌شده شکل ۵ــ۴ هنگامی که خازن شارژ شد جریان ورودی مدار به صفر می‌رسد و در نتیجه $i_R=0$ و به دنبال آن مقدار $V_R=0$، پس مقدار V_R وقتی وجود دارد که فرکانس ورودی بالا باشد (مقدار X_C کم شود) و این به معنی فیلتر بالاگذر خواهد بود. منحنی فرکانسی فیلتر بالاگذر در شکل ۶ــ۴ دیده می‌شود.

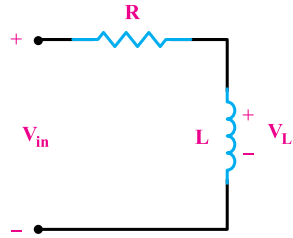


شکل ۵ــ۴



شکل ۶ــ۴

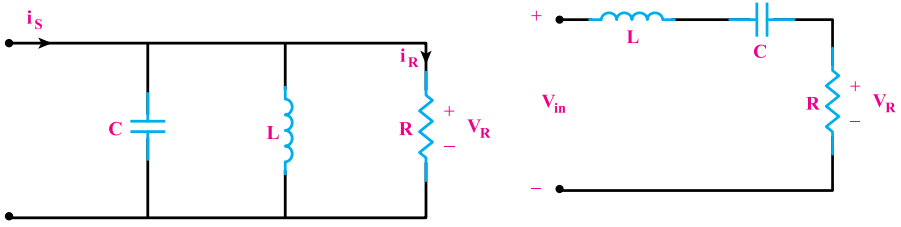
مشابه همین تحلیل در مدار RL نیز صدق می‌کند با این فرض که ولتاژ خروجی از دو سر سلف گرفته شود (شکل ۷ــ۴).



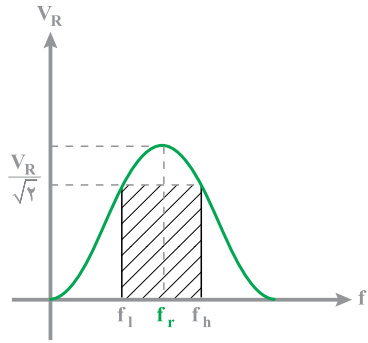
شکل ۷ــ۴

ج) در کتاب مدارهای الکتریکی فقط فیلتر میان‌گذر معرفی شده‌است (مدار RLC). این فیلتر فقط محدوده‌ای از فرکانس‌های بین دو فرکانس را از خود عبور می‌دهد (فرکانس‌های کمتر از فرکانس

حد پایین f_L و فرکانس‌های بیشتر از فرکانس های حد بالا f_H عبور داده نمی‌شوند). در این فیلتر، هنگام تشدید یا رزونانس i_R حداکثر مقدار خود را دارد، خروجی این فیلتر ولتاژ دو سر مقاومت است. کاربرد این فیلتر در ذوب فلزات (کوره‌های القایی فرکانسی) است (شکل ۸ ــ ۴ الف و ب). منحنی فرکانس این فیلتر در شکل ۹ــ۴ دیده می‌شود.

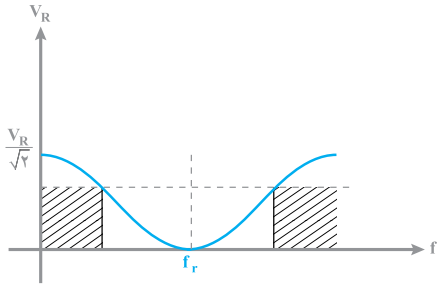


شکل ۸ــ۴

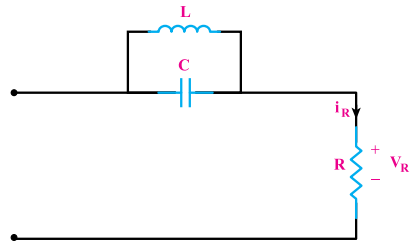


شکل ۹ ــ۴

د) آخرین نمونه فیلترها، فیلتر میان‌نگذر (حذف باند) است که منحنی پاسخ فرکانس و نمودار خروجی آن مشابه شکل زیر می‌باشد (شکل ۱۰ــ۴) . این گونه مدارات در بخش مدارهای مختلط کتاب مدارهای الکتریکی دیده می‌شود (شکل ۱۱ــ۴).



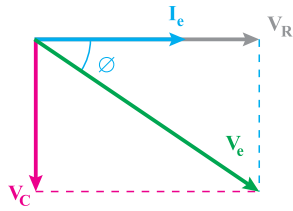
شکل ۱۰ــ۴



شکل ۱۱ــ۴

۲ـ۴ـ مدار R-C سری

در این مدارات نیز ولتاژ خازن و مقاومت به صورت برداری جمع می‌شوند. مبنای تحلیل نیز جریان مدار است که در هر دو عنصر مقاومت و خازن ثابت است. علاوه‌برآن جریان خازن نسبت به ولتاژ دو سر آن حالت پیش‌فاز دارد. چنانکه در دیاگرام برداری دیده می‌شود جریان کل نسبت به ولتاژ کل مدار پیش‌فاز است (شکل ۱۵ــ۴).



شکل ۱۵ــ۴

روابط امپدانس و ضریب توان دقیقاً شبیه R–L سری است با این تفاوت که به‌جای $X_L=L\omega$ از $X_c=\frac{1}{C\omega}$ استفاده می‌شود.

$$\cos\varphi=\frac{V_C}{V_e}=\frac{X_C}{Z} \qquad (۴ـ۱۰)$$

۴ـ۴ـ۲ـ محاسبه‌ی توان‌ها در مدار R-C سری: برای توان مؤثر می‌توان نوشت:

$$P_e=RI_e^2 \qquad (۴ـ۱۱)$$

از رابطه‌ی ۴ـ۹ مقاومت R برابر است با:

$$R=Z\cos\varphi$$

از طرف دیگر، امپدانس مدار برابر است با:

$$Z=\frac{V_e}{I_e}$$

با جایگزینی مقادیر در رابطه‌ی ۴ـ۱۱ توان مؤثر به‌صورت رابطه‌ی ۴ـ۱۲ ظاهر می‌شود:

$$P_e=Z\cos\varphi\times I_e^2$$

$$P_e=\frac{V_e}{I_e}\cos\varphi\times I_e^2$$

$$P_e=V_eI_e\cos\varphi \qquad (۴ـ۱۲)$$

برای محاسبه‌ی توان غیرمؤثر می‌توان نوشت:

$$P_q=-I_e^2X_C \qquad (۴ـ۱۳)$$

از رابطه‌ی ۴ـ۱۰ مقادیر Z و X_C را در رابطه‌ی ۴ـ۱۳ جایگزین می‌کنیم:

$$X_C=Z\sin\varphi \quad , \quad Z=\frac{V_e}{I_e} \quad , \quad \sin\varphi=\frac{X_C}{Z}$$

$$P_q=I_e^2.Z\sin\varphi=I_e^2\frac{V_e}{I_e}\sin\varphi$$

بنابراین:

$$P_q=V_eI_e\sin\varphi \qquad (۴ـ۱۴)$$

در مدارهای C - R جریان پیش‌فاز است؛ بنابراین قرارداد توان P_q را با علامت منفی خواهیم داشت.

یعنی:

$$P_q=-V_eI_e\sin\varphi$$

از رابطه‌های ۴ـ۱۲ و ۴ـ۱۴ توان ظاهری را به‌قرار زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$P_s=\sqrt{P_e^2+P_q^2}=\sqrt{V_e^2I_e^2\cos^2\varphi+V_e^2I_e^2\sin^2\varphi}$$

۱۰۱

۲ـ۴ـ الف ـ توان اکتیو و راکتیو در R-C سری

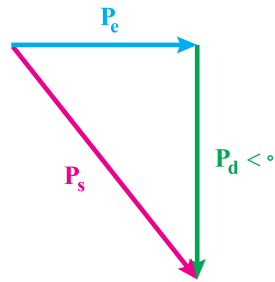
توان اکتیو همیشه مربوط به مقاومت می‌باشد و ضریب توان اکتیو را شامل می‌گردد.

$$P_e=RI_e^{۲}=V_eI_e\cos\varphi$$

ولی توان راکتیو مربوط به عنصر راکتیو یعنی خازن می‌باشد و به دلیل مخالفت سلف و خازن این توان با علامت منفی معرفی می‌گردد.

$$P_d=-V_eI_e\sin\varphi=-X_cI_e^{۲}$$

و مثلث توان آن دارای ضلع عمود در جهت محور y منفی خواهد داشت.



۱ـ۲ـ۴ـ حل تمرین ۱ صفحه ۱۱۳ کتاب درسی (شکل ۱۶ـ۴)

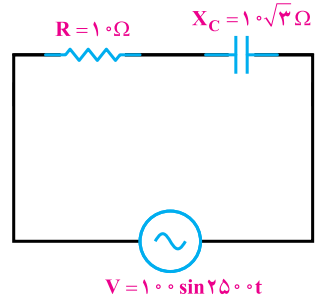
الف)

هدف : محاسبه معادله جریان منبع

باید θ_I و I_m محاسبه شود

گام ۱) محاسبه امپدانس کل مدار

$$Z=\sqrt{R^{۲}+X_C^{۲}}=\sqrt{۱۰^{۲}+(۱۰\sqrt{۳})^{۲}}=۲۰\ \Omega$$



شکل ۱۶ـ۴

گام ۲) محاسبه جریان مؤثر مدار و پس از آن جریان ماکزیمم قابل محاسبه است.

$$V_e=\frac{V_m}{\sqrt{۲}}=\frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}=۷۰/۷\,V\ ,\ I_e=\frac{V_e}{Z}=\frac{۷۰/۷}{۲۰}=۳/۵\,A$$

$$I_m=\sqrt{۲}I_e=۳/۵\sqrt{۲}\,A=۵\,A$$

گام ۳) با توجه به مقدار مقاومت خازنی و مقاومت اهمی اختلاف فاز (φ) قابل محاسبه است.

$$\varphi=-\tan^{-۱}\frac{X_c}{R}=-\tan^{-۱}\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۱۰}=-۶۰^\circ$$

گام ۴) محاسبه θ_I با توجه به اینکه $\theta_V=۰$ می‌باشد.

$$\varphi=\theta_V-\theta_I\ \longrightarrow\ -۶۰^\circ=۰-\theta_I\ \longrightarrow\ \theta_I=۶۰^\circ$$

گام ۵) تشکیل معادله جریان منبع

$$i(t)=۵\sin(۲۵۰۰t+۶۰^\circ)$$

ب)

هدف : محاسبه معادله ولتاژ دو سر هر المان

دو مدار سری جریان تمام المان‌ها با هم برابر می‌باشند.

گام ۱) محاسبه ولتاژ دو سر مقاومت اهمی

$$I_{R_m}=I_{e_m}=I_{c_m}$$

$$V_{R_m}=R.I_{R_m}=۱۰\times۳/۵\sqrt{۲}\ =۳۵\sqrt{۲}V$$

گام ۲) نوشتن معادله ولتاژ دو سر مقاومت اهمی

ولتاژ دو سر مقاومت اهمی با جریان I_e هم‌فاز می‌باشد.

$$V_{R_m}(t)=V_{R_m}\sin(۲۵۰۰t+\theta_I)\longrightarrow V_{R_m}(t)=۵۰\sin(۲۵۰۰t+۶۰^\circ)$$

گام ۳) محاسبه ولتاژ دو سر مقاومت خازنی

$$V_{C_m}=X_C.I_{C_m}=۱۰\sqrt{۳}\times۳/۵\sqrt{۲}\ =۳۵\sqrt{۶}\ \ V$$

گام ۴) نوشتن معادله ولتاژ دو سر مقاومت خازنی

ولتاژ دو سر مقاومت خازنی از جریان I_e ، ۹۰° الکتریکی پس‌فاز است. (چون مدار R–C است جریان پیش‌فاز است).

$$V_{Cm}(t)=V_{Cm}\sin(۲۵۰۰t+\theta_I-۹۰^\circ)=۵۰\sqrt{۳}\ \sin(۲۵۰۰t-۳۰^\circ)\ V$$

پ)

هدف : محاسبه توان‌های مدار مثلث توان

گام ۱) با توجه به مقادیر جریان مؤثر مدار، توان‌های مدار به صورت زیر قابل محاسبه است.

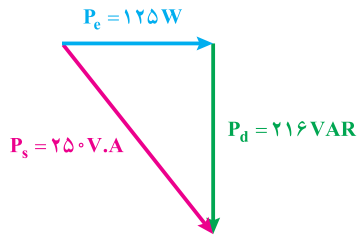
$$\cos\varphi = \frac{۱}{۲}\ ,\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$P_e = V_e.I_e\cos\varphi = I_e^۲.R = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}\times\frac{۵}{\sqrt{۲}}\times\frac{۱}{۲} = ۱۲۵\ \text{w}$$

$$P_d = V_e.I_e\sin\varphi = -I_e^۲.X_C = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}\times\frac{۵}{\sqrt{۲}}\times(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = -۲۱۶.۵\ \text{V.A.R}$$

$$P_s = V_e.I_e = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}\times\frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۲۵۰\ \text{V.A}$$

گام ۲) مثلث توان به صورت زیر رسم می‌شود. (شکل ۱۷ــ۴)

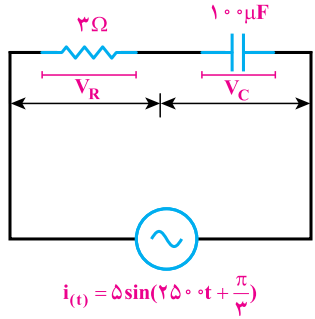


شکل ۱۷ــ۴

۲ـ۲ـ۴ـ حل تمرین شماره ۲ صفحه ۱۱۳ کتاب درسی (شکل ۱۸ـ۴)

الف)

هدف : محاسبه معادله ولتاژ منبع



شکل ۱۸ــ۴

باید θ_I و V_m محاسبه شود.

گام ۱) محاسبه امپدانس کل مدار

$$X_c = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{۱۰۰\times۱۰^{-۶}\times۲۵۰۰} = \frac{۱۰۰}{۲۵} = ۴\ \Omega$$

گام ۲) با توجه به امپدانس کل مدار و جریان کل مدار و پس از آن با توجه به θ_I داده شده در معادله جریان کل مدار θ_V را می‌یابیم.

$$z = \sqrt{R^۲ + X_C^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵\ \Omega$$

$$I_e = \frac{۵}{\sqrt{۲}}A\ ,\ V_e = Z.I_e = ۵\times\frac{۵}{\sqrt{۲}} = \frac{۲۵}{\sqrt{۲}}V\ ,\ V_m = \frac{۲۵}{\sqrt{۲}}\times\sqrt{۲} = ۲۵V$$

$$\varphi = -\tan^{-۱}\frac{X_C}{R} = -\tan^{-۱}\frac{۴}{۳} = -۵۳^\circ$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I \rightarrow -۵۳^\circ = \theta_V - ۶۰^\circ \rightarrow \theta_V = ۷^\circ$$

گام ۳) تشکیل معادله ولتاژ منبع

$$V(t)=۲۵\sin(۲۵۰۰t+۷^\circ)$$

ب)

هدف : تشکیل معادله ولتاژ دو سر هر المان

جریانی که هریک از المان‌هاعبور می‌کند با جریان کل مدار برابر است (مدار سری)

گام ۱) تعیین جریان‌های ماکزیمم برای هریک از المان‌ها

$$I_e = \frac{۵}{\sqrt{۲}}A$$

$$I_{R_m} = I_{e_m} = I_{c_m} = \frac{۵}{\sqrt{۲}}\times\sqrt{۲} = ۵\ A$$

گام ۲) محاسبهٔ ولتاژ ماکزیمم برای مقاومت اهمی و مقاومت خازنی

$$V_{Rm}=R.I_{Rm}=۳\times۵=۱۵\ V$$

$$V_{Cm}=X_C.I_{Cm}=۴\times۵=۲۰\ V$$

گام ۳) تشکیل معادلات ولتاژ برای مقاومت اهمی و مقاومت خازنی

$$V_{Rm}(t)=V_{Rm}\sin(۲۵۰۰t+\theta_I)=۱۵\sin(۲۵۰۰t+۶۰^\circ)$$

$$V_{Cm}(t)=V_{Cm}\sin(۲۵۰۰t+\theta_I-۹۰^\circ)=۲۰\sin(۲۵۰۰t-۳۰^\circ)$$

پ)

هدف :رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار

گام ۱) تعیین مقادیر مؤثر برای تمامی ولتاژها و جریان‌ها و محاسبهٔ زاویه بردار جریان‌ها و ولتاژها

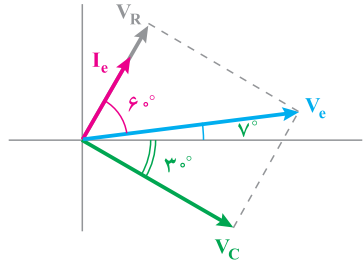
$$V_C = \frac{۲۰}{\sqrt{۲}} = ۱۴/۱۴V \ , \ \theta_{V_C} = ۳۰^\circ$$

$$V_R = \frac{۱۵}{\sqrt{۲}} = ۱۰/۶V \ , \ \theta_{V_R} = ۶۰^\circ$$

$$I_e = \frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۳/۵V \ , \ \theta_I = ۶۰^\circ$$

گام ۲) رسم دیاگرام برداری (شکل ۱۹ــ۴)

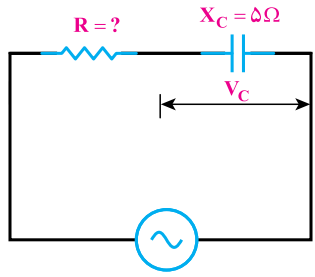
جریان نسبت به ولتاژ پیش‌فاز است. این مقدار اختلاف فاز برابر ۷–۶۰ برابر ۵۳° است.



شکل ۱۹ــ۴

۳ـ۲ـ۴ـ حل تمرین شماره ۴ صفحه ۱۱۳ کتاب درسی (شکل ۲۰ـ۴)

هدف : محاسبه مقاومت مدار سری با توجه به اختلاف فاز موجود معادله ولتاژ دو سر مقاومت خازنی.



شکل ۲۰ــ۴

گام ۱) تنها با توجه به اختلاف فاز φ و رابطه آن می‌توان به صورت زیر R را محاسبه کرد.

$$\tan\varphi = \frac{X_C}{R} \rightarrow R = \frac{X_C}{\tan\varphi}$$

$$R = \frac{X_C}{\tan\varphi} = \frac{۵}{\tan ۶۰^\circ} = \frac{۵}{\sqrt{۳}} = ۲/۸۸\,\Omega$$

۳ـ۴ـ مدار R-C موازی

خازن حقیقی عملاً با یک R–C موازی معادل می‌گردد که مقاومت موازی، مقاومت نشتی خازن نامیده می‌شود. جریانی از دو صفحه جوشن و دی‌الکتریک بین آنهاعبور می‌کند، این جریان در حالت ایده‌آل صفر در نظر گرفته می‌شود. ولی در خازن واقعی به مرور زمان باعث تخلیه کامل خازن و دشارژ آن می‌گردد.

مثبت خازن (صفحه‌ی مثبت) بطرف پایانه‌ی منفی خازن (صفحه‌ی منفی) مدارشان را کامل می‌کنند و خازن تخلیه می‌شود. مدار الکتریکی R-C موازی مطابق شکل ۶ـ۴ است. ولتاژ هر دو عنصر C و R باهم یکسان و برابر ولتاژ منبع است. جریان کل مدار از دو جریان غیرهم‌فاز I_R (اهمی) و I_C (خازنی) تشکیل می‌شود. جریان I_R با ولتاژ منبع هم‌فاز و جریان I_C از ولتاژ منبع ۹۰ درجه پیش‌فاز است. برای مطالعه‌ی مدار R-C موازی و تحلیل آن، دیاگرام برداری جریان‌ها را مطابق شکل ۷ـ۴ رسم می‌کنند و محاسبه‌های لازم را انجام می‌دهند.

شکل ۶ـ۴ـ مدار الکتریکی R-C موازی

شکل ۷ـ۴ـ دیاگرام برداری مدار R-C موازی

چون ولتاژ هر دو عنصر C و R یکسان است، در رسم دیاگرام به‌منظور سادگی محاسبات، ولتاژ را مبنا قرار می‌دهند.

۱ـ۳ـ۴ـ محاسبه‌ی اندازه‌ی مدار R-C موازی: با استفاده از شکل‌های ۶ـ۴ و ۷ـ۴ می‌توان نوشت:

$$I_R = \frac{V_S}{R} \qquad (۴ـ۱۷)$$

$$I_C = \frac{V_S}{X_C} \text{ و } I_t = \frac{V_S}{Z} \qquad (۴ـ۱۸)$$

نتیجه‌ی جمع دو بردار $\vec{I}_R$ و $\vec{I}_C$ جریان $\vec{I}_t$ است.

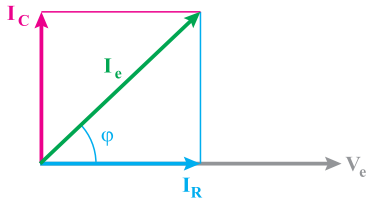
$$\vec{I}_t = \vec{I}_R + \vec{I}_C$$

با توجه به مثلث OAC خواهیم داشت:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2$$

یادآوری

در این حالت (حالت R–C موازی) مانند R–L موازی مبنا ولتاژ خازن و مقاومت بوده و جریان‌ها جمع برداری شده، جریان کل مدار I_e حاصل می‌شود (شکل ۲۱ــ۴).



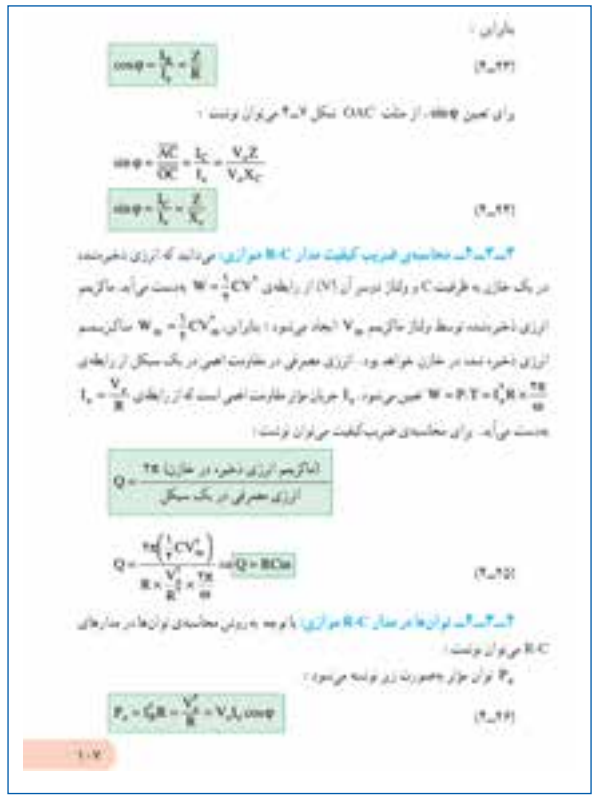
شکل ۲۱ــ۴

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_C$$

در ضمن جریان مقاومت و ولتاژ منبع با همدیگر هم‌فاز هستند.

۳ـ۴ـ الف)

امپدانس مدار (Z) و ضریب توان همانند حالت موازی R–L به‌دست می‌آید. با این تفاوت که به جای $X_L=L\omega$ از $X_c=\frac{1}{C\omega}$ استفاده می‌شود.



۳ـ۴ـ ب)

ضریب کیفیت در حالت R–C موازی :

$$Q = \tan\varphi = \frac{R}{X_C} = \frac{R}{\frac{۱}{C\omega}} = RC\omega$$

ماکزیمم انرژی ذخیره شده در خازن و انرژی مصرفی در مقاومت خواهد بود و ضریب کیفیت برابر است با :

$$Q = \frac{۲\pi(\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده در خازن})}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}} = RC\omega$$

۳ـ۴ـ ج) توان‌ها

برای محاسبه توان‌ها نیز بهتر است به دلیل برابر بودن ولتاژها از روابط زیر استفاده کنیم :

$$P_e = \frac{V_e^{۲}}{R} \quad (w)$$

$$P_d = -\frac{V_e^{۲}}{X_c} \quad (VAR)$$

$$P_s = \sqrt{P_e^{۲} + P_d^{۲}} = V_e I_e$$

۱ـ۳ـ۴ـ حل تمرین ۱۱ صفحه ۱۱۵ کتاب درسی (شکل ۲۲ـ۴)

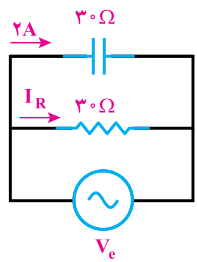
مدار روبرو را در نظر بگیرید (شکل ۲۲ـ۴).

الف)

هدف : اندازه ولتاژ و جریان منبع

گام ۱) با توجه به مقدار جریان X_c می‌توان V_C را بیابیم.

$$V_e = V_R = V_C = I_C \cdot X_C = ۲ \times ۳۰ = ۶۰ \text{ V}$$



شکل ۲۲ـ۴

گام ۲) I_R به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{۶۰}{۳۰} = ۲\ A$$

گام ۳) جریان منبع برابر جمع برداری جریان I_C و I_R می‌باشد.

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_C$$

$$I_e = \sqrt{I_R^۲ + I_C^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲}A$$

ب)

هدف : محاسبه توان‌های مصرفی و رسم مثلث توان

گام ۱) محاسبه امپدانس کل مدار

$$Z = \frac{R.X_C}{\sqrt{R^۲ + X_C^۲}} = \frac{۳۰\times۳۰}{\sqrt{۳۰^۲ + ۳۰^۲}} = \frac{۳۰}{\sqrt{۲}}\Omega$$

گام ۲) تعیین مقادیر $\sin\theta$ و $\cos\theta$

$$\cos\varphi = \frac{Z}{R} = \frac{\frac{۳۰}{\sqrt{۲}}}{۳۰} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad , \sin\varphi = -\frac{Z}{X_C} = -\frac{\frac{۳۰}{\sqrt{۲}}}{۳۰} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

گام ۳) محاسبه توان‌های مصرفی

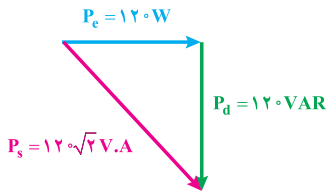
$$P_e = V_e.I_e\cos\varphi = I_e^۲.R = \frac{V_e^۲}{R} = ۶۰\times۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۲۰\ w$$

$$P_d = V_e.I_e\sin\varphi = -I_e.X_C = -\text{——} = ۶۰\times۲\sqrt{۲}\times(-\frac{\sqrt{\ }}{}) = -۱۲۰\ V.A.R$$

$$P_s = V_e.I_e = \sqrt{P_e^۲ + P_d^۲} = \sqrt{(۱۲۰)^۲ + (-۱۲۰)^۲} = ۱۲۰\sqrt{۲} = ۱۶۹/۷\ V.A$$

گام ۴) رسم مثلث توان

مطابق با (شکل ۲۳ــ۴) خواهد بود.



شکل ۲۳ــ۴

پ)

هدف : رسم دیاگرام برداری $\vec{V}$ و $\vec{I}$

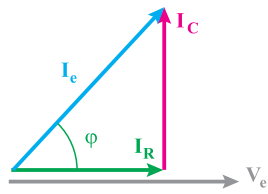
گام ۱) محاسبه θ_I

ولتاژ مبنا می‌باشد، بنابراین $\theta_V = ۰$

$$\varphi = -\tan^{-۱}(\frac{I_c}{I_R}) = -۴۵^\circ \quad , \quad \varphi = \theta_V - \theta_I \quad \rightarrow \quad \theta_I = ۴۵^\circ$$

گام ۲) رسم دیاگرام برداری

جریان I_R با ولتاژ منبع هم‌فاز و جریان I_C از ولتاژ منبع ۹۰° پیش‌فاز است (شکل ۲۴ـ۴).



شکل ۲۴ـ۴

۲ـ۳ـ۴ـ حل تمرین شماره ۱۲ صفحه ۱۱۵ کتاب درسی

یک مدار R–C موازی $\begin{cases} V(t)=۲۰۰\sin ۱۰۰۰t \\ I(t)=۱۰\sin(۱۰۰۰t+\frac{\pi}{۴}) \end{cases}$

هدف : طبق معادلات زمانی موجود برای ولتاژ جریان مقادیر R و C را محاسبه کنید.

گام ۱) با توجه به معادلات زمانی جریان، ولتاژ φ و Z را محاسبه می‌کنیم.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد با داشتن معادلات زمانی ولتاژ و جریان کل مدار φ و Z قابل محاسبه هستند.

$$\varphi=\theta_V-\theta_I=۰-۴۵^\circ=-۴۵^\circ$$

$$Z=\frac{V_m}{I_m}=\frac{۲۰۰}{۱۰}=۲۰\ \Omega$$

گام ۲) با استفاده از روابط $\sin\varphi$ و $\cos\varphi$ و R و C به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$\begin{cases}\cos\varphi=\frac{Z}{R}\\ \sin\varphi=-\frac{Z}{X_C}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲۰}{R}\\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲}=-\frac{-۲۰}{X_C}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}R=\frac{۴۰}{\sqrt{۲}}\ \Omega\\ X_C=\frac{۴۰}{\sqrt{۲}}\ \Omega\end{cases}$$

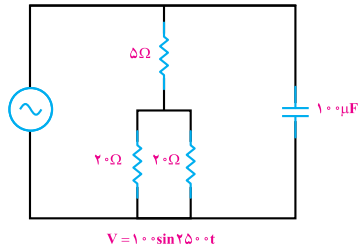
$$X_c=\frac{۱}{C\omega}\rightarrow\frac{۴۰}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{C\times۱۰۰۰}\rightarrow C=\frac{\sqrt{۲}}{۴۰\times۱۰۰۰}=۰/۰۳۵\ \mu F$$

۳ـ۳ـ۴ـ حل تمرین ۱۴ صفحه ۱۱۶ کتاب درسی (شکل ۲۵ـ۴)

الف)

هدف : محاسبه امپدانس کل مدار

گام ۱) ساده‌سازی مدار (تعیین مقاومت معادل شاخهٔ وسط)

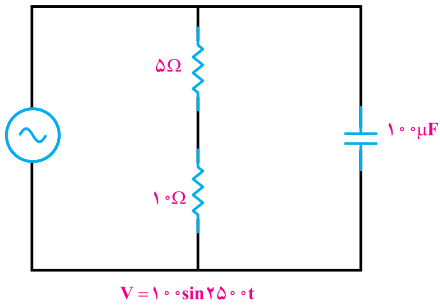


شکل ۲۵ــ۴

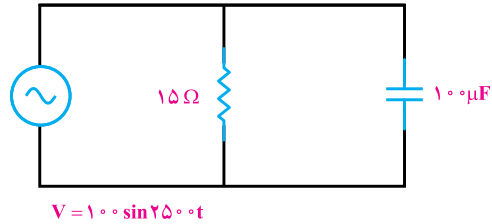
در این مرحله با توجه به شکل‌های ۲۶ــ۴ و ۲۷ــ۴ به صورت‌های نشان داده شده ساده می‌شود.

$$X_c = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{۱۰۰\times۱۰^{-۶}\times۵۰۰} = \frac{۱۰۰}{۵} \rightarrow X_c = ۲۰\ \Omega$$

$$(۲۰ \| ۲۰) = ۱۰\Omega$$



شکل ۲۶ــ۴



شکل ۲۷ــ۴

گام ۲) امپدانس کل مدار طبق رابطه زیر قابل محاسبه است.

در این رابطه باید مدار به صورت یک مقاومت و یک خازن و منبع ولتاژ، به صورت موازی قرار گرفته باشند.

$$Z = \frac{R.X_C}{\sqrt{R^۲ + X_C{}^۲}} = \frac{۲۰\times۱۵}{\sqrt{۲۰^۲ + ۱۵^۲}} = ۱۲\ \Omega$$

یادآوری

می‌توانیم مقدار امپدانس Z را از رابطهٔ دیگری نیز به‌دست آوریم که در مدارات R–Lو R–C موازی مناسب است :

$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_e}{\sqrt{I_R^۲ + I_C^۲}}$$

ب)

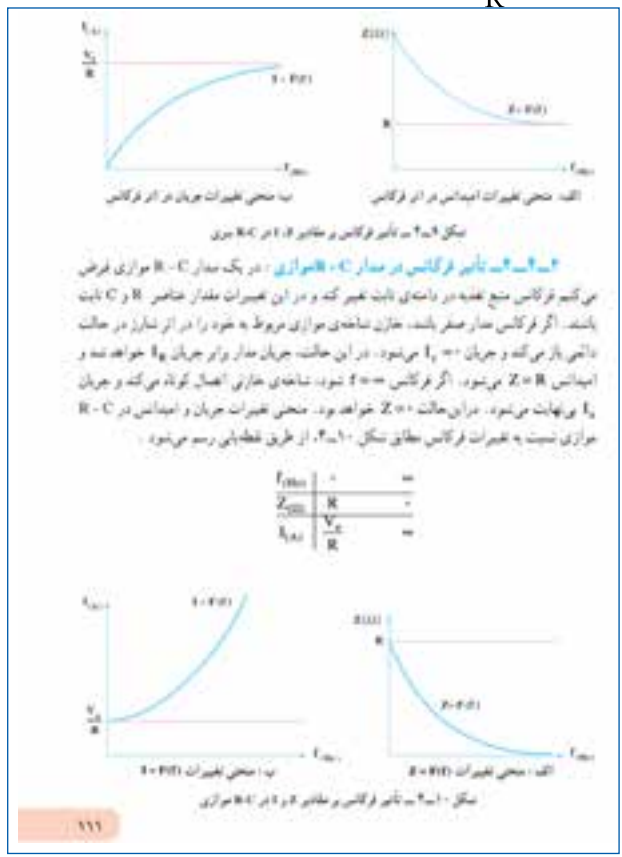
برای محاسبهٔ ضریب قدرت کل شبکه از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$\cos\varphi = \frac{Z}{R} = \frac{۱۲}{۱۵} = ۰/۸$$

۴ـ۴ـ تأثیر فرکانس بر مدار R-C سری و موازی

الف) حالت سری

در این اتصال در فرکانس صفر f=۰ یا جریان مستقیم خازن مدار باز بوده در نتیجه $Z = \infty$ و جریان مدار برابر صفر خواهد بود ولی در فرکانس‌های بالا و بی‌نهایت به دلیل اینکه راکتانس خازنی صفر است($X_c = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{\infty} = ۰$)و خازن حالت اتصال کوتاه دارد، مقدار امپدانس برابر Z=R خواهد بود و مقدار جریان از رابطه $I = \frac{V_e}{R}$ به‌دست می‌آید.



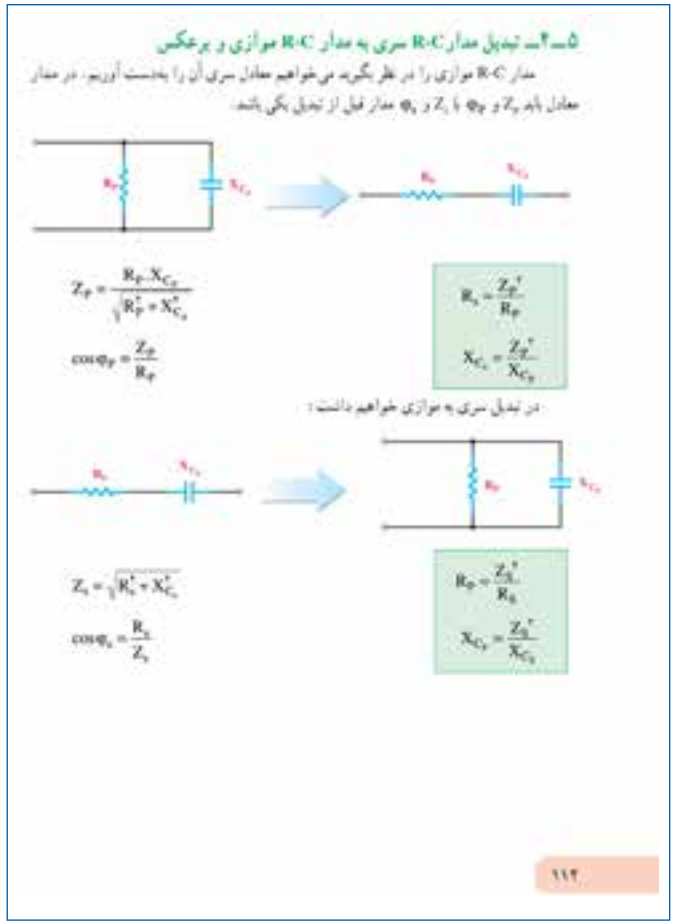
ب) حالت موازی

در این حالت در فرکانس صفر (جریان مستقیم) به‌دلیل مدار باز بودن خازن مقدار امپدانس برابر R بوده و جریان از رابطه $I=\frac{V_e}{R}$ به‌دست می‌آید.

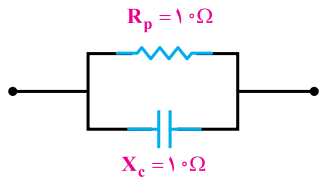
ولی در فرکانس‌های بالاتر و بی‌نهایت مقدار راکتانس X_C برابر صفر و مدار به حالت اتصال کوتاه خواهد رفت بنابراین جریان مدار در فرکانس بی‌نهایت، بی‌نهایت خواهد شد.

۵ـ۴ـ تبدیل مدارات R-C سری به مدار R-C موازی و برعکس

تبدیل این مدارات از حالت سری به موازی با رعایت X_C به‌جای X_L، دقیقاً شبیه تبدیل R–L سری به موازی و برعکس می‌باشد.



۱ـ۵ـ۴ـ حل تمرین شماره ۱۰ صفحه ۱۱۵ کتاب درسی در شکل ۲۸ـ۴



شکل ۲۸ـ۴

هدف :تبدیل مدار R–C موازی به یک مدار R–C سری

گام ۱) محاسبه امپدانس کل مدار و $\sin\theta$ و $\cos\theta$

$$Z_P = \frac{R_P.X_{C_P}}{\sqrt{R^۲ + X_C{}^۲}} = \frac{۱۰\times۱۰}{\sqrt{۱۰^۲ + ۱۰^۲}} = ۵\sqrt{۲}\ \Omega$$

$$\cos\varphi_p = \frac{Z_P}{R_P} = \frac{۵\sqrt{۲}}{۱۰} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin\varphi$$

تذکر: از برابر بودن R و X_C می‌توانستیم مقدار زاویه $\varphi=۴۵^\circ$ را پیش‌بینی کنیم.

گام ۲) با در نظر گرفتن روابط مقاومت اهمی سری و مقاومت خازنی سری مدار به‌صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$R_S = Z\cos\varphi = ۵\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۵\,\Omega$$

$$X_{C_S} = Z\sin\varphi = ۵\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۵\,\Omega$$

یا از رابطهٔ
$$\begin{cases} R_S = \dfrac{Z_P{}^۲}{R_P} = \dfrac{(۵\sqrt{۲})^۲}{۱۰} = ۵\,\Omega \\ X_{C_S} = \dfrac{Z_P{}^۲}{X_{C_P}} = \dfrac{(۵\sqrt{۲})^۲}{۱۰} = ۵\,\Omega \end{cases}$$