آموزهٔ هشتم

تمرین‌های دوره‌ای

آموزهٔ نهم

هدف‌های رفتاری را روی تخته بنویسید.

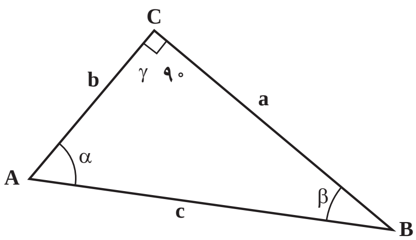
هدف‌های رفتاری : هنرجو با یادگیری این آموزه می‌تواند :

- قضیهٔ اول فیثاغورث را توضیح دهد و مسائل مربوط به آن را حل کند.
- قضیهٔ دوم فیثاغورث را توضیح دهد و مسائل مربوط به آن را حل کند.
- قضیهٔ تالس را توضیح دهد و مسائل مربوط به آن را حل کند.

۱ــ ۹ــ اشکال هندسی، زوایا، مباحث عمومی هندسه

قضیهٔ فیثاغورث (صفحهٔ ۴۰)

شکل ۱ــ۹ را روی تخته رسم نماید و توضیح دهد گوشه‌های مثلث را بیشتر با حروف بزرگ A ,B ,C و اضلاع مثلث را با حروف کوچک a ,b ,c و زوایای مثلث را با α ,β ,γ مشخص می‌نمایند.



شکل ۱ــ۹ (شکل ۹ــ۲ کتاب)

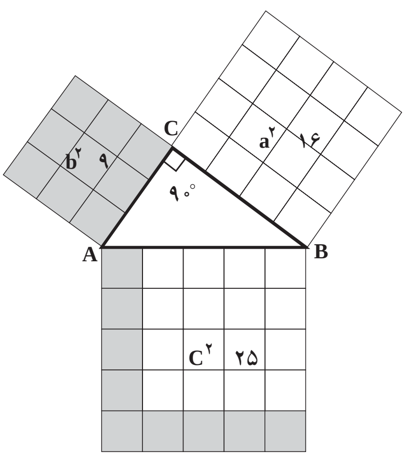
توضیح دهید : «اگر مساحت مربعی که یک ضلع آن a باشد با مساحت مربعی که یک ضلع آن b است جمع شود، حاصل جمع برابر مساحت مربعی می‌شود که ضلع آن برابر c است و رابطه زیر بین اضلاع آن سه مربع برقرار است :

$$c^2 \quad a^2 \quad b^2$$

مثال : در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۲ــ۹، دو ضلع مجاور زاویهٔ قائمه به ترتیب ۴ a و ۳ b. اندازهٔ وتر آن مثلث را به دست آورید.

پاسخ : اندازهٔ وتر آن (c)، با توجه به شکل ۲ــ۹، مشخص می‌گردد که مساحت مربع ضلع c برابر مساحت مربع ضلع a است، به‌علاوهٔ مساحت مربع ضلع b.

برای نشان‌دادن درستی این موضوع، از هنرجویان خواسته شود تعداد مربع‌های کوچک داخل هر ضلع را در شکل ۲ــ۹ بشمارند.



شکل ۲ــ۹ (شکل ۱۰ــ۲ کتاب)

۱ــ ۱ــ ۹ــ قضیهٔ اول فیثاغورث :

قضیهٔ اول فیثاغورث را روی تخته بنویسید.

پاسخ : در هر مثلث راست گوشه، مربع وتر با مجموع مربع دو ضلع دیگر برابر است.

روی تخته بنویسید : $c^۲ = a^۲ + b^۲ \Rightarrow \begin{cases} a^۲ = c^۲ - b^۲ \\ b^۲ = c^۲ - a^۲ \end{cases}$

مثال (صفحهٔ ۴۱ کتاب) : در یک مثلث قائم‌الزاویه (راست گوشه)، ضلع مجاور به زاویهٔ راست ۸۵ a میلی‌متر و وتر آن ۱۶۰ c میلی‌متر است. حساب کنید :

الف) ضلع سوم (b)

ب) مساحت مثلث بر حسب سانتی‌متر مربع

پاسخ :

الف) طول سوم (b)

پاسخ : داریم

a ۸۵ mm $\qquad$ $c^۲\ \ a^۲\ \ b^۲$ $\qquad$ $b^۲\ \ ۱۸۳۷۵$

c ۱۶۰ mm $\qquad$ $۱۶۰^۲\ \ ۸۵^۲\ \ b^۲$ $\qquad$ $b = \sqrt{۳۲۸۲۵}$

b ? $\qquad$ $\boxed{b \simeq ۱۳۵/۵mm}$

ب) مساحت مثلث برحسب سانتی‌مترمربع

g b ۱۳۵ mm ۱۳/۵ cm $\qquad$ $A = \frac{g.h}{۲}$

h a ۸۵ mm ۸/۵ cm $\qquad$ $A = \frac{۱۳/۵ \times ۸/۵}{۲} = ۵۷/۳۸\ cm^۲$

A ? $cm^۲$

تمرین : در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ضلع‌های مجاور به زاویه قائمه آن به ترتیب ۹ mm a و ۱۲ mm b است طول وتر و مساحت آن را برحسب سانتی‌متر مربع محاسبه نمایید.

پاسخ :

طول وتر :

a ۹ mm $\qquad$ $c^۲\ \ a^۲\ \ b^۲$

b ۱۲ mm $\qquad$ $c = \sqrt{۹^۲ + ۱۲^۲}$

c ?

A ? $cm^۲$ $\qquad$ c ۱۵ mm

مساحت مثلث :

g b ۱۲ mm ۱/۲ cm $\qquad$ $A = \frac{g.h}{۲}$

h a ۹ mm ۰/۹ cm $\qquad$ $A = \frac{۱/۲ \times ۹}{۲} = ۰/۵۴cm^۲$

کار در خانه : طول ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که وتر آن ۳۵ میلی‌متر و ارتفاع آن ۲۱ میلی‌متر است، محاسبه نمایید.

پاسخ :

ارتفاع a c ۳۵ mm

قاعده b a ۲۱ mm $b^۲$ $c^۲$ $a^۲$

وتر c b ? $b=\sqrt{۳۵^۲-۲۱^۲}=۲۸$ mm

۲ــ ۱ــ ۹ــ قضیهٔ دوم فیثاغورث :

شکل ۱۲ــ ۲ را روی تخته رسم کنید.

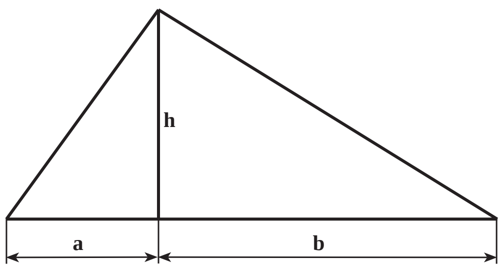
توضیح دهید : در هر مثلث راست گوشه ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی بین دو قطعهٔ تقسیم شده وتر است.

رابطهٔ زیر را روی تخته بنویسید.

$h^۲$ $a.b$

که در آن h ارتفاع وارد بر وتر است.

اشتباه رایج : برخی از هنرجویان در این رابطه می‌پندارند a و b دو ضلع مثلث است. برای جلوگیری از این اشتباه شاید بهتر باشد این رابطه را به روش زیر بنویسید. $h^۲$ $c_۱ \times c_۲$



شکل ۳ــ ۹ (شکل ۱۲ــ ۲ کتاب)

مثال (صفحهٔ ۴۲ کتاب) : در مثلث راست گوشه شکل ۱۳ــ ۲ ارتفاع وارد بر وتر (h) را حساب کنید.

پاسخ :

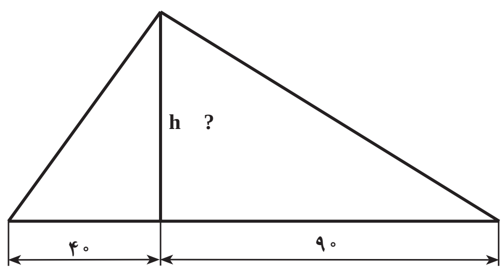
شکل ۱۳ــ ۲ کتاب را روی تخته رسم و عدد گذاری کنید.

روش پاسخ را روی تخته بنویسید و توضیح دهید.

a ۴۰ mm $h^۲$ $a.b$ $h=\sqrt{۴۰\times۹۰}$

b ۹۰ mm $h=\sqrt{a.b}$ $h=\sqrt{۳۶۰۰}$

h ? h ۶۰ mm



شکل ۴ــ ۹ (شکل ۱۳ــ ۲ کتاب)

تمرین : در مثلث راست گوشهٔ شکل۱۴ــ ۲ مقادیر ۵۰ mm h و ۳۰ mm b است، مقدار a را به دست آورید.

پاسخ :

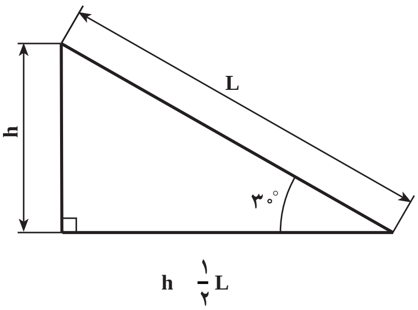
h ۵۰ mm $h^۲$ $a.b$ $a=\frac{۵۰^۲}{۳۰}=\frac{۲۵۰۰}{۳۰}$

b ۳۰ mm $a=\frac{h^۲}{b}$

a ? $\boxed{a \quad ۸۳ \text{ mm}}$

۲ــ۹ــ قضیهٔ تالس (صفحهٔ ۴۲)

شکل ۱۴ــ ۲ (صفحهٔ ۴۲) را روی تخته رسم کند.



شکل ۵ ــ ۹ (شکل ۱۴ــ۲ کتاب)

بنویسید و توضیح دهید :

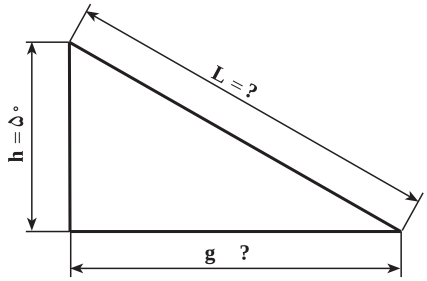
قضیهٔ تالس : در هر مثلث راست گوشه ضلع روبه‌روی زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است.

$$h=\frac{۱}{۲}L$$

که در آن

L ــ وتر مثلث قائم‌الزاویه

h ــ ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰°



شکل ۶ ــ ۹ (شکل ۱۵ــ۲ کتاب)

مثال (مثال دوم صفحهٔ ۴۲) : طول ضلع g را در شکل ۱۵ــ ۲ محاسبه کنید.

L ــ وتر مثلث راست گوشه

h ــ ضلع روبه‌روی زاویهٔ ۳۰ درجه

پاسخ :

توضیح دهید : پاسخ این مسئله را می‌توانیم از رابطهٔ تالس و فیثاغورث به دست آوریم. ابتدا اندازهٔ ضلع L را به دست می‌آوریم.

h ۵۰ mm $\qquad$ $h=\frac{۱}{۲}L$

L ?

g ? $\qquad$ L ۲×h $\qquad$ L ۲ × ۵۰ ۱۰۰ mm

سپس با قضیهٔ اول فیثاغورث اندازه g را به دست آورید.

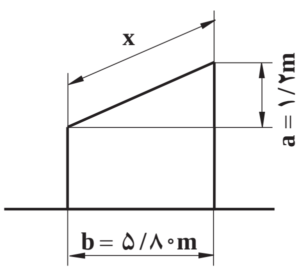
$a^{۲}$ $c^{۲}$ $b^{۲}$ $\qquad$ $g^{۲}$ $L^{۲}$ $h^{۲}$

L ۱۰۰ $\qquad$ $g=\sqrt{L^{۲}-h^{۲}}$ $\qquad$ $g=\sqrt{۱۰۰^{۲}-۵۰^{۲}}$

b ۵۰ $\qquad$ $g=\sqrt{۷۵۰۰}\Rightarrow g=۸۶/۶$

مثال را به ترتیب زیر، همراه با توضیح دادن، روی تخته حل نمایید.

مثال(صفحهٔ ۴۳ کتاب) : برای ساخت سقف گاراژی اندازهٔ x مورد نیاز است. با توجه به ابعاد داده شده، اندازهٔ آن را به دست آورید.



شکل ۷ ــ ۹ (شکل ۱۶ــ۲ کتاب)

پاسخ :

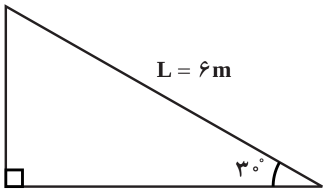
توضیح دهید : اگر بخش بالایی شکل ۱۶ــ۲ را بررسی کنید در آن مثلثی می‌بینید که ضلع قاعدهٔ آن b　$5/8$ m و ارتفاع آن $1/2$ m　a است. چون این مثلث راست گوشه است، بنابراین برای به دست آوردن پاسخ می‌توانید رابطه اول فیثاغورث را به کار ببرید.

a　$1/2$ m　　x^2　a^2　b^2　　$x=\sqrt{1/2^2+5/8^2}$　　$x=\boxed{5/92\text{m}}$

b　$5/8$ m　　$x=\sqrt{a^2+b^2}$　　$x=\sqrt{35/08}$

x　?

تمرین : اگر در مثلث راست گوشه‌ای مانند شکل ۱۴ــ ۲　6 m　L باشد محیط این مثلث چند متر است؟



شکل ۸ــ ۹

پاسخ : برای محاسبهٔ محیط مثلث باید اندازهٔ هر سه ضلع را به‌دست آورید. از رابطهٔ تالس خواهیم داشت :

L　6 m

$\measuredangle\alpha=30^\circ$　　$h=\frac{1}{2}c$

b　?　　$h=\frac{1}{2}\times 6=3$ m

h　?　ضلع روبرو به زاویه ۳۰ درجه

توضیح دهید : برای محاسبهٔ قاعدهٔ مثلث قضیهٔ اول فیثاغورث به کار برده می‌شود.

L　6 m　　b^2　c^2　a^2　　محیط مثلث برابر خواهد بود

h　3 m　　g^2　L^2　h^2　　u　L　h　g

g　? قاعده مثلث　　$g=\sqrt{L^2-h^2}=\sqrt{6^2-3^2}$　　u　6　3　5　14 m

$g=\sqrt{25}=5$ m

آموزۀ دهم

هدف‌های رفتاری را روی تخته بنویسید.

هدف‌های رفتاری : هنرجو با یادگیری این آموزه می‌تواند :

- روابط مثلثاتی را توضیح دهد.
- روابط بین زوایا را توضیح دهد.
- روابط بین زوایا و اضلاع در مثلث راست گوشه را توضیح دهد.

۱ــ۱۰ــ روابط مثلثاتی (۳ــ۲ صفحهٔ ۴۴)

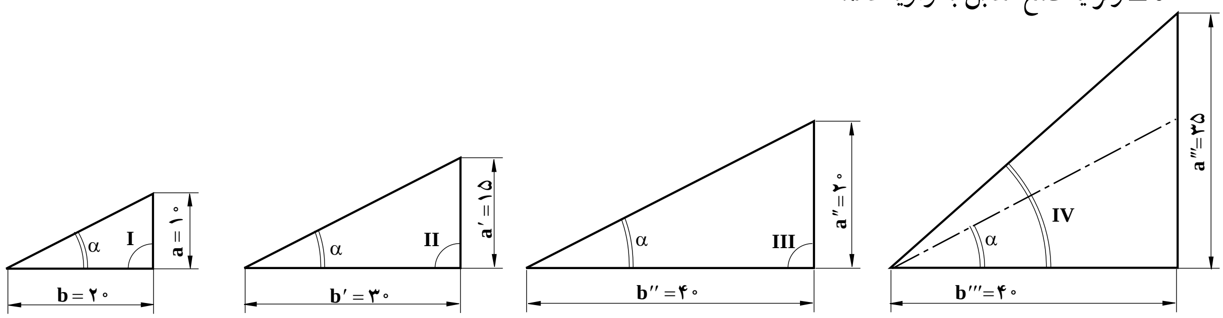
شکل ۲۱ــ ۲ را روی تخته رسم نمایید.

توضیح دهید :

a ــ ضلع مقابل به زاویهٔ α و مجاور به زاویهٔ β

b ــ ضلع مقابل به زاویهٔ β و مجاور به زاویهٔ α

c ــ وتر یا ضلع مقابل به زاویهٔ قائمه



شکل ۱ ــ ۱۰ــ (شکل ۲۲ــ۲ کتاب)

به هنرجویان یادآور شوید ترتیب گفته شدهٔ اضلاع و زوایا در طول این آموزه تغییر نمی‌کند و بر مبنای آن‌ها مطالب مورد نظر گفته می‌شود.

روابط بین زوایا و اضلاع در مثلث قائم‌الزاویه

شکل ۲۲ــ ۲ را روی کتاب توضیح دهد و مشخصات هر مثلث و تفاوت مثلث‌ها را با هم به ترتیب زیر مطرح نماید.

در مثلث I زاویهٔ آن با α و اضلاع آن با a و b مشخص شده است.

در مثلث II زاویهٔ آن با α و اضلاع آن با a' و b' مشخص شده است.

در مثلث III زاویهٔ آن با α و اضلاع آن با a'' و b'' مشخص شده است.

در مثلث IV اضلاع آن با a''' و b''' مشخص شده، اما همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود زاویۀ آن برابر α نیست.

در مثلث I و II و III زاویۀ α با همدیگر مساوی‌اند اما در مثلث IV زاویۀ α با زاویۀ مشابه در دیگر مثلث‌ها یکی نیست.

توضیح دهید : از بررسی سه مثلث می‌توان فهمید :

چون زاویۀ α در مثلث‌های راست گوشه I و II و III باهم برابرند نسبت اضلاع آن‌ها نیز با هم برابر خواهند بود.

روی تخته بنویسید.

در مثلث III	در مثلث II	در مثلث I
$\frac{a''}{b''}=\frac{۲۰}{۴۰}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$	$\frac{a'}{b'}=\frac{\cancel{۱۵}^{۱}}{\cancel{۳۰}_{۲}}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$	$\frac{a}{b}=\frac{\cancel{۱۰}^{۱}}{\cancel{۲۰}_{۲}}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$

و همچنین در نسبت‌های دیگر

در مثلث III	در مثلث II	در مثلث I
$\frac{b''}{a''}=\frac{۴۰}{۲۰}=\frac{۲۰}{۱}=۲$	$\frac{b'}{a'}=\frac{\cancel{۳۰}^{۲}}{\cancel{۱۵}_{۱}}=\frac{۲}{۱}=۲$	$\frac{b}{a}=\frac{\cancel{۲۰}^{۲}}{\cancel{۱۰}_{۱}}=\frac{۲}{۱}=۲$

به هنرجویان بگویید : با در نظر گرفتن نسبت‌ها می‌توان گفت که در سه نسبت اول پاسخ نسبت‌ها برابر ۰/۵ بود :

$$\frac{\text{ضلع مقابل به زاویۀ } \alpha}{\text{ضلع مجاور به زاویۀ } \alpha} \quad ۰/۵$$

و سه نسبت دوم نیز :

$$\frac{\text{ضلع مجاور به زاویۀ } \alpha}{\text{ضلع مقابل به زاویۀ } \alpha} \quad ۲$$

هر دو نوع نسبت در مثلث‌های I و II و III برابر است. بنابراین می‌توان گفت :

«چون زاویه α در مثلث‌های راست گوشه I و II و III با هم برابرند نسبت اضلاع آن‌ها نیز با هم برابر خواهند بود»

تمرین : اگر در شکل ۲۲ـ۲ اندازه‌های داده شده به ترتیب زیر باشند و زاویۀ α در هر مثلث برابر باشند، نسبت اضلاع در مثلث‌های راست گوشه I و II و III را به دست آورید.

پاسخ :

در مثلث III $\begin{cases} a''=۴۰ \\ b''=۸۰ \end{cases}$ در مثلث II $\begin{cases} a'=۳۰ \\ b'=۶۰ \end{cases}$ در مثلث I $\begin{cases} a=۲۰ \\ b=۴۰ \end{cases}$

$$\frac{a}{b}=\frac{۲۰}{۴۰}=\frac{۱}{۲}=۰/۵ \qquad \frac{b}{a}=\frac{۴۰}{۲۰}=\frac{۲}{۱}=۲$$

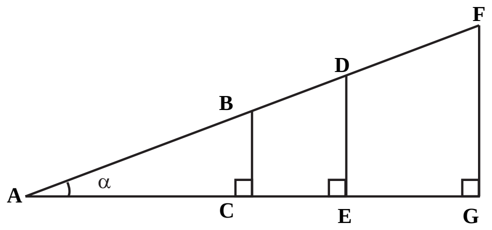
$$\frac{a'}{b'}=\frac{۳۰}{۶۰}=\frac{۱}{۲}=۰/۵ \qquad \frac{b'}{a'}=\frac{۶۰}{۳۰}=\frac{۲}{۱}=۲$$

$$\frac{a''}{b''}=\frac{۴۰}{۸۰}=\frac{۱}{۲}=۰/۵ \qquad \frac{b''}{a''}=\frac{۸۰}{۴۰}=\frac{۲}{۱}=۲$$

کاردرخانه : در شکل زیر سه مثلث ABC و ADE و AFG رسم شده است که زاویهٔ α در همهٔ آن‌ها یکی است آیا نسبت اضلاع در آن‌ها برابر است؟

پاسخ :

بنویسید و توضیح دهید : چون سه مثلث، راست گوشه هستند و زاویهٔ α در آن‌ها برابر است، نسبت اضلاع سه مثلثِ رسم شده نیز با هم برابر است؛ یعنی :



شکل ۲ــ ۱۰

$$\frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AE}=\frac{FG}{AG}$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AE}{DE}=\frac{AG}{FG}$$

دومین نتیجهٔ شکل ۲۲ــ۲ را به صورت زیر بیان کنید :

اگر اندازهٔ زاویهٔ α در مثلث III مطابق شکل ۲۲ــ ۲ با مثلث IV تغییر کند، نسبت اضلاع آن نیز تغییر خواهد کرد.

نسبت‌ها را روی تخته نوشته و توضیح دهید :

در مثلث IV

$$\frac{a'''}{b'''}=\frac{\cancel{۳۵}^{۷}}{\cancel{۴۰}_{۸}}=\frac{۷}{۸}=۰/۸۷۵$$

$$\frac{b'''}{a'''}=\frac{\cancel{۴۰}^{۸}}{\cancel{۳۵}^{۷}}=\frac{۸}{۷}=۱/۱۴۲$$

این نسبت‌ها با نسبت‌های اضلاع در مثلث‌های I و II و III یک‌سان نیست زیرا زاویه α در مثلث IV تغییر کرده است.

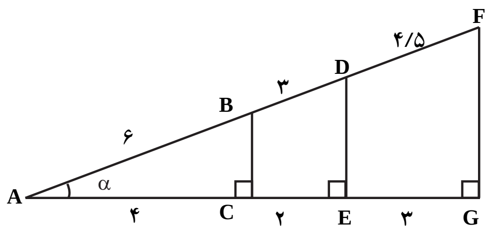
مثال : نسبت‌های $\frac{AC}{AB},\frac{AE}{AD},\frac{AG}{AF}$ را در شکل زیر به دست آورید و اندازهٔ آن‌ها را با هم مقایسه نمایید.

پاسخ :

$$\frac{AC}{AB}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{AE}{AD}=\frac{۴+۲}{۶+۳}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{AG}{AF}=\frac{۴+۲+۳}{۶+۳+۴/۵}=\frac{۹}{۱۳/۵}=\frac{۲}{۳}$$



شکل ۳ــ ۱۰

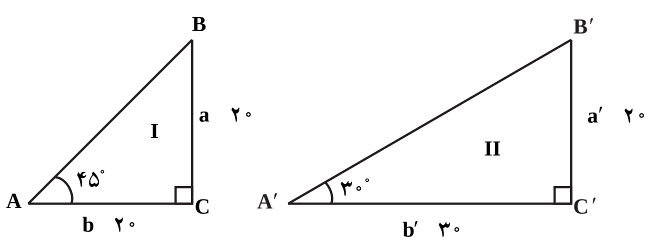
چون مثلث راست گوشه است و در همهٔ کسرها، نسبت ضلع مجاور به وتر مثلث برابر است پس نسبت‌ها با هم برابرند.

تمرین : در مثلث‌های زیر نسبت اضلاعی را که اندازه آن‌ها داده شده است بیابید و سپس این نسبت‌ها را با هم مقایسه کنید.

پاسخ : نسبت اضلاع :

در مثلث I

$$\frac{a}{b}=\frac{۲۰}{۲۰}=۱ \qquad \frac{b}{a}=\frac{۲۰}{۲۰}=۱$$



شکل ۴ــ ۱۰

در مثلث II

$$\frac{a'}{b'}=\frac{۲۰}{۳۰}=\frac{۲}{۳} \qquad \frac{b'}{a'}=\frac{۳۰}{۲۰}=\frac{۳}{۲}$$

نسبت اضلاع مثلث‌ها با هم برابر نیست و علت آن یکی نبودن زاویهٔ α در آن‌هاست.

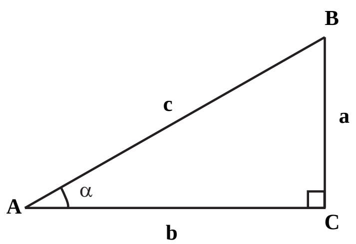
توضیح دهید :

- «در مثلث راست گوشه اندازهٔ زوایای α و β و نسبت اضلاع با هم بستگی دارد.»
- «در هر مثلث راست گوشه با داشتن نسبت اضلاع می‌توان اندازهٔ زاویه و با داشتن اندازهٔ زاویه نسبت اضلاع را به دست آورد.»

- **بنویسید و توضیح دهید :**

«هم بستگی نسبت‌های اضلاع و زاویه در مثلث راست گوشه را روابط مثلثاتی گویند.»

شکل **۲۳ــ ۲** را رسم کنید و روابط مثلثاتی را روی تخته بنویسید و روی شکل توضیح دهید.



شکل ۵ــ ۱۰ (شکل۲۳ــ۲ کتاب)

$$\text{کسینوس}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{b}{c}$$

$$\text{سینوس}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{a}{c}$$

$$\text{کتانژانت}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} \Rightarrow \cot\alpha=\frac{b}{a}$$

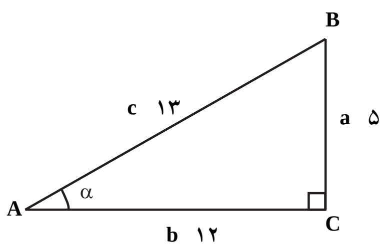
$$\text{تانژانت}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{a}{b}$$

مثال : در مثلث راست گوشهٔ زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

پاسخ :

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{۵}{۱۳} \qquad \cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\tan\alpha=\frac{a}{b}=\frac{۵}{۱۲} \qquad \cot\alpha=\frac{b}{a}=\frac{۱۲}{۵}$$



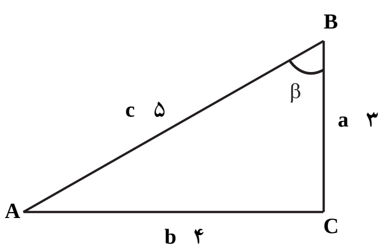
شکل ۶ــ ۱۰

تمرین : نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ β را در مثلث راست گوشهٔ زیر به دست آورید.

پاسخ :

$$\sin\beta=\frac{b}{c}=\frac{۴}{۵} \qquad \cos\beta=\frac{a}{c}=\frac{۳}{۵}$$

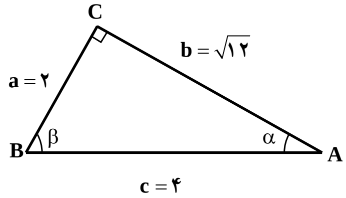
$$\tan\beta=\frac{b}{a}=\frac{۴}{۳} \qquad \cot\beta=\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}$$



شکل ۷ــ ۱۰

تمرین : در مثلث راست گوشهٔ زیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای α و β را با ماشین‌حساب به دست آورید.

پاسخ :



$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{12}}{4} \simeq 0/86 \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{2}{4} = 0/5$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{2}{4} = 0/5 \qquad \sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{12}}{4} \simeq 0/86$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{12}}{2} \simeq 1/73 \qquad \cot\beta = \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{12}} \simeq 0/57$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{12}} \simeq 0/57 \qquad \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{12}}{2} \simeq 1/73$$

توضیح دهید : روابط مثلثاتی در حل بسیاری از مسائل فنی به کار برده می‌شوند.

مثال صفحهٔ ۴۶ کتاب را با رسم شکل و توضیح چگونگی تشکیل مثلث راست گوشه و محاسبهٔ زوایای α و β توضیح دهید.

مثال : از میله گردی به قطر d ۵۰ mm، قطعه‌ای مانند شکل ۲۴ــ۲ ساخته خواهد شد. اگر پهنای سطوح تخت شده با هم برابر باشد، عمق بار (h) را حساب کنید.

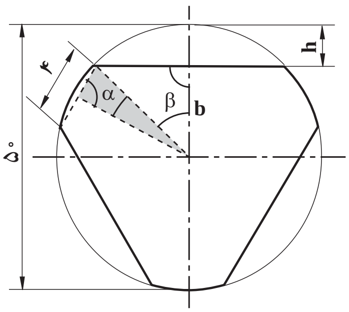
پاسخ :

توضیح دهید : پاسخ این‌گونه مسائل بیشتر با تشکیل مثلث راست گوشه و روابط مثلثاتی به دست می‌آید.

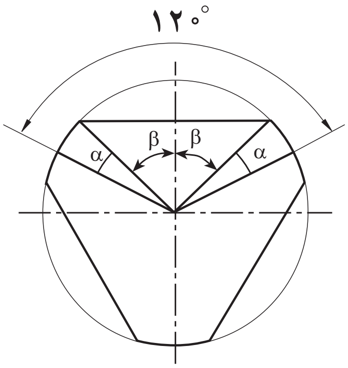
شکل ۲۴ــ ۲ را بررسی کنید یک مثلث با زاویهٔ α که یک رأس آن روی مرکز دایره است و ضلع مقابل زاویهٔ α نزدیک به محیط دایره قرارگرفته، اندازهٔ این ضلع برابر (نصف اندازهٔ آن قسمت از محیط دایره که برابر $\frac{4}{2}$ در شکل نشان داده شده) است.

اندازهٔ طول وتر مثلث برابر شعاع دایره یا $\frac{50}{2}$ (نصف قطر دایره) است، که در شکل ۲۵ــ ۲ مشخص شده و $\frac{1}{3}$ محیط دایره با زاویه 120° مشخص شده است. در این قسمت دو زاویهٔ α و دو زاویهٔ β وجود دارد.

برای به دست آوردن زاویهٔ α از رابطهٔ مثلثاتی سینوس استفاده می‌شود.



شکل ۸ ــ ۱۰ــ (شکل۲۴ــ۲ کتاب)



شکل ۹ ــ ۱۰ــ (شکل۲۵ــ۲ کتاب)

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\alpha = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{50}{2}} = 0/08 \qquad \Rightarrow \alpha = 4^\circ,30'$$

توضیح دهید : اندازهٔ $\sin\alpha = 0/08 \Rightarrow \alpha = 4^\circ,30'$ را می‌توانید از جداول مثلثاتی یا با ماشین حساب به دست آورید.

توضیح دهید : برای به دست آوردن اندازهٔ زاویهٔ β، در شکل ۲۵ــ ۲، داریم.

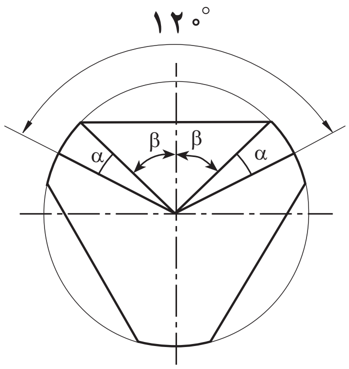
$$2\beta \quad 2\alpha \quad 120^\circ \qquad\qquad 2\beta \quad 120^\circ \quad 2\alpha$$

$$\beta = \frac{۱۲۰^\circ - ۲\alpha}{۲} = ۶۰^\circ - \alpha$$

$$\beta = ۶۰^\circ - (۴^\circ,۳۰')$$

$$\beta = ۵۵^\circ,۳۰'$$

$$\alpha = ۴^\circ,۳۰'$$



شکل ۱۰ــ۱۰ (قسمت β از شکل۲۵ــ۲ کتاب)

توضیح دهید : از رابطه کسینوس زاویه β مقدار b درشکل۲۴ــ۲ به دست می‌آید.

$$\cos\beta = \frac{b}{r}$$

$$b \quad \cos\beta \times r$$

$$b \quad ۰/۵۶۶۴ \times ۲۵ \quad ۱۴/۱۶ \text{ mm}$$

$$h \quad r \quad b \quad ۲۵ \quad ۱۴/۱۶ \quad ۱۰/۸۴ \text{ mm}$$

$$\beta = ۵۵^\circ,۳۰'$$

$$\cos\beta \quad ۰/۵۶۶۴$$

$$r = \frac{D}{۲} = \frac{۵۰}{۲} = ۲۵$$

$$h \quad ?$$

کار در خانه : از هنرجویان بخواهید تمرین صفحهٔ ۴۷ کتاب را در خانه انجام دهند و در جلسهٔ آینده ارائه نمایند.

منابع برای مطالعهٔ بیشتر هنرآموز :

کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال، تألیف کردودیس، ترجمهٔ ابوالقاسم لاله، مرکز نشر دانشگاهی تهران.

آموزهٔ یازدهم

هدف‌های رفتاری را روی تخته بنویسید.

هدف‌های رفتاری: با یادگیری این آموزه، هنرجو می‌تواند:

- حرکت را تعریف کند و انواع حرکت را نام ببرد.
- سرعت را تعریف کند و انواع سرعت را نام ببرد.
- رابطهٔ سرعت خطی را در مسائل به کار برد.
- رابطهٔ سرعت دَوَرانی (زاویه ای، محیطی) را در مسائل به کار برد.

۱ـ۱۱ـ حرکت (۱ـ ۳ صفحهٔ ۴۸)

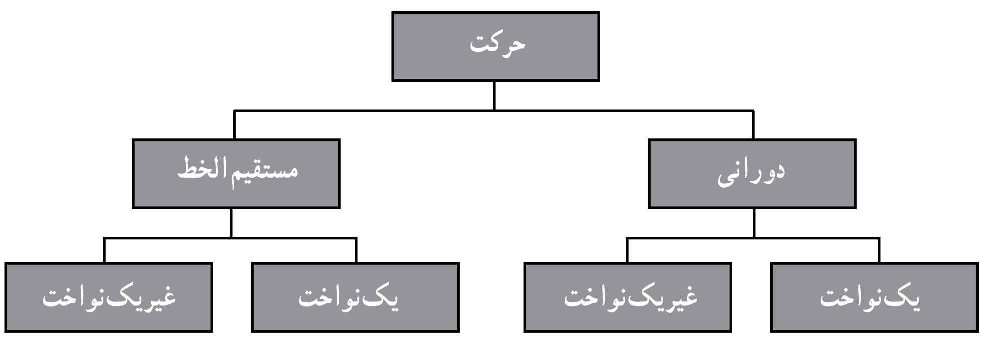
از هنرجویان بخواهید تا حرکت را تعریف کنند. پاسخ‌های هنرجویان را با توضیح خود تکمیل کنید.

توضیح دهید که انواع حرکت از نظر نوع مسیر بر دو نوع است، در راه راست (مستقیم‌الخط) و دورانی. برای حرکت مستقیم‌الخط نمونه‌هایی مانند حرکت قطار روی ریل مستقیم، حرکت جسم روی نقاله تسمه‌ای و حرکت پیاله‌های نقاله پیاله‌ای در طول مسیر و برای حرکت دورانی نمونه‌های حرکت چرخ تراکتور، حرکت تسمه در نقالهٔ تسمه‌ای و پیاله‌ها در نقالهٔ پیاله‌ای در انتهای مسیر، حرکت چرخ‌زنجیرها و چرخ دنده‌ها و چرخ تسمه‌ها و مانند آن‌ها.

حرکت یک‌نواخت و غیر یک‌نواخت را با طرح سؤال و پاسخ توضیح دهید. برای مثال بپرسید: «آیا کسی می‌داند تفاوت حرکت یک‌نواخت با حرکت غیر یک‌نواخت چیست؟»

پس از پاسخ گویی چند هنرجو، توضیح دهید: «حرکت یک‌نواخت، حرکتی است که در زمان‌های مساوی، مسیرهای برابر طی می‌گردد مانند حرکت قطار با سرعت ثابت روی ریل.»

در پی آن انواع کلی حرکت را با نمودار زیر دسته‌بندی کنید.



۲ــ۱۱ــ سرعت (۲ــ ۳ صفحهٔ ۴۸)

پرسش از کلاس «سرعت را تعریف کنید». با بیان این پرسش دانش‌آموزان پاسخ می‌دهند. سپس بیان کنید : «یکی از کمیّت‌های مهم در اندازه‌گیری حرکت، اندازه‌گیری سرعت است. اگر مسافت طی شده را بر زمان حرکت تقسیم کنیم عدد به دست آمده کمیّت سرعت خواهد بود که یک کمیّت فرعی است.»

توضیح دهید: «سرعت چندین گونه است که در این کتاب چهار نوع آن که عبارت‌اند از : سرعت خطی، سرعت دَوَرانی، سرعت محیطی و سرعت زاویه‌ای، بررسی می‌شوند».

۳ــ ۱۱ــ سرعت خطی(صفحهٔ ۴۹)

در کلاس این سؤال را مطرح کنید: «سرعت خطی را تعریف کنید». پس از تعریف درست، از هنرجویان بخواهید تا در زمینهٔ استفاده از سرعت خطی در ماشین‌های کشاورزی نمونه‌هایی را بیان کنند.

پرسش: «با ذکر مثال، اهمیت اندازه‌گیری یا محاسبهٔ سرعت خطی را در ماشین‌های کشاورزی بیان کنید.»

پاسخ: «اندازه‌گیری یا محاسبهٔ سرعت خطی در انجام فعالیت‌های کشاورزی، که توسط ماشین‌های مختلف انجام می‌گیرد، برای تخمین زمان یا تعداد ماشین‌های مورد نیاز یا محاسبهٔ عملکرد ماشین و دیگر موارد کاربرد دارد. برای نمونه، هنگامی که کارهای گوناگون زراعی در مزرعه با دنباله‌بندها یا ماشین‌های کشاورزی انجام می‌شود، با مشخص بودن سرعت پیشروی ماشین، مساحت مزرعه و عرض کار ماشین، می‌توان زمان مورد نیاز را برآورد کرد. با محاسبهٔ سرعت خطی تسمهٔ یک نقالهٔ تسمه‌ای، می‌توان عملکرد نقاله را در ساعت محاسبه کرد.»

رابطهٔ سرعت خطی (رابطهٔ ۱ــ ۳ کتاب) را روی تخته بنویسید و آن را شرح دهید:

V : سرعت بر حسب متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$

S : مسافت طی شده بر حسب متر (m)

t : زمان طی شده بر حسب ثانیه (s)

$$V = \frac{s}{t}$$

بیان کنید: «سرعت نیز مانند سایر کمیّت‌ها یکایی دارد. یکای سرعت در سیستم متریک، متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ است. ما از این یکا هنگامی استفاده می‌کنیم که مسافت با متر و زمان با ثانیه تعیین شده باشد. در رابطهٔ سرعت، یکای انتخاب شده برای سرعت متناسب با یکای به کار رفته برای مسافت و زمان است. در مواردی شاید به کار بردن یکای دیگر برای سرعت بهتر باشد. برای نمونه برای تعیین سرعت وسایل حمل و نقل مثل ماشین یا قطار، چون مسافت با کیلومتر و زمان با ساعت سنجیده می‌شود سرعت با یکای کیلومتر بر ساعت $(\frac{km}{h})$ تعیین می‌شود.»

چند یکای سرعت رایج را روی تخته بنویسید و با بیان کاربردشان آن‌ها را شرح دهید.

- سرعت نورــ کیلومتر بر ثانیه $(\frac{km}{s})$
- سرعت برش در سوراخ‌کاری، تراش‌کاری ــ متر بر دقیقه $(\frac{m}{min})$
- سرعت صوت ــ متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$
- سرعت پیشروی در ماشین‌های فرز و سنگ‌زنی ــ میلی‌متر بر دقیقه $(\frac{mm}{min})$

کار در کلاس: از هنرجویان بخواهید تا فاصله‌ای را در کلاس بر حسب متر تعیین کنند. سپس از یک هنرجو بخواهید تا در ابتدای مسیر بایستد. حال از او بخواهید تا طول مسیر را قدم بزند و همزمان دیگر هنرجویان زمان راه رفتن وی روی مسیر را با ساعت اندازه‌گیری کنند. اکنون از هنرجویان بخواهید سرعت وی را برآورد کنند.

کار در خانه: از هنرجویان بخواهید تا پنج مورد از یکای سرعت در ماشین‌های کشاورزی و کاربرد آن رابیان کنند.

مثال صفحهٔ ۴۹ کتاب را بخوانید و با روشن کردن پیچیدگی‌هایش، آن را حل کنید.

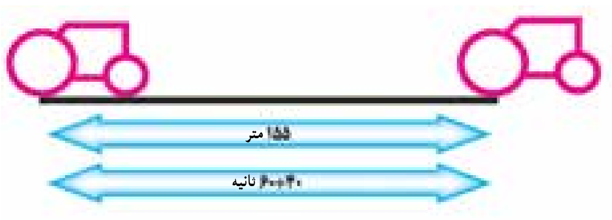
مثال۱ : تراکتوری هنگام کار در مزرعه، طول ۱۵۵ متری زمین را در مدت یک دقیقه و ۴۰ ثانیه می‌پیماید. سرعت خطی این تراکتور چقدر است؟

پاسخ :

$s \quad ۱۵۵\,m$

$t=۱'+۴۰''=۱۰۰s$

$V=?\,\frac{m}{s}$



شکل ۱ــ۱۱

$$V=\frac{s}{t}=\frac{۱۵۵}{۱۰۰}\Rightarrow \boxed{V=۱/۵۵\frac{m}{s}}$$

روش تبدیل واحد $\frac{m}{s}$ به $\frac{km}{h}$ را با به کار بردن رابطه زیر شرح دهید.

$$۱\frac{\cancel{m}}{\cancel{s}}\times\frac{۳۶۰۰\cancel{s}}{۱h}\times\frac{۱km}{۱۰۰۰\cancel{m}}=۳/۶\frac{km}{h}$$

یکای مثال حل شده را با روش زیر به $\frac{km}{h}$ تبدیل کنید.

بیان کنید : اگر بخواهیم سرعت به دست آمده (متر بر ثانیه) را بر پایهٔ کیلومتر در ساعت محاسبه کنیم، آن را باید در عدد ۳/۶ ضرب کنیم.

$$V=۱/۵۵\frac{m}{s}\times\frac{۳۶۰۰s}{۱h}\times\frac{۱km}{۱۰۰۰m}=\boxed{۵/۶\frac{km}{h}}$$

مثال دوم صفحهٔ ۴۹ را با روش گفته شده حل کنید.

برای درک بهتر هنرجویان، تمرین‌های بیان شده در این آزمون را در کلاس مطرح کنید و از آن‌ها بخواهید تمرین‌ها را حل کنند. سپس از داوطلبی درخواست کنید تا مسئله را پای تخته حل کند. در این مرحله اشتباه‌های هنرجو را به او یادآور شوید.

تمرین۱ــ برای حمل گندم در یک سیلو نقالهٔ پیاله‌ای به‌کار می‌رود. اگر سرعت تسمهٔ نقالهٔ پیاله‌ای ۰/۵ متر بر ثانیه باشد و ۴۰ ثانیه طول بکشد تا هر پیاله از پایین به بالای مسیر برسد، طول مسیر چقدر است؟

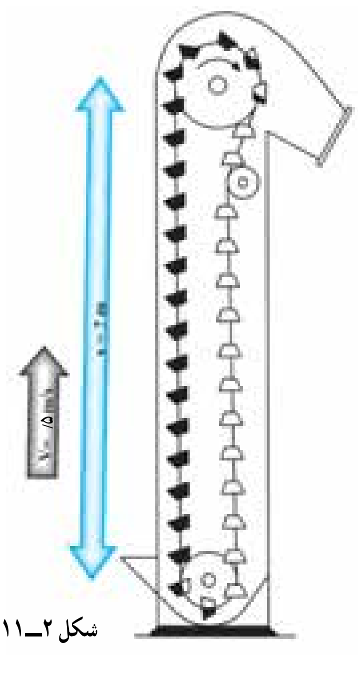
پاسخ :

$V=۰/۵\frac{m}{s}$

$t \quad ۴۰s$

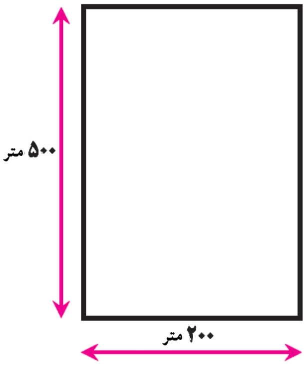
$s \quad ?$

$$V=\frac{s}{t}\Rightarrow s=V\times t\Rightarrow s=۰/۵\times۴۰\Rightarrow \boxed{s=۲۰m}$$



شکل ۲ــ۱۱

تمرین۲ــ مزرعه‌ای به اندازهٔ نشان داده شده در شکل باید شخم زده شود. اگر سرعت پیشروی تراکتور هنگام شخم زدن ۴ کیلومتر در ساعت باشد، با چشم پوشی از زمان دورزدن و با فرض این‌که شخم زدن با گاوآهن سه‌خیش دو طرفه با عرض کار ۱/۳ متر انجام می‌شود، کمترین زمان مورد نیاز برای شخم زدن این زمین بر حسب ساعت را برآورد کنید.



شکل ۳ــ۱۱

پاسخ :

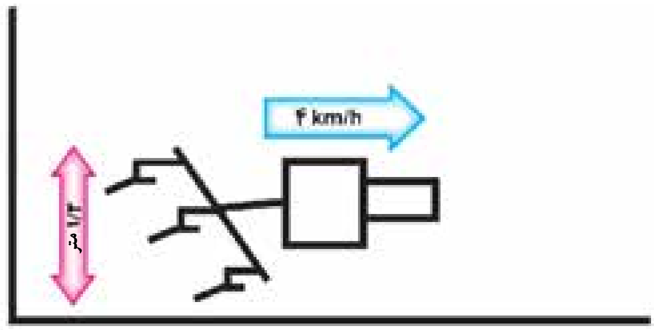
طول زمین ۵۰۰ m

عرض زمین ۲۰۰ m

عرض کار ۱/۳ m

$V = ۴\frac{km}{h}$

t ?h



شکل ۴ــ۱۱

$$s = ۵۰۰\,m \times \frac{۱\,km}{۱۰۰۰\,m} = ۰/۵\,km$$

زمان مورد نیاز برای پیمودن درازای زمین :

$$V = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{V} = \frac{۰/۵}{۴} \Rightarrow t = ۰/۱۲۵h$$

تعداد پیمایش زمین با تراکتور برای شخم کل زمین :

n عرض زمین ÷ عرض کار گاوآهن ⇒ n ۲۰۰ ÷ ۱/۳ ۱۵۴

کل زمان طی شده : $T = ۰/۱۲۵ \times ۱۵۴ = \boxed{T = ۱۹/۲۵h}$

کار در خانه (۱): عملیات کاشت در یک مزرعه به ابعاد ۶۵۰×۳۰۰ متر مربع قرار است با یک ردیف‌کار نیوماتیک ۴ ردیفه انجام شود. فاصلهٔ ردیف‌های کاشت ۷۵ سانتی‌متر و سرعت پیشروی تراکتور ۶ کیلومتر در ساعت در نظر گرفته شده است. با چشم‌پوشی از زمان لازم برای دور زدن، کمترین زمان لازم را، برای انجام عملیات کاشت در این مزرعه، بر حسب ساعت محاسبه کنید.

کار در خانه (۲) : تمرین‌های صفحهٔ ۵۰ و ۵۱ را پاسخ دهید.

۳ــ ۱۱ــ سرعت دورانی (صفحهٔ ۵۱)

از هنرجویان بخواهید تا چند مورد حرکت دورانی را، که در ماشین‌های کشاورزی یا اجزای آن‌ها وجود دارد، بیان کنند.

پرسش : اهمیت اندازه‌گیری یا محاسبهٔ سرعت دورانی در ماشین‌های کشاورزی را با یک نمونه بیان کنید.

پاسخ: سرعت دورانی در ماشین‌های کشاورزی و در مکانیزم‌هایی که دارای حرکت دورانی هستند کاربرد دارد. برای نمونه، دنباله‌بندهایی که نیروی مورد نیاز خود را از محور انتقال نیرو می‌گیرند یا ماشین‌هایی که توان مورد نیازشان از الکتروموتور تأمین می‌گردد. سرعت دورانی الکتروموتورها در دامنهٔ ویژه‌ای تعیین شده است و در انجام محاسبات برای ماشین‌هایی که در آن‌ها از الکتروموتور استفاده می‌شود، مورد نیاز است.

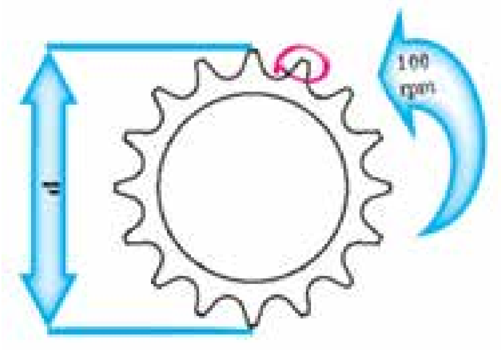
از هنرجویان بپرسید: «دور ویژهٔ محور انتقال نیرو در تراکتور MF ۲۸۵ چقدر است؟».

پس از پاسخ‌گویی چند هنرجو توضیح دهید: ۵۴۰ یا ۱۰۰۰ دور در دقیقه، عدد گفته شده معرف سرعت دورانی محور انتقال نیرو است. تعداد چرخشی که یک جسم گردان در ۱ دقیقه انجام می‌دهد **معرف سرعت دورانی** آن است که با n یا N مشخص می‌شود. یکای سرعت دورانی دور در دقیقه است که با rpm یا RPM یا $\frac{rev}{min}$ نشان داده می‌شود.

کار در کلاس: یک صفحهٔ مقوایی گرد را با یک میخ از مرکز مقوا روی دیوار قرار دهید. نقطه‌ای روی **محیط** دایره را با ماژیک علامت‌گذاری کنید. حال از هنرجویان بخواهید تا وقتی که شما صفحه را ۱۰ دور کامل می‌چرخانید، زمان را با ساعت یا زمان‌سنج اندازه‌گیری کنند. سپس از هنرجویان بخواهید سرعت دورانی صفحه را محاسبه کنند.

سرعت محیطی (صفحهٔ ۵۱)

شکل روبه‌رو را روی تخته رسم و سپس بیان کنید: «این چرخ زنجیر با قطر d با سرعت دورانی ۱۰۰ دور در دقیقه می‌چرخد».



شکل ۵ــ۱۱

توضیح دهید: اگر بخواهیم تعیین کنیم که دندهٔ نشان داده شده در شکل یا هر نقطهٔ روی جسم گردان چه مسافتی را در زمان مشخص می‌پیماید باید سرعت محیطی را محاسبه کنیم. سرعت محیطی یک جسم دوّار، سرعت نقطه‌ای را مشخص می‌کند که روی محیط آن جسم قرار دارد. یکای این سرعت مانند سرعت خطی است.

رابطهٔ ۲ــ۳ کتاب را روی تخته بنویسید و اجزای آن را شرح دهید.

$$V = \frac{d \times \pi \times n}{۱۰۰۰ \times ۶۰}$$

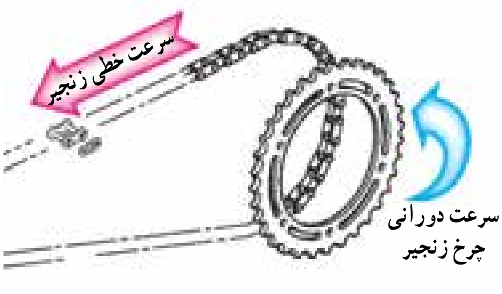
V : سرعت محیطی بر حسب متر بر ثانیه ($\frac{m}{s}$)

d : قطر بر حسب میلی‌متر (mm)

n : سرعت دورانی بر حسب تعداد دور در دقیقه (RPM)

شکل ۶ــ۱۱ را روی تخته رسم کنید و موارد زیر را با کمک آن شرح دهید.

« محاسبهٔ سرعت محیطی در کار با چرخ زنجیرها، چرخ دنده‌ها، چرخ تسمه‌ها و دیگر اجزای گردنده مورد نیاز است. برای نمونه، اگر بخواهید سرعت خطی یک زنجیر در حرکت را بیابید بیشتر باید سرعت محیطی چرخ زنجیر را محاسبه کنید. محاسبهٔ سرعت تسمهٔ نقاله نیز وابسته به سرعت محیطی است و بر پایهٔ محاسبه، سرعت دورانی الکتروموتور محرک آن انجام می‌شود.»



شکل ۶ــ۱۱

توضیح دهید : «در رابطه سرعت محیطی باید یادآور شد هر چه قطر بیشتر باشد اندازهٔ سرعت محیطی نیز بیشتر می‌شود. یعنی در دو دایرهٔ دوّار با سرعت دورانی مساوی، سرعت محیطی دایره‌ای بیشتر است که قطر بزرگ‌تری دارد. برای نمونه اگر در یک اتومبیل به جای چرخ‌های محرک آن، چرخ‌های با قطر بیشتر بسته شود با این که فشار زیادی به موتور وارد می‌شود ولی سرعت آن افزایش می‌یابد.»

اکنون مثال صفحهٔ ۵۲ کتاب را پاسخ دهید.

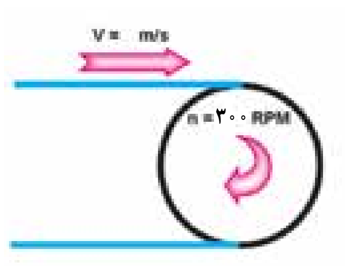
تمرین ۳ــ چرخ زنجیری با سرعت دورانی ۳۰۰ دور در دقیقه می‌چرخد اگر سرعت خطی زنجیر متصل به آن ۵ متر بر ثانیه باشد، اندازه قطر چرخ زنجیر را به دست آورید.

پاسخ :

n ۳۰۰RPM

$V=۵\frac{m}{s}$ $\qquad V=\frac{d\times\pi\times n}{۶۰۰۰۰}\Rightarrow d=\frac{۶۰۰۰۰\times V}{\pi\times n}=\frac{۶۰۰۰۰\times ۵}{۳/۱۴\times ۳۰۰}\Rightarrow d=۳۱۸/۵mm$

d ?



شکل ۷ــ۱

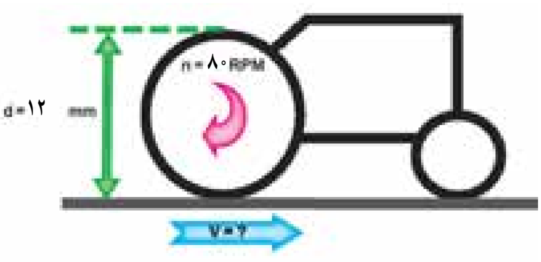
تمرین ۴ــ قطر چرخ عقب تراکتوری ۱۲۰ سانتی‌متر است و با سرعت دورانی ۸۰ دور در دقیقه می‌چرخد. سرعت پیشروی تراکتور را بر حسب کیلومتر در ساعت محاسبه کنید.

پاسخ :

d ۱۲۰۰ mm $\qquad V=\frac{d\times\pi\times n}{۶۰۰۰۰}=\frac{۱۲۰۰\times ۳/۱۴\times ۸۰}{۶۰۰۰۰}\Rightarrow \boxed{V=۵/۰۲۴\frac{m}{s}}$

n ۸۰ RPM

$V=?\ \frac{km}{h}$ $\qquad V=۵/۰۲۴\times\frac{۳۶۰۰}{۱۰۰۰}\Rightarrow V=\boxed{۱۸/۱\frac{km}{h}}$



شکل ۸ــ۱۱

کاردرخانه (۲) : سرعت خطی تسمهٔ یک نقالهٔ تسمه‌ای ۱/۵ متر بر ثانیه است. اگر قطر پولی محرک ۴۰ سانتی‌متر باشد، سرعت دورانی پولی محرک را محاسبه کنید.

از هنرجویان بخواهید تمرین‌های صفحهٔ ۵۲ کتاب را به منظور کار در خانه پاسخ دهند.