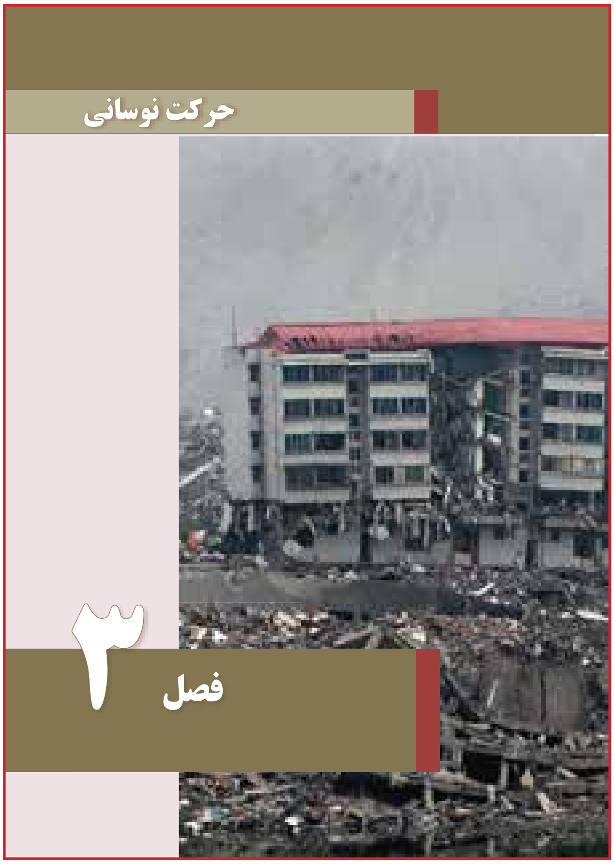
فصل سوم

حرکت نوسانی



هاینریش هرتز (۱۸۹۴ـ۱۸۵۷م) در هامبورگ آلمان زاده شد. در جوانی به یادگیری زبان و علوم انسانی علاقه داشت، اما وقتی پدربزرگ‌اش وسیله‌هایی در اختیار او گذاشت به سوی علم کشیده شد. او در آزمایشگاه کوچکی که در خانهٔ خود مجهز کرده بود، آزمایش‌های ساده‌ای انجام داد. در سال ۱۸۷۸، پس از اتمام دورهٔ دبیرستان (و یک سال خدمت نظام) به‌طور جدّی به مطالعهٔ ریاضیات و فیزیک در دانشگاه برلین پرداخت. هرتز در سال ۱۸۸۲ تمام کوشش خود را وقف مطالعهٔ خاصیت الکترومغناطیس کرد؛ از جمله کار جدید ماکسول که هنوز تردیدهایی دربارهٔ آن وجود داشت. دو سال بعد آزمایش‌های مشهور خود را دربارهٔ موج‌های الکترومغناطیسی آغاز کرد. او در جریان کار خود اثر فوتوالکتریک را که تأثیری ژرف در فیزیک جدید داشت کشف نمود اما نتوانست توجیهی برای آن ارائه نماید.

هدف‌های آموزشی فصل

انتظار می‌رود دانش‌آموزان با خواندن این فصل با موارد زیر آشنا شوند :

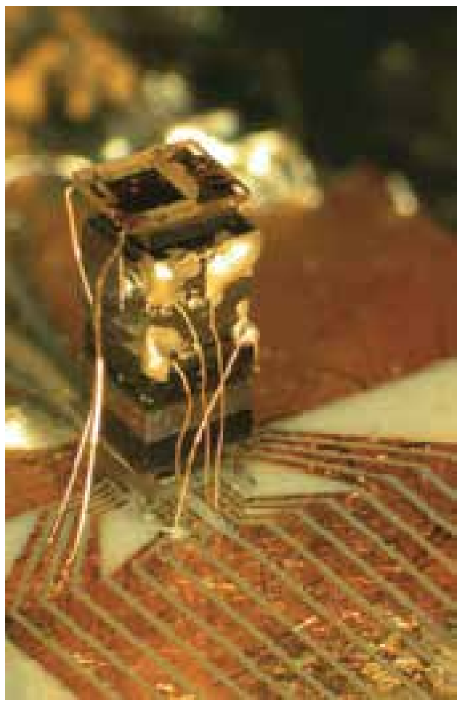
- ویژگی‌های نوسان.
- توصیف نوسان بر حسب دامنه، دورهٔ تناوب، بسامد و بسامد زاویه‌ای.
- نحوهٔ محاسبه‌های مربوط به نوع مهمی از نوسان، یعنی حرکت هماهنگ ساده.
- استفاده از مفهوم انرژی برای تحلیل حرکت هماهنگ ساده.
- تحلیل حرکت یک آونگ ساده.
- آشنایی با مفهوم تشدید و ویژگی‌های آن.

حرکت نوسانی

راهنمای تدریس : از آنجا که درک درست مفاهیم این فصل زیربنایی برای درک مفاهیم سه فصل بعدی این کتاب است، ضرورت دارد که زمینه‌های یادگیری مفاهیم حرکت نوسانی یا حرکت تناوبی را با مثال‌ها و فعالیت‌های مختلف برای دانش‌آموزان فراهم کنید.

افزون بر مثال‌هایی که در مقدمهٔ کتاب برای معرفی حرکت نوسانی به آنها اشاره شده است می‌توانید به مثال‌هایی که در ادامه آمده است نیز اشاره کنید. حرکت رفت و برگشتی پیستون‌ها در موتور ماشین، نوسان آونگ یک ساعت قدیمی، ارتعاش‌های صوتی تولید شده توسط یک فلوت یا لولهٔ ارگ، ارتعاش یک بلور کوارتز در ساعت بارها و بارها خودشان را تکرار می‌کنند و **حرکت** آن‌ها **نوسانی** یا **تناوبی** نامیده می‌شود.

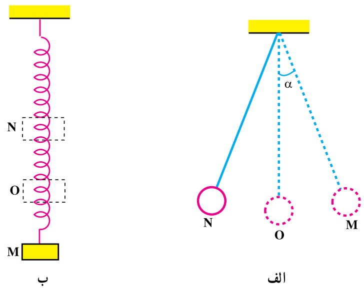
شکل ۱ کوچک‌ترین ساعت اتمی جهان را نشان می‌دهد که در مؤسسهٔ ملی استانداردها و فناوری آمریکا نگهداری می‌شود. در این ساعت، اتم‌های سزیم در هر ثانیه ۹/۲ میلیارد مرتبه نوسان می‌کنند. ابعاد این ساعت حدود یک دانهٔ برنج است و با دقت ۱ در ۱۰ میلیارد ــ یا خطای کمتر از 1s در ۳۰۰ سال ــ کار می‌کند.



شکل ۱

حرکت نوسانی

نگاهی به فصل : گردش زمین به دور خورشید، گردش ماه به دور زمین، ضربان قلب انسان، ارتعاش تارهای کمانچه یا تار و سه‌تار، بالا و پایین رفتن تاب بازی، پیدایش فصل‌های سال، طلوع و غروب خورشید، یا حرکت یک آونگ ساده (شکل ۳ــ۱ ــ الف)، حرکت وزنه‌ای که به یک فنر متصل است (شکل ۳ــ۱ــ ب) و مثال‌های بسیار دیگری مانند اینها، حرکت‌های دوره‌ای هستند که با گذشت زمان بارها تکرار می‌شوند. در حرکت‌های دوره‌ای، متحرک پس از طی زمان معینی به وضعیت اولیه برمی‌گردد و حرکت خود را از نو آغاز می‌کند. در این فصل پس از معرفی پدیده‌های دوره‌ای به توصیف حرکت هماهنگ ساده می‌پردازیم. زیرا شناخت و بررسی این حرکت، پایه و اساس مناسبی برای درک امواج و انتشار آنها فراهم می‌کند.



شکل ۳ــ۱

۳ــ۱ــ حرکت هماهنگ ساده

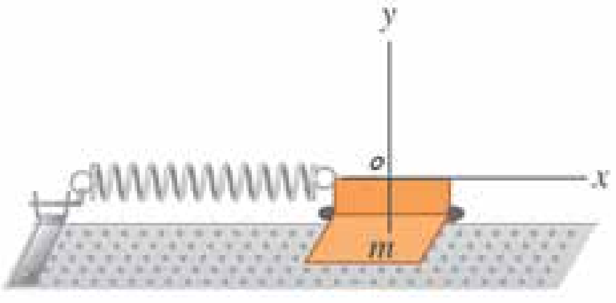
یک حرکت نوسانی را **هماهنگ ساده** می‌نامیم وقتی مسیر رفت و برگشت متحرک روی یک پاره‌خط حول نقطه‌ای واقع در وسط آن باشد. برای مثال، حرکت آونگ (شکل ۳ ــ ۱ــ الف)، وقتی زاویهٔ α خیلی کوچک

۷۴

۳ــ۱ــ حرکت هماهنگ ساده

راهنمای تدریس : معمولاً در بیشتر کتاب‌های درسی برای توصیف نوسان، روی دو مثال ساده شامل دستگاه‌هایی که می‌توانند دستخوش حرکت تناوبی شوند متمرکز می‌شوند : سامانهٔ فنر ــ وزنه و آونگ، در این کتاب نیز از همین دو مثال ساده برای بررسی و توصیف حرکت نوسانی استفاده شده است (به شکل ۳ــ۱ کتاب درسی اشاره شود.)

شکل ۲ نمونهٔ آزمایشگاهی یک سامانهٔ فنر ــ وزنه را نشان می‌دهد که در آن جسمی به جرم m روی یک ریل هوایی بدون اصطکاک ساکن است به طوری که **تنها** می‌تواند در امتداد محور x حرکت کند. جرم فنر ناچیز است و انتهای چپ فنر ثابت شده و انتهای راست آن به جسم وصل شده است. نیروی فنر تنها نیروی افقی است که به جسم وارد می‌شود و برایند نیروهای عمودی تکیه‌گاه و گرانشی همواره صفرند.



شکل ۲

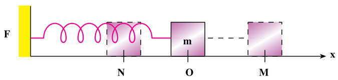
دوره و بسامد : دانش‌آموزان باید توجه کنند که منظور از دوره، درواقع دورهٔ نوسان یا دورهٔ تناوب است و بنا به تعریف زمان یک نوسان کامل یا چرخهٔ کامل است. این کمیت همواره مثبت است. بسامد نیز تعداد چرخه‌ها در یکای زمان است و کمیتی همواره مثبت است.

باشد، به گونه‌ای که بتوان تانژانت و سینوس آن را برابر گرفت و همچنین بالا و پایین رفتن وزنهٔ آویخته به فنر (شکل ۳ـ۱ـ ب). در این دو حرکت، متحرک، دربازه‌های زمانی یکسان، از ابتدای پاره خط، یعنی از نقطهٔ M به نقطهٔ N می‌رود و برمی‌گردد و به این ترتیب حول نقطهٔ O واقع در وسط پاره خط نوسان می‌کند. از این پس دستگاهی را که دارای حرکت هماهنگ ساده است نوسانگر هماهنگ ساده می‌نامیم. نوسانگر وزنه ـ فنر در شکل ۳ـ۱ـ ب الگوی مناسبی برای بررسی حرکت نوسانی ساده است. ابتدا برخی مفهوم‌ها را در این حرکت معرفی می‌کنیم.

دوره و بسامد : در حرکت هماهنگ ساده بازهٔ زمانی بین دو وضعیت یکسان و متوالی را **دوره** می‌نامیم. به عبارت دیگر دوره، زمان یک نوسان (زمان یک رفت و برگشت به وضع قبلی) است و با T نشان داده می‌شود. همچنین تعداد دوره‌ها یا تعداد نوسان‌ها را در یک ثانیه **بسامد** می‌نامیم و آن را با f نشان می‌دهیم. یکای بسامد در SI، s^{-1} است که هرتز (Hz) نامیده می‌شود. با توجه به تعریف دوره، معلوم می‌شود که بسامد وارون دوره است :

$$f=\frac{1}{T} \qquad (۳ـ۱)$$

دامنهٔ نوسان : جسمی به جرم m را در نظر بگیرید که به سر آزاد یک فنر متصل است و می‌تواند در راستای محور x، روی یک سطح افقی که اصطکاک آن ناچیز است، جابه‌جا شود (شکل ۳ ـ۲). در حالتی که فنر طول عادی خود را دارد برآیند نیروهای وارد به جسم صفر و در نتیجه جسم در حال تعادل است.



شکل ۳ـ۲

حال اگر مبدأ محور مختصات، یعنی نقطهٔ O، را منطبق بر مکان جسم در حالت تعادل اختیار نماییم و سپس جسم را تا نقطهٔ M به سمت راست بکشیم و سپس رها کنیم، جسم حول وضع تعادلش (نقطهٔ O) با حرکت هماهنگ ساده شروع به نوسان می‌کند. در ضمن نوسان جسم، فاصلهٔ آن از مبدأ تغییر می‌کند، امّا هیچ‌گاه فاصلهٔ آن از مبدأ بیش از OM یا ON نمی‌شود. این بیشترین فاصلهٔ نوسانگر از مبدأ را **دامنه** می‌نامیم و معمولاً آن‌را با A نشان می‌دهیم.

۷۵

تمرین‌های پیشنهادی

نوعی دستگاه که برای تشخیص پزشکی مورد استفاده قرار می‌گیرد در بسامد ۶/۷ MHz کار می‌کند. هر نوسان چه مدت طول می‌کشد؟

پاسخ : $۱/۵\times ۱۰^{-۷}$s یا ۰/۱۵ μs

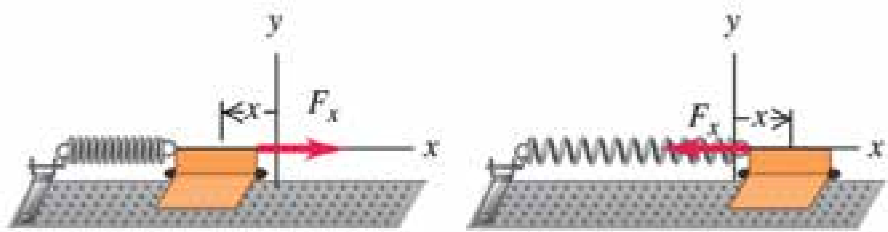
سیم پیانویی عمدتاً با ارتعاش در ۲۲۰Hz نت میانی A را به صدا درمی‌آورد.

الف) دورهٔ تناوب سیم را حساب کنید.

ب) دورهٔ تناوب را برای یک خوانندهٔ سوپرانو که یک اکتاو بالاتر از A، که دو برابر بسامد سیم پیانو است آواز می‌خواند، به دست آورید.

پاسخ : الف) ۴/۵۴ ms، ب) ۲/۲۷ ms

دامنهٔ نوسان : دامنهٔ نوسان که با A نشان داده می‌شود، مقدار بیشینهٔ جابه‌جایی از تعادل، یعنی مقدار بیشینه $|x|$ است (شکل ۳). این کمیت همواره مثبت است و برای یک فنر آرمانی گسترهٔ کل حرکت نوسانی ۲A است.



شکل ۳

تمرین پیشنهادی

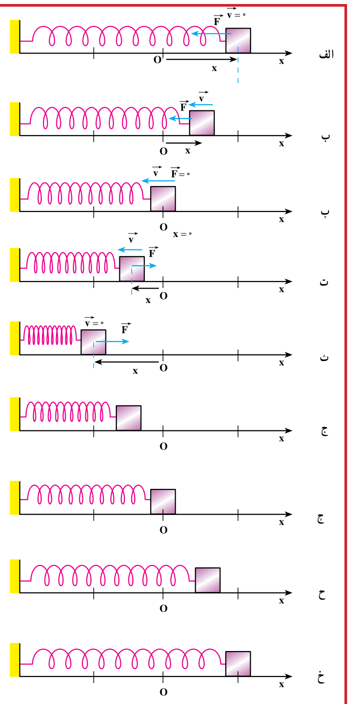
اگر جسمی که به فنری بسته شده است روی یک سطح افقی بدون اصطکاک جابه‌جا شده و آنگاه با سرعت اولیهٔ صفر رها شود، نوسان خواهد کرد. اگر جسم $۰/۱۲m$ از وضع تعادلش جابه‌جا شده و با سرعت اولیهٔ صفر رها شود، آنگاه پس از $۰/۸\ s$ جابه‌جایی آن در طرف مخالف به $۰/۱۲m$ می‌رسد و در طی این مدت یک بار از وضع تعادل می‌گذرد. دامنه، دورهٔ تناوب و بسامد حرکت را پیدا کنید.

پاسخ : $A=۰/۱۲m$ ، $T=۱/۶s$ ، $f=۰/۶۲۵s$

نیروی بازگرداننده : از آنجا که دانش‌آموزان در سال دوم با قانون هوک آشنا شده‌اند، ضمن یادآوری این قانون برای دانش‌آموزان، توجه آنها را به این نکتهٔ مهم جلب کنید که در ساده‌ترین نوع نوسان نیز نیروی بازگرداننده به‌طور مستقیم با جابه‌جایی از تعادل x متناسب است. در هر دو سوی وضع تعادل، F_x و x همواره علامت‌های مخالف دارند و نیروی بازگرداننده که توسط یک فنر آرمانی وارد می‌شود بنابر قانون هوک عبارت است از :

$$F=-kx$$

در این مرحله توصیه می‌شود نمودار نیروی بازگرداننده برحسب جابه‌جایی را رسم کنید (شکل ۴) و به تبیین **حرکت هماهنگ ساده** بپردازید.



شکل ۳ــ۳

۷۷

نیروی بازگرداننده : در شکل ۳ــ۲، جهت نیروی فنر همواره به گونه‌ای است که می‌خواهد جسم را به حالت تعادل (نقطهٔO) برگرداند، این نیرو، **نیروی بازگرداننده** نامیده می‌شود. نیروی بازگردانندهٔ فنر با تغییر طول فنر متناسب است و از رابطهٔ زیر، که به قانون هوک معروف است، به‌دست می‌آید :

$$F=-kx \qquad (۳ــ۲)$$

در این رابطه ، x تغییر طول فنر، F نیروی بازگردانندهٔ فنر و k ثابت تناسب است که به ویژگی‌های فنر بستگی دارد و آن را ثابت نیروی فنر می‌نامیم. یکای k در SI نیوتون برمتر (N/m) است. علامت منفی در رابطهٔ ۳ــ۲ نشان می‌دهد که جهت نیروی بازگردانندهٔ فنر همواره خلاف جهت بردار مکان جسم است. هر دستگاهی که نیروی بازگردانندهٔ آن از قانون هوک پیروی کند، حرکت هماهنگ ساده خواهد داشت.

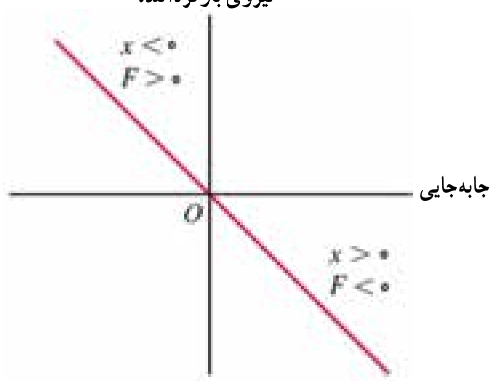
حال اثر نیروی بازگرداننده را در نوسانگر وزنه ــ فنر، در یک دوره، بررسی می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل ۳ــ۳ــ الف تا پ دیده می‌شود، اگر جسم را پس از خارج کردن از وضع تعادل رها کنیم، تحت اثر نیروی بازگرداننده به‌طرف وضع تعادل خود (نقطهٔ O) برمی‌گردد و پس از رسیدن به نقطهٔ O، به سبب داشتن انرژی جنبشی، به حرکتش به سمت چپ ادامه می‌دهد (شکل پ). از این لحظه به بعد، مکان و سرعت جسم منفی و نیروی بازگرداننده در جهت محور x و مثبت است. بنابه قانون دوّم نیوتون، چون شتاب با نیروی برآیند هم جهت است در این مرحله از حرکت، شتاب نیز مثبت است. اما چون سرعت آن منفی است حرکت جسم کند شونده است (شکل ت)؛ یعنی از سرعت آن کاسته می‌شود و در یک لحظه به صفر می‌رسد. در این لحظه فنر بیشترین فشردگی یا تغییر طول را دارد و نیروی بازگرداننده بیشینه است (شکل ث).

فعالیت ۳ــ۱

دیدیم در لحظه‌ای که فنر بیشترین فشردگی را پیدا می‌کند سرعت نوسانگر به صفر می‌رسد. اکنون با توجه به شکل‌های ۳ــ۳ــ ج تا خ نیروی وارد بر نوسانگر و همچنین مکان، سرعت و شتاب نوسانگر را پس از لحظهٔ مذکور بررسی کنید.

۷۶



شکل ۴

مثال‌های مفهومی پیشنهادی

الف) علامت منفی در رابطهٔ $F=-kx$ به چه معناست؟

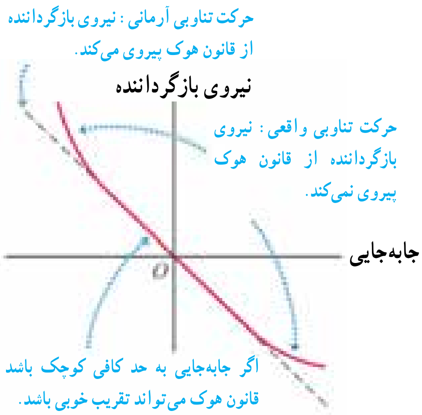
ب) آیا در حرکت هماهنگ ساده می‌توان از معادله‌های حرکت با شتاب ثابت استفاده کرد؟

پاسخ : الف) علامت منفی بدین معناست که شتاب و جابه‌جایی همواره دارای جهت مخالف‌اند.

ب) چون بزرگی نیرو با جابه‌جایی متناسب است، شتاب ثابت نیست و دانش‌آموزان باید توجه کنند که حتی فکر استفاده از معادله‌های حرکت با شتاب ثابت را در بررسی حرکت هماهنگ ساده نکنند!

چرا بررسی حرکت هماهنگ ساده مهم است؟

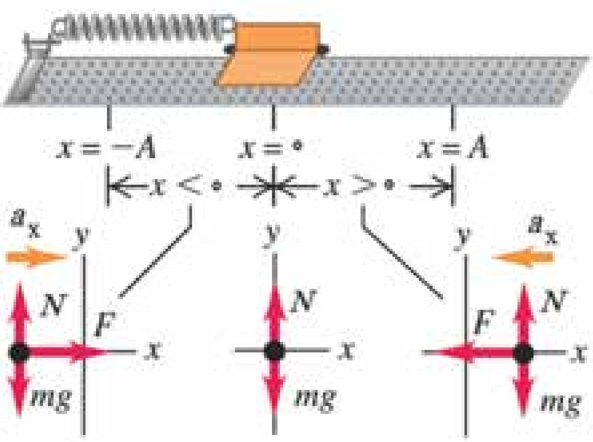
پاسخ : هرچند بیشتر حرکت‌های تناوبی، هماهنگ ساده نیستند و بستگی نیروی بازگرداننده به جابه‌جایی رابطهٔ پیچیده‌تری نسبت به رابطهٔ $F=-kx$ دارد، اما در بسیاری دستگاه‌ها، چنانچه جابه‌جایی به حد کافی کوچک باشد، نیروی بازگرداننده تقریباً با جابه‌جایی متناسب و از قانون هوک پیروی می‌کند (شکل ۵). یعنی اگر دامنه به قدر کافی کوچک باشد، نوسان‌های چنین دستگاه‌هایی تقریباً هماهنگ ساده‌اند و به این ترتیب از حرکت هماهنگ ساده (SHM) می‌توان به عنوان مدلی تقریبی برای بسیاری از حرکت‌های تناوبی متفاوت استفاده کرد.



شکل ۵

نمودار جسم آزاد یک نوسانگر هماهنگ ساده را در سه وضعیت، مربوط به وضع تعادل و جابه‌جایی‌های بیشینه، رسم کنید.

پاسخ : در شکل ۶ نمودار جسم آزاد نوسانگر رسم شده است. توجه کنید که شتاب نوسانگر همواره در جهت نیروی بازگرداننده است و در مرکز تعادل نیروی بازگرداننده صفر است.



شکل ۶

فعالیت ۳ـ۱

پاسخ :

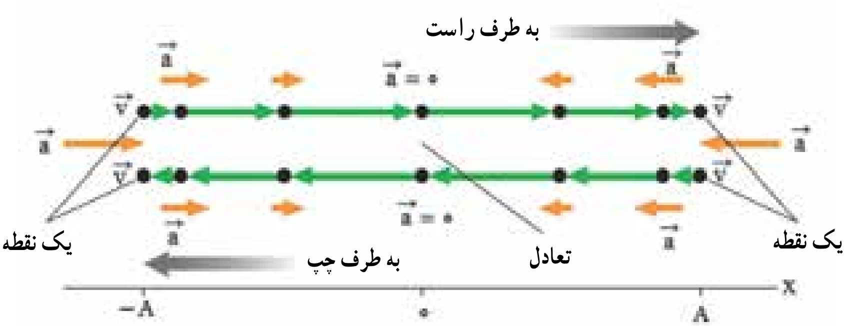
در شکل ۳ــ۳ ج : سرعت، شتاب و نیروی بازگرداننده هرسه به سمت راست هستند و مقدار x در حال کاهش است. همچنین نیرو و شتاب در حال کاهش و سرعت در حال افزایش است.

در شکل ۳ــ۳ چ : نیرو، شتاب و جابه‌جایی صفرند و سرعت دارای مقدار بیشینه و جهت آن به طرف راست (جهت مثبت محور x) است.

در شکل ۳ــ۳ ح : نیرو و شتاب در حال افزایش و جهت آنها به طرف مرکز تعادل است. سرعت در جهت مثبت x و مقدار آن در حال کاهش است.

در شکل ۳ــ۳ خ : سرعت نوسانگر به‌طور لحظه‌ای صفر و نیروهای شتاب و جابه‌جایی بیشینه‌اند. همچنین جهت نیرو و شتاب به طرف مرکز تعادل است (مشابه شکل ۳ــ۳ الف).

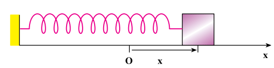
در نمودار شکل ۷، نحوهٔ تغییر کمیت‌های، $\vec{a}$ و $\vec{v}$ در حرکت نوسانی ساده نشان داده شده است.



شکل ۷

۳ــ۲ــ معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده

یک نوسانگر را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۳ــ۴ در فاصلهٔ x از وضع تعادل قرار دارد.



شکل ۳ــ۴

بنابه رابطهٔ ۳ــ۲ نیروی وارد بر وزنه در این لحظه $F=-kx$ است. اگر جرم وزنه m باشد بنابه قانون دوّم نیوتون داریم :

$$a=\frac{F}{m}$$

$$a=-\frac{k}{m}x \qquad (۳ــ۳)$$

بنابه آنچه در فصل ۱ دیدیم، شتاب مشتق دوم مکان نسبت به زمان است، یعنی :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x$$

بنابراین $x=f(t)$ باید به صورتی باشد که مشتق دوم آن نسبت به زمان، با علامت منفی، با x متناسب باشد. با توجه به اینکه تابع سینوسی، که در درس ریاضی خوانده‌اید، همین ویژگی را دارد، معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده باید به صورت زیر باشد.[1]

$$x=A\sin\omega t \qquad (۳ــ۴)$$

اگر از رابطهٔ ۳ــ۴ دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{dx}{dt}=A\omega\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t$$

با توجه به رابطهٔ ۳ــ۴ می‌توان نوشت :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$$

۱ــ در برنامهٔ درسی این کتاب همواره فرض می‌شود که نوسانگر در مبداء زمان در مبداء مکان بوده و در جهت مثبت محور x در حال حرکت است.

۷۸

از مقایسهٔ رابطهٔ اخیر با رابطهٔ ۳ــ۳ نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$\omega^2=\frac{k}{m}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۳ــ۵)$$

ω را **بسامد زاویه‌ای** می‌نامیم. یکای بسامد زاویه‌ای رادیان بر ثانیه است. در رابطهٔ ۳ــ۴، x مکان متحرک در لحظهٔ t و A دامنه نوسان است؛ (چرا؟). همچنین $\varphi=\omega t$ فاز حرکت در لحظهٔ t نامیده می‌شود. اگر در لحظهٔ t_1 فاز حرکت :

$$\varphi_1=\omega t_1$$

و در لحظهٔ t_2 فاز حرکت

$$\varphi_2=\omega t_2$$

باشد، تغییر فاز بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 برابر است با :

$$\Delta\varphi=\omega t_2-\omega t_1=\omega(t_2-t_1)$$

یا

$$\Delta\varphi=\omega\Delta t \qquad (۳ــ۶)$$

در رابطهٔ ۳ــ۶ اگر $\Delta t=1s$ باشد $\Delta\varphi=\omega$ می‌شود. یعنی بسامد زاویه‌ای (ω) تغییر فاز در هر ثانیه است.

رابطهٔ بسامد زاویه‌ای و دورهٔ‌تناوب : چون دورهٔ تناوب تابع سینوسی، 2π است باید در هر دوره (یعنی در زمان T) فاز به اندازهٔ 2π تغییر کند، بنابراین، با توجه به رابطهٔ ۳ــ۶ می‌توان چنین نوشت :

$$\Delta\varphi=\omega T=2\pi$$

و از آنجا

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f \qquad (۳ــ۷)$$

اکنون با توجه به رابطه‌های ۳ــ۵ و ۳ــ۷ رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (۳ــ۸)$$

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۳ــ۹)$$

۷۹

۳ــ۲ــ معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده

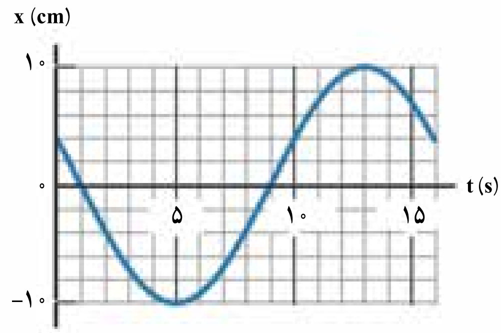
راهنمای تدریس : تا اینجا دانش‌آموزان باید به‌خوبی متوجه این موضوع شده باشند که هرگاه نیروی بازگرداننده به‌طور مستقیم باجابه‌جایی از وضع تعادل متناسب باشد، نوع نوسان حرکت هماهنگ ساده است. با تلفیق قانون هوک و قانون دوم نیوتون به استخراج و بررسی معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده بپردازید. توجه دانش‌آموزان را به علامت منفی در رابطهٔ $a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x$ بنمایید و به آنها گوشزد کنید که در حرکت هماهنگ ساده شتاب و جابه‌جایی **همواره** دارای جهت مخالف‌اند. افزون بر این، چون شتاب با x متناسب است، مقدار آن نیز ثابت نیست.

تمرین پیشنهادی

جابه‌جایی جسم در حال نوسانی برحسب تابعی از زمان در شکل ۸ نشان داده شده است. بسامد، دامنه، دورهٔ تناوب و بسامد زاویه‌ای این حرکت چقدر است؟

پاسخ : T=۱۶s ، f=۰/۰۶۲۵ Hz ،

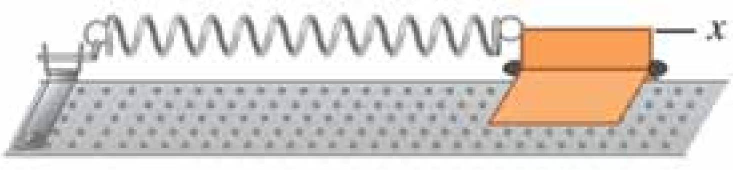
A = ۱۰cm ، ω = ۰/۳۹۳ rad/s



شکل ۸

مثال پیشنهادی

در یک آزمایشگاه فیزیک، سُره‌ای به جرم ۰/۲ کیلوگرم را روی مسیری از هوا به یک سر فنری آرمانی با جرم ناچیز می‌بندیم و آن را به نوسان درمی‌آوریم (شکل ۹). زمان سپری شده برای وضعی که سره اولین بار و دومین بار از نقطهٔ تعادل می‌گذرد ۲/۶ ثانیه است. ثابت نیروی فنر را پیدا کنید.



شکل ۹

حل : دورهٔ تناوب برابر T = ۲(۲/۶s) = ۵/۲s است. از رابطه این $k=m\omega^2$ داریم :

$$k=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m=\left(\frac{2\pi}{5/2\,s}\right)^2(0/2\,kg)=0/292\ N/m$$

تمرین پیشنهادی

وقتی جسمی به جرم نامعلوم به فنری آرمانی با ثابت نیروی $120\,N/m$ وصل شده باشد با بسامد $6Hz$ ارتعاش می‌کند (شکل ۱۰). مطلوب است :

الف) دورهٔ تناوب حرکت

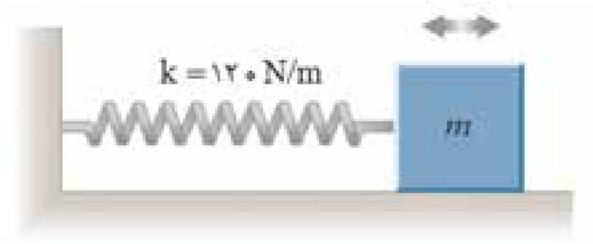
ب) بسامد زاویه‌ای

پ) جرم جسم

پاسخ : الف) $T=0/167s$

ب) $\omega=37/7\ rad/s$

پ) $m=0/0844kg$



شکل ۱۰

تمرین پیشنهادی

سیم گیتاری با بسامد $440Hz$ ارتعاش می‌کند. نقطه‌ای در مرکز سیم با دامنهٔ $3mm$ و زاویهٔ فاز صفر به طور هماهنگ ساده نوسان می‌کند. معادله‌ای برای وضعیت مرکز سیم برحسب تابعی از زمان بنویسید.

پاسخ :

$$x=(3\times10^{-3}m)\sin[(2/76\times10^{3}rad/s)t]$$

رابطهٔ ۳ــ۸ نشان می‌دهد که دوره به ویژگی‌های فیزیکی نوسانگر بستگی دارد؛ چنانکه اگر وزنه را تغییر دهیم (m تغییر کند) یا فنر را عوض کنیم (k تغییر کند) دوره و در نتیجه بسامد نوسان‌های دستگاه، تغییر می‌کند. از طرف دیگر دوره و بسامد به دامنه بستگی ندارد؛ به همین دلیل گفته می‌شود که بسامد یک نوسانگر از ویژگی‌های ساختاری آن نوسانگر است و بسامد طبیعی آن نامیده می‌شود.

مثال ۳ــ۱

معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت زیر است.

$$x=0/05\sin 60\pi t$$

الف) دامنه، دوره و بسامد این حرکت چه مقدار است؟

ب) مکان نوسانگر را در لحظهٔ $\frac{1}{360}$ ثانیه به‌دست آورید.

پاسخ

الف) باتوجه به معادلهٔ ۳ــ۴ و رابطهٔ ۳ــ۷ نتایج زیر حاصل می‌شود.

دامنه : $A=0/05m$

دوره : $\omega=\frac{2\pi}{T}=60\pi\Rightarrow T=\frac{1}{30}s$

بسامد : $f=\frac{1}{T}=30Hz$

ب) $x=0/05\sin 60\pi\times\frac{1}{360}\Rightarrow x=0/05\sin\frac{\pi}{6}=0/025m$

مثال ۳ــ۲

دامنهٔ نوسان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای $2cm$ و بسامد آن $20Hz$ است. معادلهٔ حرکت آن را بنویسید.

پاسخ $A=0/02m\ ,\ f=20Hz\ ,\ \omega=2\pi f\Rightarrow\omega=40\pi\ rad/s$

$x=A\sin\omega t\Rightarrow x=0/02\sin 40\pi t$

۸۰

مثال‌های پیشنهادی

توزین فضانوردان : از این روش درواقع برای «وزن کردن» فضانوردان در فضا استفاده می‌شود. یک صندلی ۴۲/۵ کیلوگرمی به فنری بسته شده و می‌تواند نوسان کند. وقتی صندلی خالی است، یک نوسان کامل $1/3s$ طول می‌کشد. درحالی که وقتی فضانوردی روی آن نشسته و پاهای او بالای سطح است، یک نوسان کامل صندلی $2/54\ s$ به طول می‌انجامد (شکل ۱۱). جرم فضانورد چقدر است؟

حل : به ازای $m=42/5kg$ و $T=1/3s$ داریم :

$$k=m\omega^2=\frac{4\pi^2m}{T^2}=\frac{4\pi^2(42/5kg)}{(1/3s)^2}=993\ N/m$$

به این ترتیب جرم فضانورد و صندلی برابر است با :

$$m = \frac{kT'^{۲}}{۴\pi^{۲}} = \frac{(۹۹۳\,N/m)(۲/۵۴s)^{۲}}{۴\pi^{۲}} = ۱۶۲kg$$

$$\text{جرم فضانورد} = ۱۶۲kg - ۴۲/۵kg = ۱۲۰kg$$

شکل ۱۱

یک بستهٔ سنگین به جرم ۸kg را روی ترازوی آشپزخانه (که یک ترازوی فنری است، شکل ۱۲) قرار داده‌ایم. پیش از این که ترازو به حال تعادل درآید، متوجه می‌شویم که عقربهٔ آن چندین بار با دورهٔ تناوب ۰/۴ s طول موضع تعادل نوسان می‌کند. ضریب ثابت فنر درونی ترازوی آشپزخانه چقدر است؟

حل : جرم ۸kg همراه با فنر درونی ترازو یک دستگاه جرم ــ فنر تشکیل می‌دهند و می‌توانیم رابطهٔ $k=m\omega^{۲}$ را در موردشان به کار ببریم. داریم :

$$k = \frac{۴\pi^{۲}m}{T^{۲}} = ۴\pi^{۲} \times \frac{۸kg}{(۰/۴s)^{۲}} = ۲۰۰۰\ N/m$$

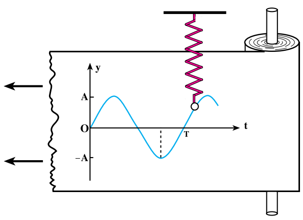
شکل ۱۲

رسم نمودار یک نوسانگر هماهنگ ساده

راهنمای تدریس : در این قسمت به طور عملی می‌توان با ابزار ساده‌ای به دانش‌آموزان نشان داد که نمودار حرکت نوسانی یک دستگاه جرم ــ فنر به‌صورت سینوسی است. از آنجا که تا اینجا فقط به نوسان دستگاه جرم ــ فنر در حالت افقی اشاره شده است، شاید بهتر باشد از روشی که در شکل ۱۳ نشان داده شده است استفاده شود.

در برخی از کتاب‌های درسی حرکت هماهنگ ساده را به کمک حرکت دایره‌ای یکنواخت بررسی می‌کنند. شکل ۱۴ نمایی از یک قرص افقی به شعاع A را نشان می‌دهد (دایرهٔ مرجع) که گلوله‌ای به لبهٔ آن وصل شده است. قرص با سرعت زاویه‌ای ثابت ω (که برحسب rad/s اندازه‌گیری می‌شود) می‌چرخد، پس گلوله حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد. یک باریکهٔ افقی نور به

رسم نمودار یک نوسانگر هماهنگ ساده : یکی از روش‌های نمایش نمودار مکان ــ زمان حرکت نوسانگر هماهنگ ساده در شکل ۳ــ۵ نشان داده شده است.



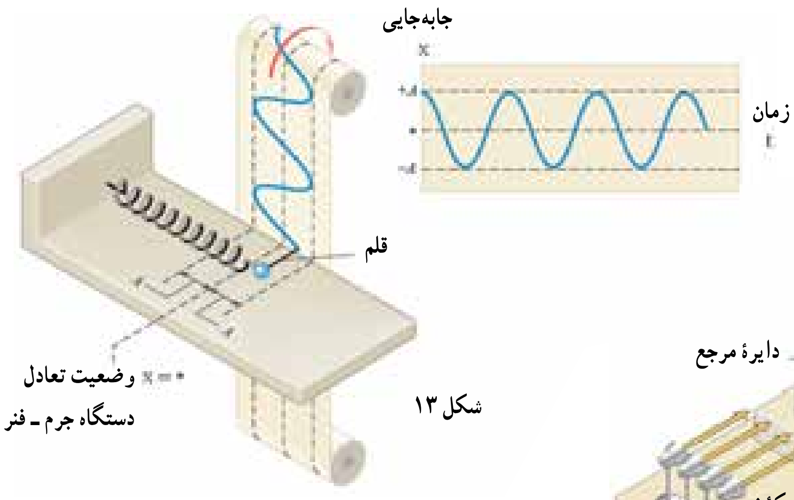
شکل ۳ــ۵

در این روش نوار کاغذی روی استوانه‌ای که در امتداد قائم قرار دارد پیچیده شده است. استوانه می‌تواند به‌طور یکنواخت حول محورش بچرخد. نوسانگر وزنه ــ فنر در امتداد قائم طوری نصب شده است که وزنهٔ متصل به آن به‌وسیلهٔ نوک یک مداد با نوار کاغذی در تماس است. اگر نوسانگر ساکن باشد و نوار کاغذی به سمت چپ کشیده شود نوک مداد یک خط افقی (محور زمان) روی نوار ثبت می‌کند. اگر نوار ساکن باشد و نوسانگر را به نوسان درآوریم نوک مداد، خطی در امتداد قائم رسم می‌کند، که نشان‌دهندهٔ جابه‌جایی نوسانگر است. حال اگر نوار کاغذی را با سرعت ثابت بکشیم و در همان حال نوسانگر را به نوسان واداریم نمودار حرکت هماهنگ ساده که یک نمودار سینوسی است رسم می‌شود، محور افقی، زمان حرکت و محور قائم، مکان متحرک را در هر لحظه نشان می‌دهد.

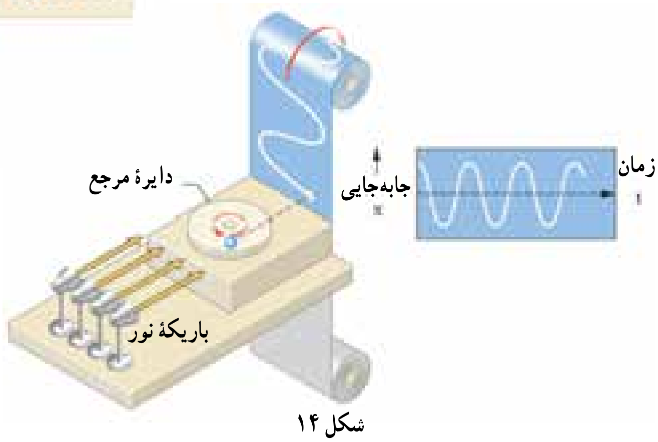
شما در درس ریاضی با چگونگی رسم نمودار تابع سینوسی آشنا شده‌اید. به همان ترتیب هم می‌توان نمودار حرکت هماهنگ ساده را، به کمک نقطه‌یابی، رسم کرد. برای این کار نقطه‌های بیشینه، کمینه و محل برخورد نمودار را با محور زمان معلوم نموده و با مشخص کردن آنها در صفحهٔ مختصات x ــ t نمودار را رسم می‌کنیم. به مثال‌هایی در این باره توجه کنید :

۸۱

قرص چرخان می‌تابد و سایهٔ گلوله روی پرده‌ای متحرک می‌افتد.



شکل ۱۳



شکل ۱۴

مثال پیشنهادی

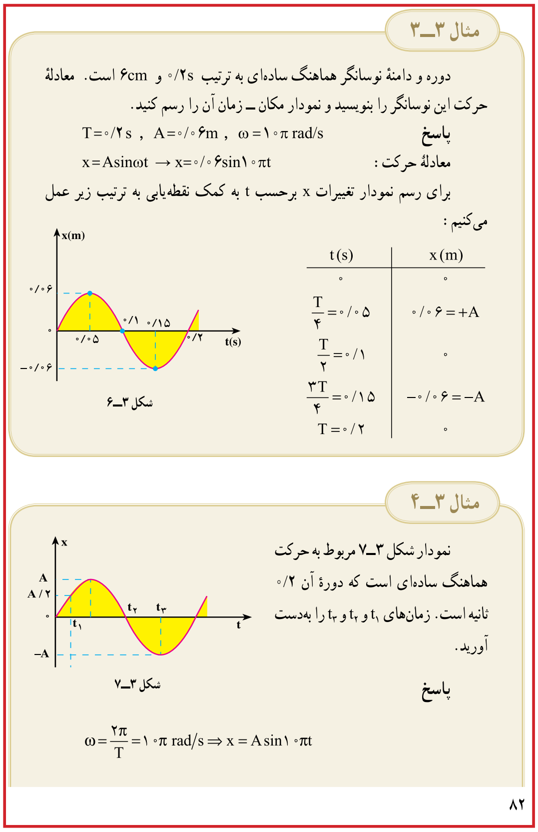
فنری به طور افقی قرار گرفته و انتهای چپ آن ثابت شده است. به انتهای آزاد فنر نیروسنجی وصل می‌کنیم و آن را به طرف راست می‌کشیم (شکل ۱۵ــ الف). نیروی کشش را با جابه‌جایی متناسب درنظر می‌گیریم و اینکه نیروی ۶N موجب جابه‌جایی ۰/۳m می‌شود. نیروسنج را برمی‌داریم و سره‌ای به جرم ۰/۵kg را به انتهای آزاد فنر می‌بندیم. سره را روی یک مسیر هوایی خطی بدون اصطکاک به اندازهٔ ۰/۰۲m کشیده و رها می‌کنیم و نوسان آن را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۵ــ ب).

الف) ثابت نیروی فنر را پیدا کنید.

ب) بسامد زاویه‌ای، بسامد و دورهٔ تناوب نوسان را به‌دست آورید.

حل : الف) به کمک قانون هوک، مقدار ثابت نیروی فنر k را پیدا می‌کنیم. وقتی $x=0/03m$ است، نیرویی که فنر به نیروسنج وارد می‌کند برابر $F=-6N$ است. به این ترتیب داریم :

$$k=-\frac{F}{x}=-\frac{-6N}{0/03m}=200\ N/m$$



مثال ۳ــ۳

دوره و دامنهٔ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به ترتیب ۰/۲s و ۶cm است. معادلهٔ حرکت این نوسانگر را بنویسید و نمودار مکان ــ زمان آن را رسم کنید.

پاسخ $T=0/2s\ ,\ A=0/06m\ ,\ \omega=10\pi\ rad/s$

معادلهٔ حرکت : $x=A\sin\omega t \rightarrow x=0/06\sin 10\pi t$

برای رسم نمودار تغییرات x برحسب t به کمک نقطه‌یابی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

x(m)	t(s)
۰	۰
$0/06=+A$	$\frac{T}{4}=0/05$
۰	$\frac{T}{2}=0/1$
$-0/06=-A$	$\frac{3T}{4}=0/15$
۰	$T=0/2$

شکل ۳ــ۶

مثال ۳ــ۴

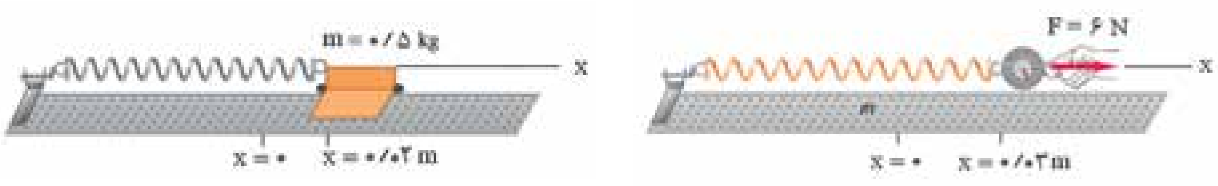
نمودار شکل ۳ــ۷ مربوط به حرکت هماهنگ ساده‌ای است که دورهٔ آن ۰/۲ ثانیه است. زمان‌های t_1 و t_2 و t_3 را به‌دست آورید.

شکل ۳ــ۷

پاسخ

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=10\pi\ rad/s \Rightarrow x=A\sin 10\pi t$$

۸۲



(ب) (الف)

شکل ۱۵

ب) از رابطهٔ $k=m\omega^2$ داریم :

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{۲۰۰\,N/m}{۰/۵kg}}=۲۰\ rad/s$$

بسامد f برابر است با :

$$f=\frac{\omega}{۲\pi}=\frac{۲۰rad/s}{۲\pi}=۳/۲Hz$$

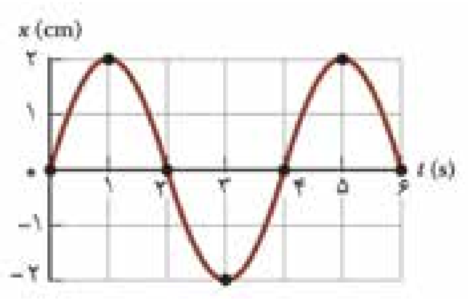
دورهٔ تناوب T برابر است با :

$$T=\frac{۱}{f}=\frac{۱}{۳/۲Hz}=۰/۳۱\,s$$

تمرین‌های پیشنهادی

نمودا ر شکل ۱۶ مربوط به نوسانگری است که به‌طور هماهنگ ساده نوسان می‌کند. معادلهٔ حرکت این نوسانگر را بنویسید.

پاسخ : $x=(۲\times۱۰^{-۳}m)\sin\frac{\pi}{۲}t$



شکل ۱۶

طول مسیر نوسانگر ساده‌ای ۲۰cm است. اگر این نوسانگر در هر دقیقه ۱۲۰ رفت و برگشت کامل انجام دهد، معادلهٔ مکان این نوسانگر را بنویسید. فرض کنید که در مبدأ زمان، نوسانگر در مبدأ مکان باشد.

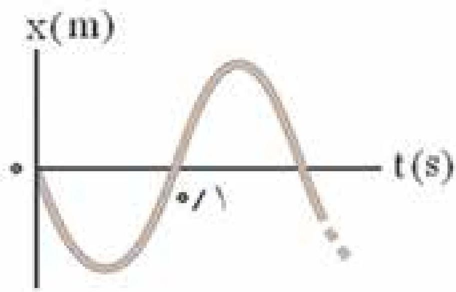
پاسخ :

$$x=(۰/۱m)\sin ۴\pi t$$

تمرین‌های پیشنهادی

نمودار مکان ــ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای مطابق شکل ۱۷ است. تغییر فاز آن در هر ثانیه چقدر است؟

پاسخ : ۱۰π رادیان



شکل ۱۷

با توجه به شکل ۳ــ۷ در لحظهٔ $t_۱$ مکان برابر $A/۲$ است؛ بنابراین :

$$+A/۲ = A\sin ۱۰\pi t_۱ \Rightarrow \sin ۱۰\pi t_۱ = \frac{۱}{۲}$$

$$۱۰\pi t_۱ = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow t_۱ = \frac{۱}{۶۰}s$$

در لحظهٔ $t_۲$ مکان صفر است، بنابراین :

$$۰ = A\sin ۱۰\pi t_۲$$

$$۱۰\pi t_۲ = ۰ \text{ یا } ۱۰\pi t_۲ = \pi$$

از تساوی $۱۰\pi t_۲ = ۰$ زمان $t_۲$، صفر به دست می‌آید در حالی‌که در شکل $t_۲$ مثبت است. بنابراین :

$$۱۰\pi t_۲ = \pi \Rightarrow t_۲ = \frac{۱}{۱۰}s$$

در لحظهٔ $t_۳$ مکان $-A$ است بنابراین :

$$-A = A\sin ۱۰\pi t_۳ \Rightarrow \sin ۱۰\pi t_۳ = -۱$$

$$۱۰\pi t_۳ = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow t_۳ = \frac{۳}{۲۰}s$$

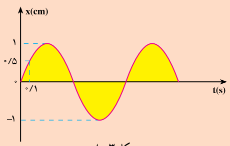
مقدار $t_۲$ را می‌توانستیم از رابطهٔ $t_۲ = t_۱ + \frac{T}{۴}$ نیز به‌دست آوریم.

تمرین ۳ــ۱

نمودار مکان ــ زمان نوسانگری در شکل ۳ــ۸ رسم شده است. مطلوب است :

الف) دورهٔ حرکت

ب) مکان نوسانگر در لحظهٔ $t=۰/۵s$



شکل ۳ــ۸

۸۳

معادلهٔ مکان ــ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به‌صورت زیر است :

$$x = ۰/۰۱\sin ۱۰\pi t$$

طول پاره‌خط مسیر حرکت نوسانگر و بسامد آن را بیابید.

پاسخ : ۲cm و ۵Hz

در شکل ۱۸ وزنه را از حالت تعادل به اندازهٔ ۱۰cm در خلاف جهت محور x جابه‌جا کرده و سامانهٔ فنر ــ وزنه را از حال سکون رها می‌کنیم. اگر این سامانه به طور هماهنگ ساده نوسان کند، معادلهٔ حرکت آن را در SI بنویسید. مبدأ مکان را نقطهٔ تعادل وزنه و مبدأ زمان را لحظهٔ کشیدن وزنه بگیرید.

پاسخ : $x = ۰/۱\sin ۲۰t$

شکل ۱۸

تمرین ۳ــ۱

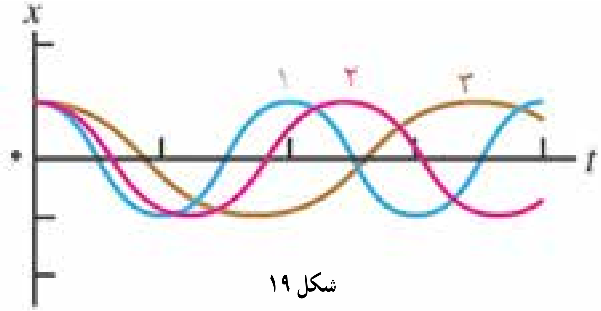
حل : الف) $t = ۱/۲s$

ب) $x = ۰/۹۶\ cm$

فعالیت پیشنهادی

هریک از حالت‌های زیر را در کلاس درس به بحث بگذارید.

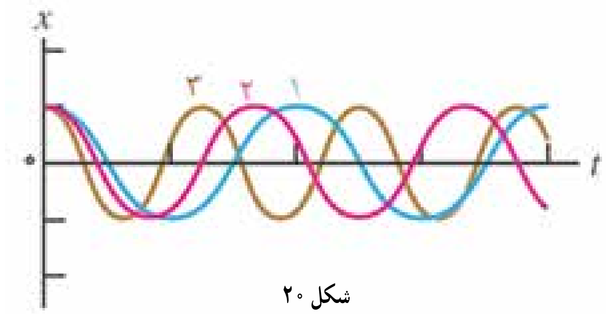
الف) اثر افزایش جرم بر دورهٔ تناوب



شکل ۱۹

در شکل ۱۹ اثر افزایش m با فرض ثابت نگه‌داشتن A و k برای سه نوسانگر ساده نشان داده شده است. همان‌طورکه دیده می‌شود افزایش m به تنهایی، دورهٔ تناوب نوسانگر را افزایش می‌دهد. در شکل ۱۹، جرم m از نمودار ۱ به نمودار ۲ به نمودار ۳ افزایش می‌یابد.

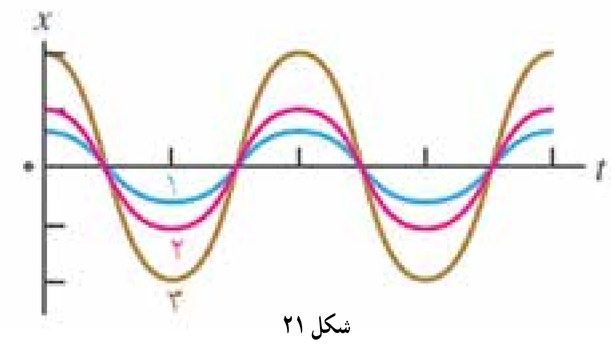
ب) اثر افزایش ثابت فنر بر دورهٔتناوب



شکل ۲۰

در شکل ۲۰ اثر افزایش k با فرض ثابت نگه‌داشتن A و m برای سه نوسانگر ساده نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود افزایش k به تنهایی، دورهٔ تناوب را کاهش می‌دهد. در شکل ۲۰، ثابت نیروی k از نمودار ۱ به نمودار ۲ به نمودار ۳ افزایش می‌یابد.

پ) اثر افزایش دامنه بر دورهٔ تناوب



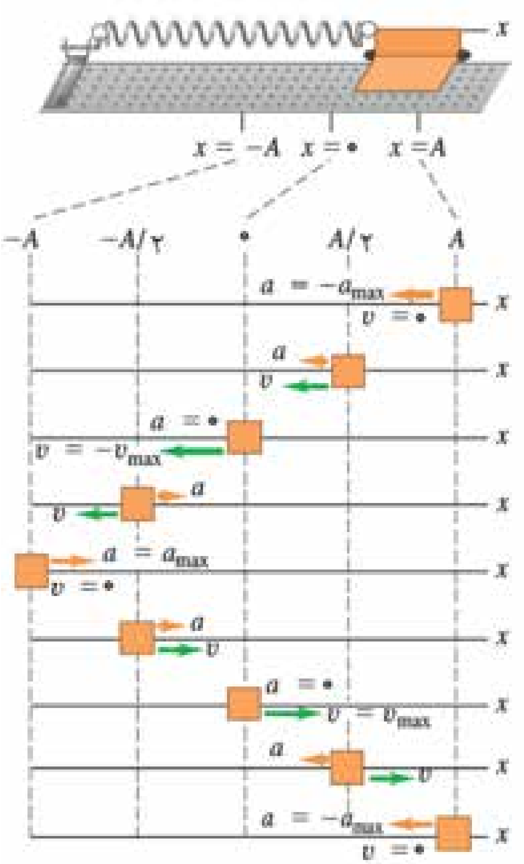
شکل ۲۱

در شکل ۲۱ اثر افزایش A با فرض ثابت نگه‌داشتن A و m برای سه نوسانگر ساده نشان داده شده است. همان‌طورکه دیده می‌شود، متغیر A به‌تنهایی، هیچ تأثیری روی دورهٔ تناوب ندارد. دامنهٔ A از منحنی ۱ به منحنی ۲ به منحنی ۳ افزایش می‌یابد.

۳ــ۳ــ معادله‌های سرعت و شتاب در حرکت هماهنگ ساده

راهنمای تدریس : با توجه به این که دانش‌آموزان پیش از این آشنایی کامل با رابطه‌های $v = dx/dt$ و $a = d^2x/dt^2$ دارند، رابطه‌های سرعت و شتاب در حرکت نوسانی ساده را برای آنها استخراج کنید و به بررسی آنها بپردازید.

شکل ۲۲ چگونگی تغییر سرعت v و شتاب a را در طی یک چرخهٔ حرکت هماهنگ ساده نشان می‌دهد که برای جمع‌بندی موضوع درس می‌تواند مفید باشد. لازم است دانش‌آموزان به مقدار و جهت هریک از کمیت‌ها در وضعیت‌های مختلف توجه کنند.



شکل ۲۲

۳ــ۳ــ معادله‌های سرعت و شتاب در حرکت هماهنگ ساده

الف) معادلهٔ سرعت : با توجه به اینکه سرعت، مشتق مکان نسبت به زمان است با مشتق‌گیری از رابطهٔ ۳ــ۴ خواهیم داشت :

$$v=\frac{dx}{dt} \Rightarrow v = A\omega\cos\omega t \qquad (۳ــ۱۰)$$

معادلهٔ ۳ــ۱۰ نشان می‌دهد که سرعت به ازای $\cos\omega t=\pm۱$ بیشینه می‌شود؛ پس داریم :

$$v_{max} = A\omega \qquad (۳ــ۱۱)$$

در لحظه‌ای که $\cos\omega t=\pm۱$ است، $\sin\omega t=۰$ و در نتیجه $x=۰$. یعنی سرعت بیشینه مربوط به لحظه‌ای است که نوسانگر درحال گذر از وضع تعادل است.

تمرین ۳ــ۲

الف) به کمک رابطه‌های ۳ــ۴ و ۳ــ۱۰ نشان دهید که $v=\pm\omega\sqrt{A^{۲}-x^{۲}}$ است.

ب) به کمک رابطهٔ اخیر معلوم کنید که در چه مکانی سرعت نوسانگر صفر و یا بیشینه است؟

ب) معادلهٔ شتاب : می‌دانیم که شتاب، مشتق سرعت نسبت به زمان، یا مشتق دوم مکان نسبت به زمان است. در نتیجه، با استفاده از رابطهٔ ۳ــ۴ یا ۳ــ۱۰ داریم :

$$a=-A\omega^{۲}\sin\omega t \qquad (۳ــ۱۲)$$

معادلهٔ ۳ــ۱۲ نشان می‌دهد که در حرکت هماهنگ ساده، شتاب نیز به‌طور دوره‌ای تغییر می‌کند و بیشینهٔ آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$a_{max}=A\omega^{۲} \qquad (۳ــ۱۳)$$

با استفاده از رابطهٔ ۳ــ۴ می‌توان رابطهٔ ۳ــ۱۲ را به‌صورت زیر نوشت :

$$a=-\omega^{۲}x \qquad (۳ــ۱۴)$$

که رابطهٔ شتاب را با مکان نوسانگر به‌دست می‌دهد. این رابطه همچنین نشان می‌دهد که بردار شتاب در خلاف جهت بردار مکان است.

۸۴

تمرین ۳ــ۲

حل : الف)

$$v^{۲}=A^{۲}\omega^{۲}\cos^{۲}(\omega t+\varphi_{۰})$$

$$x^{۲}=A^{۲}\sin^{۲}(\omega t+\varphi_{۰})$$

$$\sin^{۲}(\omega t+\varphi_{۰})+\cos^{۲}(\omega t+\varphi_{۰})=۱$$

از ترکیب سه رابطهٔ بالا داریم :

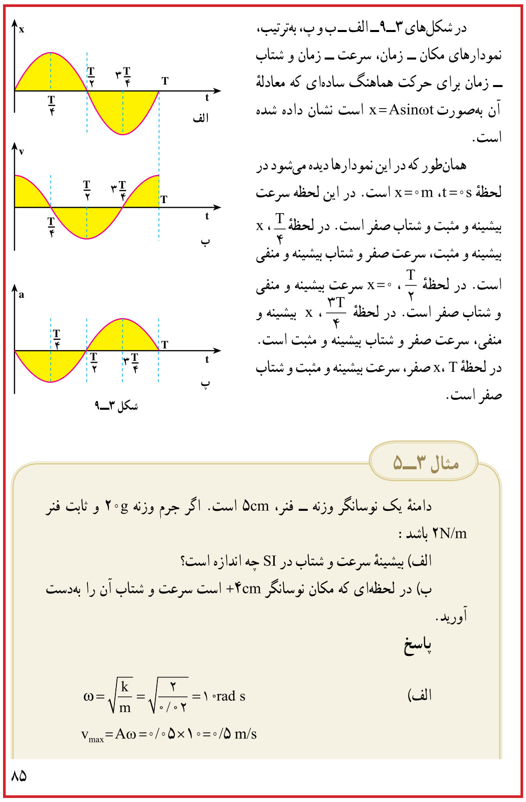
$$v=\pm\omega\sqrt{A^{۲}-x^{۲}}$$

ب) در $x=\pm A$ سرعت نوسانگر صفر و در $x=۰$ سرعت آن بیشینه است. (این موضوع در شکل ۲۲ نیز نشان داده شده است.)

تمرین‌های پیشنهادی

اگر معادلهٔ حرکت نوسانی نوسانگر ساده‌ای به‌صورت $x=A\cos\omega t$ فرض شود، نمودارهای $x-t$، $v-t$ و $a-t$ نوسانگر را رسم کنید.

پاسخ : ابتدا معادله‌های سرعت و شتاب را باید به‌دست آورد. در شکل ۲۳ نمودارهای مورد نظر در یک چرخهٔ کامل رسم شده‌اند.


در شکل‌های ۳ــ۹ــ الف ــ ب و پ، به‌ترتیب، نمودارهای مکان ــ زمان، سرعت ــ زمان و شتاب ــ زمان برای حرکت هماهنگ ساده‌ای که معادلهٔ آن به‌صورت $x=A\sin\omega t$ است نشان داده شده است.

همان‌طور که در این نمودارها دیده می‌شود در لحظهٔ $t=۰s$، $x=۰m$ است. در این لحظه سرعت بیشینه و مثبت و شتاب صفر است. در لحظهٔ $\frac{T}{۴}$، x بیشینه و مثبت، سرعت صفر و شتاب بیشینه و منفی است. در لحظهٔ $\frac{T}{۲}$، $x=۰$ سرعت بیشینه و منفی و شتاب صفر است. در لحظهٔ $\frac{۳T}{۴}$، x بیشینه و منفی، سرعت صفر و شتاب بیشینه و مثبت است. در لحظهٔ T، x صفر، سرعت بیشینه و مثبت و شتاب صفر است.

شکل ۳ــ۹

مثال ۳ــ۵

دامنهٔ یک نوسانگر وزنه ــ فنر، ۵cm است. اگر جرم وزنه ۲۰g و ثابت فنر ۲N/m باشد :

الف) بیشینهٔ سرعت و شتاب در SI چه اندازه است؟

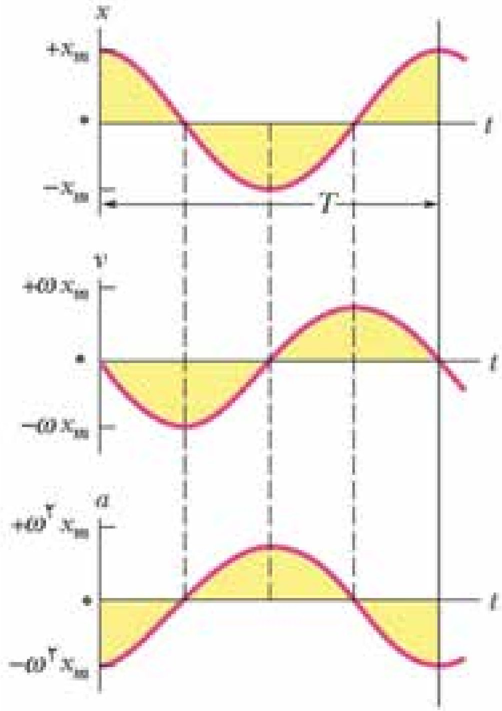
ب) در لحظه‌ای که مکان نوسانگر ۴cm+ است سرعت و شتاب آن را به‌دست آورید.

پاسخ

الف) $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{۲}{۰/۰۲}}=۱۰ rad\ s$

$v_{max}=A\omega=۰/۰۵\times۱۰=۰/۵\ m/s$

۸۵



شکل ۲۳

معادلهٔ حرکت نوسانگری به جرم ۱۰ گرم به‌صورت زیر است :

$$x=(۰/۰۴m)\sin ۱۰۰\pi t$$

معادله‌های سرعت، شتاب و نیروی نوسانگر را بنویسید.

پاسخ :

$$v=۴\pi\cos ۱۰۰\pi t$$

$$a=-۴۰۰\pi^۲\sin ۱۰۰\pi t$$

$$F=-۴\pi^۲\sin ۱۰۰\pi t$$

(همهٔ رابطه‌ها برحسب SI نوشته شده‌اند.)

مثال‌های پیشنهادی

در یک لحظه، فاصلهٔ نوسانگری از مبدأ، نصف دامنهٔ آن است. نسبت اندازهٔ سرعت آن در این لحظه به بیشینهٔ سرعت آن چقدر است؟

حل :

$$x=A\sin\omega t$$

$$\sin\omega t=\frac{x}{A}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos\omega t=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$v=v_{max}\cos\omega t\Rightarrow\frac{v}{v_{max}}=\cos\omega t=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

نوسانگر ساده‌ای با دامنهٔ ۵cm نوسان می‌کند. در نقطه‌ای که فاصلهٔ آن تا مبدأ ۴cm+ و سرعت آن ۳cm/s+ است.

الف) شتاب نوسانگر چقدر است؟

ب) دورهٔ نوسان چقدر است؟

حل : الف)

$$x = A\sin\omega t$$

$$۴ = ۵\sin\omega t\,,\ \sin\omega t\frac{۴}{۵} \Rightarrow \cos\omega t = \frac{۳}{۵}$$

$$v = A\omega\cos\omega t \Rightarrow \omega = \frac{v}{A\cos\omega t} = \frac{۳}{۵\times\frac{۳}{۵}} = ۱\text{rad/s}$$

ب)

$$T = \frac{۲\pi}{\omega} = \frac{۲\pi}{۱} = ۶/۲۸\text{s}$$

تمرین‌های پیشنهادی

اگر دامنهٔ نوسان نوسانگری ۱۰cm و دورهٔ آن ۰/۲۴s باشد،

الف) بزرگی سرعت متوسط آن وقتی که بدون تغییر جهت از نقطهٔ $x=-۵\text{cm}$ به نقطهٔ $y=+۵\text{cm}$ می‌رسد، چند متر بر ثانیه است؟

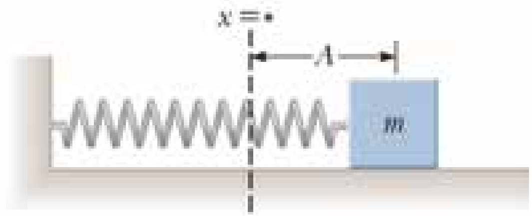
ب) سرعت بیشینهٔ نوسانگر چقدر است؟

پاسخ : الف) ۰/۸۳m/s

ب) ۲/۶۱m/s

در شکل ۲۴، جرم نوسانگر ۴۰۰ گرم و ثابت نیروی فنر ۸۰N/m است. اگر A=۰/۱m، شتاب نوسانگر در وضعیت نشان داده شده چقدر است؟

پاسخ : الف) ۲۰m/s۲



شکل ۲۴

$$a_{max} = A\omega^۲ = ۰/۰۵\times۱۰۰ = ۵\ \text{m/s}^۲$$

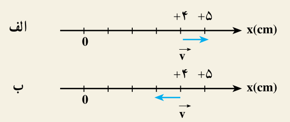
ب) در تمرین ۳ــ۲ دیدیم که $V = \pm\omega\sqrt{A^۲ - x^۲}$ ، بنابراین

$$v = \pm۱۰\sqrt{(۰/۰۵)^۲ - (+۰/۰۴)^۲} = \pm۰/۳\ \text{m/s}$$

علامت (±) نشان‌دهندهٔ این است که در مکان $x=+۴\text{cm}$ ممکن است سرعت در جهت محور x یا در خلاف جهت محور x باشد. یعنی در لحظه‌ای که $x=+۴\text{cm}$ است ممکن است متحرک در حال دور شدن از مبدأ باشد که در این صورت $v=+۰/۳\text{m/s}$ است و یا درحال نزدیک شدن به مبدأ باشد که در این صورت $v=-۰/۳\text{m/s}$. این وضعیت به ترتیب در شکل‌های ۳ــ۱۰ــ الف و ۳ــ۱۰ــ ب نشان داده شده است.

$$a = -\omega^۲x = -۱۰۰\times(+۰/۰۴) = -۴\ \text{m/s}^۲$$

پس معلوم می‌شود در مکان $x=+۴\text{cm}$ شتاب منفی و در خلاف جهت محور x است.



شکل ۳ــ۱۰

۳ــ۴ــ انرژی مکانیکی نوسانگر (دستگاه جرم ــ فنر)

در فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم، هنگامی که فنری فشرده یا کشیده می‌شود در آن انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره می‌شود؛ می‌توان نشان داد مقدار این انرژی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$U_e = \frac{۱}{۲}kx^۲$$

با جایگذاری x از معادلهٔ ۳ــ۴ خواهیم داشت :

$$U_e = \frac{۱}{۲}kA^۲\sin^۲\omega t \qquad (۳ــ۱۵)$$

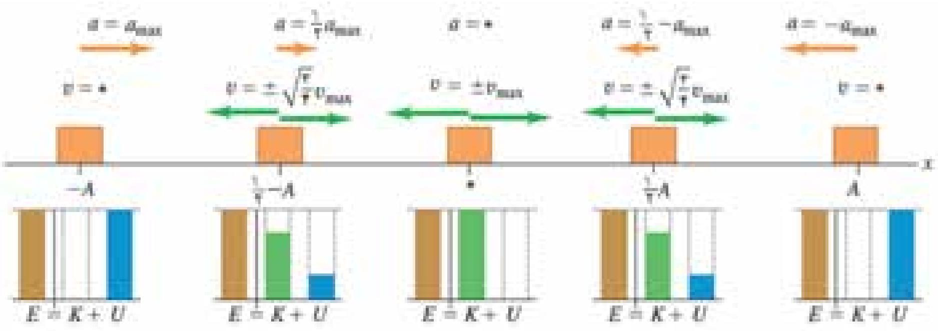
با استفاده از رابطهٔ ۳ــ۵ می‌توان نوشت :

$$U_e = \frac{۱}{۲}m\omega^۲A^۲\sin^۲\omega t \qquad (۳ــ۱۶)$$

۸۶

۳ــ۴ــ انرژی مکانیکی نوسانگر (دستگاه جرم ــ فنر)

راهنمای تدریس : برای آن که شناخت بهتری از حرکت هماهنگ ساده به دست آوریم مفهوم انرژی می‌تواند این شناخت را در اختیار ما بگذارد. توصیه می‌شود پس از به‌دست‌آوردن رابطهٔ مربوط به انرژی مکانیکی نوسانگر ساده، به تفسیر آن به‌صورت شکل ۲۵ بپردازید. در این شکل نمودارهای K ، E و U برحسب جابه‌جایی در حرکت هماهنگ ساده نشان داده شده است. از آنجا که سرعت جسم ثابت نیست، نوسانگر در موقعیت‌های مکانی یکسان، در موقعیت‌های زمانی یکسانی نیست.



شکل ۲۵

مثال پیشنهادی

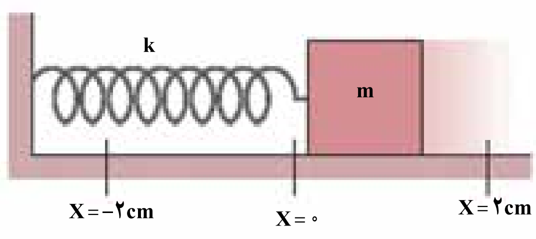
فنری با ثابت نیروی $k = 200\,N/m$ به‌طور افقی قرار گرفته و انتهای چپ آن ثابت شده است (شکل ۲۶). وزنه‌ای به جرم $m = 0/5kg$ به انتهای آزاد فنر وصل می‌کنیم و آن را تا $x = 0/02m$ به طرف راست می‌کشیم و رها می‌کنیم.

الف) بیشینه و کمینه سرعتی را که نوسانگر به‌دست می‌آورد پیدا کنید.

ب) بیشینهٔ شتاب را حساب کنید.

پ) سرعت و شتاب جسم را وقتی از نیمه راه، از وضع اولیه‌اش به طرف مرکز، می‌گذرد تعیین کنید.

ت) انرژی کل، انرژی پتانسیل، و انرژی جنبشی را در این وضع به‌دست آورید.



شکل ۲۶

از طرفی با توجه به رابطهٔ ۳ــ۱۰ انرژی جنبشی این نوسانگر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\omega t \qquad (۳ــ۱۷)$$

بنابراین، انرژی مکانیکی، یعنی مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی این نوسانگر به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید :

$$E = U_e + K = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\omega t$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\left[\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right]$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \qquad (۳ــ۱۸)$$

از رابطه‌های ۳ــ۱۵ و ۳ــ۱۷ می‌توان دریافت که انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر وزنه‌ــفنر با زمان تغییر می‌کنند. یعنی در لحظه‌ای که نوسانگر در فاصلهٔ x از مبدأ قرار دارد بخشی از انرژی آن به صورت پتانسیل و بقیه به صورت جنبشی است. اما رابطهٔ ۳ــ۱۸ نشان می‌دهد که انرژی مکانیکی نوسانگر مستقل از زمان است.

اگر چه ما انرژی مکانیکی را برای نوسانگر وزنه ــ فنر محاسبه کردیم، ولی می‌توان نشان داد که برای هر نوع نوسانگر سادهٔ دیگری نیز انرژی مکانیکی با مربع دامنه و مربع بسامد متناسب است.

تمرین ۳ــ۳

الف) رابطهٔ انرژی جنبشی نوسانگر ساده را برحسب مکان نوسانگر (x) به‌دست آورید و با استفاده از آن وهمچنین رابطهٔ انرژی پتانسیل نوسانگر نشان دهید که انرژی مکانیکی آن به مکان بستگی ندارد.

ب) با استفاده از رابطه‌ای که به‌دست آوردید، مشخص کنید که در چه مکانی انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر صفر و یا بیشینه است.

۸۷

حل : الف) سرعت در هر جابه‌جایی x از رابطهٔ $v=\pm\omega\sqrt{A^۲-x^۲}$ به‌دست می‌آید. وقتی جسم از وضع تعادل $x=۰$، به طرف راست حرکت می‌کند سرعت بیشینه است.

$$v=v_{max}=A\omega$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{۲۰۰N/m}{۰/۵kg}}=۲۰\ rad/s$$

$$v=(۰/۰۲m)(۲۰rad/s)=۰/۴m/s$$

وقتی جسم از $x=۰$ به طرف چپ حرکت می‌کند سرعت کمینه است و برابر $v_{min}=-۰/۴m/s$ است.

ب) از رابطهٔ $a=-\omega^۲x$، شتاب بیشینه در منفی‌ترین مقدار x، یعنی $x=-A$، به‌دست می‌آید. درنتیجه :

$$a_{max}=-(۲۰rad/s)^۲(-۰/۰۲m)=۸m/s^۲$$

شتاب کمینه برابر $-۸m/s^۲$ و به ازای $A=+۰/۰۲m$ به‌دست می‌آید.

پ) در نقطهٔ میان مسیر به طرف مرکز از مکان اولیه، $x=A/۲=۰/۰۱m$ است. به این ترتیب داریم :

$$v=-(۲۰rad/s)\sqrt{(۰/۰۲m)^۲-(۰/۰۱m)^۲}=-۰/۳۵m/s$$

توجه کنید چون جسم از $x=A$ به طرف $x=۰$ حرکت می‌کند، ریشهٔ منفی را انتخاب کرده‌ایم.

همچنین از رابطهٔ $a=-\omega^۲x$، شتاب برابر است با

$$a=-(۲۰rad/s)^۲(۰/۰۱m)=-۴m/s^۲$$

در این نقطه سرعت و شتاب علامت یکسانی دارند، بنابراین بزرگی سرعت در حال افزایش است.

ت)

$$E=\frac{۱}{۲}kA^۲=\frac{۱}{۲}(۲۰۰N/m)(۰/۰۲m)^۲=۰/۰۴J$$

$$U=\frac{۱}{۲}kx^۲=\frac{۱}{۲}(۲۰۰N/m)(۰/۰۱m)^۲=۰/۰۱J$$

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{۱}{۲}(۰/۵kg)(-۰/۳۵m/s)^۲=۰/۰۳\ J$$

تمرین ۳ـ۳

حل : الف)

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{۱}{۲}m\omega^۲A^۲\cos^۲\omega t$$

$$=\frac{۱}{۲}m\omega^۲A^۲(۱-\sin^۲\omega t)=\frac{۱}{۲}m\omega^۲(A^۲-x^۲)$$

از طرفی انرژی پتانسیل نوسانگر برابر $U=\frac{۱}{۲}m\omega^۲x^۲$ است که اگر با انرژی جنبشی نوسانگر جمع شود، داریم :

$$K+U=\frac{۱}{۲}m\omega^۲(A^۲-x^۲)+\frac{۱}{۲}m\omega^۲x^۲=\frac{۱}{۲}m\omega^۲A^۲$$

که برابر انرژی کل مکانیکی نوسانگر و همان‌طورکه دیده می‌شود به مکان نوسانگر بستگی ندارد.

ب) در $x=۰$، انرژی جنبشی نوسانگر بیشینه و در $x=\pm A$، صفر است. همچنین در $x=۰$ انرژی پتانسیل نوسانگر صفر و در $x=\pm A$، بیشینه است.

تمرین پیشنهادی

نوسانگر هماهنگ ساده‌ای دارای بسامد زاویه‌ای ω و دامنهٔ A است.

الف) وقتی انرژی پتانسیل نوسانگر با انرژی جنبشی آن برابر است بزرگی‌های جابه‌جایی و سرعت چقدرند؟ (فرض کنید که در تعادل $U=۰$ است.)

ب) در هر چرخه چند بار این اتفاق می‌افتد؟

پ) در لحظه‌ای که جابه‌جایی برابر $A/۲$ است، چه کسری از انرژی کل دستگاه جرم ــ فنر، جنبشی و چه کسری، پتانسیل است؟

پاسخ : الف) $x=\pm A/\sqrt{۲}$, $v=\pm\omega A/\sqrt{۲}$

ب) چهار بار،

پ) $\frac{K}{E}=\frac{۳}{۴}$, $\frac{U}{E}=\frac{۱}{۴}$

مثال پیشنهادی

فرض کنید در حال تماشای جسمی هستید که در حال حرکت هماهنگ ساده است. وقتی جسم $۰/۶m$ از مکان تعادل خود به طرف راست جابه‌جا شده است، دارای سرعت $۲/۲m/s$ به طرف راست و شتاب $۸/۴m/s^۲$ به طرف چپ است. پیش از آن که جسم در یک لحظه توقف کند و آنگاه رو به عقب به طرف چپ شروع به حرکت کند، چقدر از آن نقطه دور شده است؟

حل : از رابطهٔ $F=-kx$ و قانون دوم نیوتون داریم.

$$k=\frac{-ma}{x}=-m\left(\frac{-۸/۴m/s^۲}{۰/۶m}\right)=(۱۴s^{-۲})m$$

$$\frac{۱}{۲}mv^۲+\frac{۱}{۲}kX^۲=\frac{۱}{۲}kA^۲\Rightarrow A=\pm\sqrt{x^۲+(m/k)v^۲}$$

$$A=\sqrt{(۰/۶m)^۲+\left(\frac{m}{(۱۴s^{-۲})m}\right)(۲/۲m/s)^۲}=۰/۸۴m$$

به این ترتیب نوسانگر به اندازهٔ $۰/۸۴m-۰/۶۰m=۰/۲۴m$ حرکت کرده است.

تمرین پیشنهادی

یک وسیلهٔ اسباب‌بازی به جرم ۰/۱۵kg به انتهای یک فنر افقی با ثابت نیروی k = ۳۰۰N/m وصل شده و به‌طور هماهنگ ساده حرکت می‌کند. وقتی جسم در ۰/۰۱۲m از مکان تعادلش قرار دارد، بزرگی سرعت آن ۰/۳m/s است. مطلوب است :

الف) انرژی کل جسم در هر نقطه از مکان آن.

ب) دامنهٔ حرکت نوسانگر.

پ) بزرگی سرعت بیشینه‌ای که جسم در حین حرکت خود به‌دست می‌آورد.

پاسخ : الف) ۰/۰۲۸۴ J

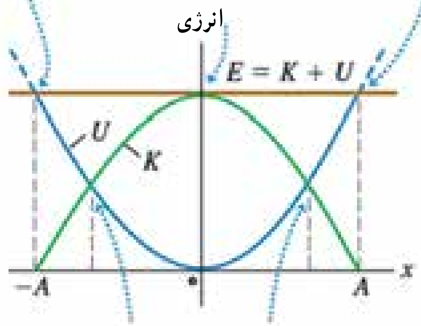
ب) ۰/۰۱۴m

پ) ۰/۶۱۵m/s

تمرین ۳ـ۴

پاسخ : شکل ۳۰ را ببینید.

در x=±A انرژی به‌طور کامل پتانسیل است؛ انرژی جنبشی صفر است. در x=۰ انرژی تماماً جنبشی است؛ انرژی پتانسیل صفر است.



شکل ۳۰

در این نقطه‌ها نیمی از انرژی جنبشی و نیمی دیگر پتانسیل است.

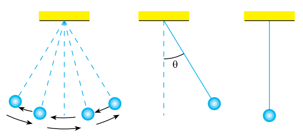
تمرین ۳ـ۴

نمودار تغییرات U_e، K و E را نسبت به مکان برای یک دورهٔ نوسانگر ساده رسم کنید.

۳ـ۵ـ آونگ ساده

آونگ ساده وزنهٔ کوچکی است به جرم m که با نخ سبکی به یک نقطه آویخته شده است. در حالت تعادل، آونگ در امتداد قائم قرار دارد (شکل ۳ـ۱۱ـ الف).

اگر وزنه را پس از خارج کردن آونگ از وضع تعادل رها کنیم (شکل ۳ـ۱۱ـ ب) حول وضع تعادلش نوسان می‌کند (شکل ۳ـ۱۱ـ پ). در نوسان آونگ، نیروی بازگرداننده مؤلفهٔ نیروی وزن جسم در راستای مماس بر مسیر است.



شکل ۳ـ۱۱

اگر زاویهٔ انحراف اولیه از وضع قائم (θ) به اندازهٔ کافی کوچک باشد مسیر حرکت وزنه تقریباً یک پاره‌خط افقی است (شکل ۳ـ۱۲ـ ب). در این صورت، وزنه مانند وزنهٔ متصل به فنر یک حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ کم (حرکت نوسانی کم‌دامنه) انجام می‌دهد.

محاسبهٔ دورهٔ آونگ سادهٔ کم‌دامنه : در آونگ ساده اگر اصطکاک قابل چشم‌پوشی و جرم نخ ناچیز باشد بر وزنهٔ آونگ نیروی وزن $(m\vec{g})$ و نیروی کشش نخ $(\vec{T})$ وارد می‌شود. همان‌طورکه شکل ۳ـ۱۲ـ الف نشان می‌دهد نیروی کشش نخ در امتداد نخ است و در هر لحظه بر مسیر حرکت وزنه عمود است. بنابراین در راستای مماس بر مسیر، مؤلفه ندارد. مؤلفهٔ نیروی وزن در امتداد مماس بر مسیر

۸۸

۳ـ۵ـ آونگ ساده

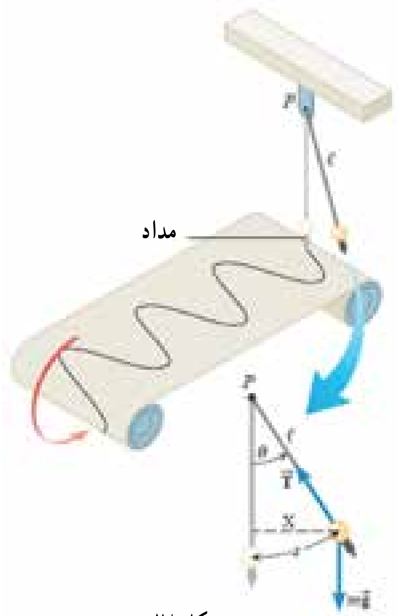
راهنمای تدریس : ابتدا به معرفی آونگ واقعی بپردازید.

شکل ۲۷ کودکی را روی تاب در حال نوسان نشان می‌دهد که معرف یک آونگ واقعی است.

آونگ ساده، مدل آرمانی شده‌ای از یک آونگ واقعی است که یک جرم نقطه‌ای به یک ریسمان بدون جرم و غیر قابل کشش آویزان شده است. وقتی جرم نقطه‌ای را به یک طرف وضع تعادل آن‌که مستقیم است کشیده و رها کنیم، گرد وضع تعادل نوسان می‌کند (شکل ۲۸).

دانش‌آموزان باید توجه کنند که اگر جرم نقطه‌ای

شکل ۲۷



شکل ۲۸

(وزنهٔ آونگ) را تنها به میزان اندکی به یک طرف وضع تعادل کشیده و رها کنیم حرکت آن هماهنگ ساده است و نیروی بازگرداننده به‌طور مستقیم با x (جابه‌جایی وزنهٔ آونگ از وضع تعادل) متناسب است.

تمرین‌های پیشنهادی

آونگ ساده‌ای به طول ۰/۲۴m را با زاویهٔ $۳/۵^\circ$ به یک طرف می‌کشیم و رها می‌کنیم.

الف) چه مدت طول می‌کشد تا گلولهٔ آونگ به بزرگ‌ترین سرعت خود برسد؟

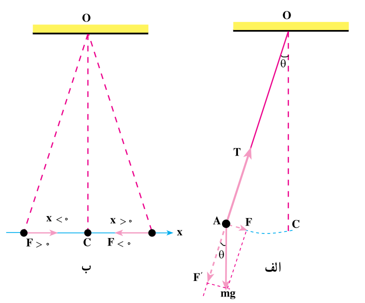
ب) در صورتی که به جای زاویهٔ $۳/۵^\circ$ آونگ از زاویهٔ $۱/۷۵^\circ$ رها شود چه مدت طول می‌کشد؟

پاسخ : الف) $t = \frac{T}{۴} = ۰/۲۵s$

ب) به ازای زاویه‌های کوچک، دورهٔ آونگ مستقل از مقدار زاویه است و زمان همان ۰/۲۵s خواهد بود.

دورهٔ تناوت آونگ سادهٔ معینی روی زمین ۱/۶s است. دورهٔ تناوب آن روی سطح مریخ، جایی با $g = ۳/۷\ m/s^۲$ ، چقدر است؟

پاسخ : $T = ۲/۶۰\ s$



شکل ۳ـ۱۲

$F = mg\sin\theta$ و در امتداد عمود بر مسیر $F' = mg\cos\theta$ است. مؤلفهٔ مماس بر مسیر که نیروی بازگرداننده است می‌خواهد آونگ را به وضع تعادل برگرداند.

دیدیم که اگر زاویهٔ انحراف آونگ از وضع تعادل (θ) کوچک باشد مسیر حرکت وزنه تقریباً یک خط راست افقی است؛ در این صورت، اگر طول آونگ را با l نمایش دهیم، $\sin\theta \simeq \theta = \frac{x}{l}$ است و می‌توان نوشت :

$$|F| = mg\theta = mg\frac{x}{l}$$

همان‌گونه که در شکل ۳ـ۱۲ـ ب دیده می‌شود مؤلفهٔ نیروی وزن جسم در راستای مماس بر مسیر و همواره در خلاف جهت بردار مکان است. بنابراین :

$$F = -mg\frac{x}{l}$$

همان‌طور که می‌بینید، نیروی بازگرداننده از قانون هوک (رابطهٔ ۳ ـ۲) پیروی می‌کند و حرکت آونگ سادهٔ کم دامنه یک حرکت هماهنگ ساده است.

اکنون با توجه به قانون دوم نیوتون داریم :

$$F = mg \Rightarrow -mg\frac{x}{l} = ma$$

$$a = -\frac{g}{l}x \qquad (۳ـ۱۹)$$

از رابطهٔ ۳ـ۱۴ و ۳ـ۱۹ نتیجه می‌گیریم که :

$$\omega^۲ = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

و

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (۳ـ۲۰)$$

۸۹