ترتیب در هر نقطه در طول مسیر، بردار سرعت لحظه‌ای مماس بر مسیر در آن نقطه است. شکل ۳۸ این موضوع را به خوبی نشان می‌دهد.

با توجه به شکل ۳۸، بزرگی سرعت لحظه‌ای برابر است با :

$$v = \sqrt{vx^{۲} + vy^{۲}}$$

همچنین جهت بردار سرعت لحظه‌ای از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود :

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

در این‌جا لازم است که دوباره توجه دانش‌آموزان را به این نکته جلب کنید که هرگاه واژهٔ «سرعت» را به‌کار می‌بریم منظورمان همان بردار سرعت لحظه‌ای $\vec{v}$ است (نه بردار سرعت متوسط).

مثال پیشنهادی

یک مریخ نورد (چرخندهٔ روباتیک) در حال اکتشاف سطح کرهٔ مریخ است و مبدأ مختصات در مکان فرود مریخ‌نورد و سطح مریخ در اطراف آن، در صفحهٔ xy قرار دارد. مختصات x و y مریخ‌نورد که آن را با یک نقطه نمایش می‌دهیم به صورت زیر با زمان تغییر می‌کنند (در SI) :

$$x = ۲ - ۰/۲۵t^{۲}$$

$$y = t + ۰/۰۲۵t^{۳}$$

الف) مختصات مریخ‌نورد و فاصلهٔ آن تا محل فرود را در t = ۲s بیابید.

ب) بردارهای جابجایی و سرعت متوسط مریخ نورد را در بازهٔ زمانی از t = ۰ تا t = ۲s بیابید.

پ) عبارتی کلی برای بردار سرعت لحظه‌ای مریخ نورد به دست آورید. سرعت لحظه‌ای در t = ۲s را هم به‌صورت مؤلفه‌ای و هم برحسب بزرگی و جهت بیان کنید.

حل : این مسئله شامل یک حرکت دوبعدی، یعنی حرکت در صفحه است. بنابراین باید از عبارت‌هایی که تاکنون در این بخش برای بردارهای جابجایی، سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به دست آورده‌ایم استفاده کنیم.

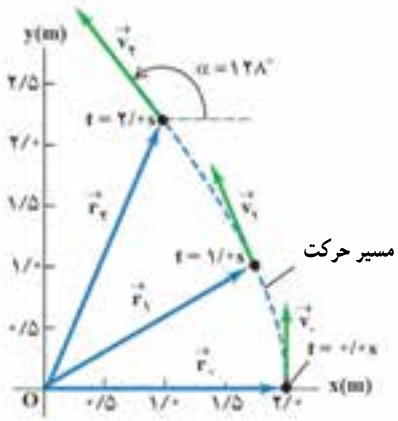
شکل ۳۹ مسیر مریخ‌نورد و بردار مکان آن را در سه لحظهٔ متوالی نشان می‌دهد.

الف) مختصات مریخ‌نورد در t = ۲s عبارت است از :

$$x = ۱m \quad , \quad y = ۲/۲m$$

فاصلهٔ مریخ نورد از مبدأ در این لحظه برابر است با :

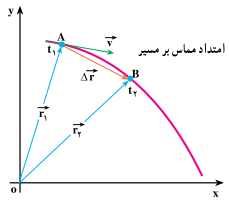
$$r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} = \sqrt{۱^{۲} + (۲/۲)^{۲}} = ۲/۴m$$



شکل ۳۹

سمت صفر میل می‌کند :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to ۰} (\bar{\vec{v}}) = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (۱-۲۵)$$



شکل ۱ـ۱۶ـ سرعت لحظه‌ای در امتداد مماس بر مسیر حرکت است.

به عبارت دیگر می‌توان گفت که «سرعت لحظه‌ای، مشتق بردار مکان جسم، نسبت به زمان است» :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (۱-۲۶)$$

در حدّی که Δt به سمت صفر میل کند، با استفاده از رابطهٔ ۱ـ۲۱ می‌توان سرعت لحظه‌ای جسم را برحسب مؤلفه‌های آن در دو امتداد x و y به‌دست آورد :

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right)\vec{j}$$

$$\vec{v} = (v_x)\vec{i} + (v_y)\vec{j} \qquad (۱-۲۷)$$

در شکل ۱ـ۱۶ می‌بینید که وقتی $t_۲$ به سمت $t_۱$ میل کند، راستای بردار جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$، به سمت راستای مماس بر منحنی مسیر، در نقطهٔ A میل خواهد کرد؛ بنابراین، چون بردار سرعت

۲۱

ب) برای یافتن جابجایی و سرعت متوسط، بردار مکان $\vec{r}$ را به صورت تابعی از زمان می‌نویسیم.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (۲ - ۰/۲۵t^۲)\,\vec{i} + (t + ۰/۲۵t^۳)\,\vec{j}$$

بردار مکان در $t = ۰$ و $t = ۲s$ به ترتیب برابر است با :

$$\vec{r}_۱ = ۲\,\vec{i} \quad \text{و} \quad \vec{r}_۲ = \vec{i} + ۲/۲\,\vec{j}$$

بنابراین جابجایی مریخ‌نورد در این بازهٔ زمانی برابر است با :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱ = -\vec{i} + ۲/۲\,\vec{j}$$

این معادله نشان می‌دهد که مریخ‌نورد در بازهٔ زمانی صفر تا ۲ ثانیه، ۱ m در جهت منفی x، و ۲/۲ m در جهت مثبت y حرکت کرده است.

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{-\vec{i} + ۲/۲\,\vec{j}}{۲ - ۰}$$

$$\bar{v}_x = -۰/۵\,m/s \quad , \quad \bar{v}_y = ۱/۱\,m/s$$

پ) مؤلفه‌های سرعت لحظه‌ای عبارت‌اند از :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -۰/۵t \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt} = ۱ + ۰/۰۷۵t^۲$$

$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} = -۰/۵t\,\vec{i} + (۱ + ۰/۰۷۵t^۲)\,\vec{j}$$

مؤلفه‌های سرعت در لحظهٔ $t = ۲s$ عبارت‌اند از :

$$v_x = -۱\,m/s \quad , \quad v_y = ۱/۳\,m/s$$

به این ترتیب بزرگی سرعت لحظه‌ای در $t = ۲s$ برابر است با :

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \sqrt{(-۱\,m/s)^۲ + (۱/۳\,m/s)^۲} = ۱/۶\,m/s$$

جهت $\vec{v}$ نسبت به محور x، برابر است با :

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{۱/۳}{-۱} = -۱/۳ \Rightarrow \theta = ۱۲۸^\circ$$

تمرین‌های پیشنهادی

مکان ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند، برحسب سانتی‌متر با معادلهٔ زیر داده شده است که در آن t برحسب ثانیه است :

$$x = ۹/۷۵ + ۱/۵t^۳$$

مطلوب است محاسبهٔ :

الف) سرعت متوسط در حین بازهٔ زمانی $t = ۲s$ تا $t = ۳s$.

ب) سرعت لحظه‌ای در $t = ۲s$.

پ) سرعت لحظه‌ای در $t = ۳s$.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t = ۲/۵s$.

ث) سرعت لحظه‌ای هنگامی که ذره در وسط مکان‌های خود در $t = ۲s$ و $t = ۳s$ قرار دارد.

ج) نمودار x برحسب t را رسم کنید و پاسخ‌های خود را به‌طور نموداری نشان دهید.

پاسخ : الف) $۲/۸۵cm/s$. ب) $۱۸cm/s$. پ) $۴۰/۵cm$.

ت) $۲۸/۱cm/s$. ث) $۳۰/۳cm$.

اگر $\vec{r} = bt^۲\,\vec{i} + ct^۳\,\vec{j}$ باشد که در آن b و c ثابت‌هایی مثبت‌اند، چه وقت بردار سرعت با محورهای x و y زاویهٔ ۴۵° می‌سازد؟

پاسخ : باید $v_x = v_y$ باشد، به این ترتیب $t = ۲b/c$.

یک طراح صفحهٔ وب، پویانمایی‌ای می‌سازد که در آن یک نقطه روی صفحهٔ رایانه در مکان زیر بر حسب سانتی‌متر قرار دارد :

$$\vec{r}(t) = (۴ + ۲/۵t^۲)\,\vec{i} + ۵t\,\vec{j}$$

الف) بزرگی و جهت سرعت متوسط نقطه را بین $t = ۰$ و $t = ۲s$ بیابید.

ب) بزرگی و جهت سرعت لحظه‌ای را در $t = ۱s$، $t = ۲s$، $t = ۰$ بیابید.

پ) مسیر نقطه را از $t = ۰$ تا $t = ۲s$ رسم کنید و سرعت‌هایی را که در بند (ب) محاسبه کرده‌اید نمایش دهید.

پاسخ : الف) در $t = ۲s$: $\overline{v_x} = ۵cm/s$ و $\overline{v_y} = ۵cm/s$.

ب) در $t = ۰$: $v_x = ۰$، $v_y = ۵cm/s$، $v = ۵cm/s$ و $\theta = ۹۰^\circ$.

در $t = ۱s$: $v_x = ۵cm/s$، $v_y = ۵cm/s$، $v = ۷/۱cm/s$ و $\theta = ۴۵^\circ$.

در $t = ۲s$: $v_x = ۱۰cm/s$، $v_y = ۵cm/s$، $v = ۱۱cm/s$ و $\theta = ۲۷^\circ$.

تمرین ۱ـ۴

در مثال ۱ـ۱۲ معادلهٔ مسیر را بنویسید و آن را رسم کنید. بردار سرعت متحرک را در $t = ۱s$ روی مسیر، نمایش دهید.

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

می‌دانید وقتی که سرعت جسم در حال حرکت تغییر می‌کند، حرکت را شتاب‌دار می‌گویند. البته این تغییر سرعت می‌تواند به‌معنای تغییر در بزرگیِ سرعت، تغییر در جهتِ سرعت یا هر دو باشد. دیدیم که وقتی مسیر حرکت جسم خمیده است، جهت سرعت آن الزاماً تغییر می‌کند؛ بنابراین، حرکت بر روی مسیر منحنی، حرکتی شتاب‌دار است حتّی اگر بزرگی سرعت ثابت باشد.

فعالیت ۱ـ۵

دو حرکت شتاب‌دار مثال بزنید که در آنها، بزرگی سرعت تغییر نکند.

در شکل ۱ـ۱۷ـ الف، بردارهای سرعت در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ روی مسیر نشان داده شده است. برای محاسبهٔ تغییر در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_۲ - t_۱$ از نقطهٔ O′ بردارهای مساوی $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ را رسم می‌کنیم و $\Delta\vec{v}$ را به‌دست می‌آوریم (شکل ۱ـ۱۷ـ ب). در اینجا نیز، مشابه حرکت یک‌بعدی، بردار شتاب متوسط را در بازهٔ زمانی Δt به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (۱ـ۲۸)$$

با استفاده از رابطهٔ ۱ـ۲۷ داریم :

$$\vec{\bar{a}} = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)\vec{i} + \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)\vec{j}$$

که آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\vec{\bar{a}} = (\bar{a}_x)\,\vec{i} + (\bar{a}_y)\,\vec{j} \qquad (۱ـ۲۹)$$

۲۳

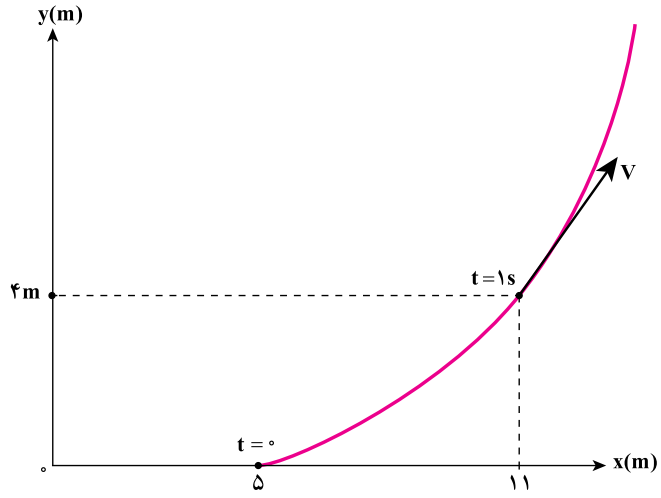
تمرین ۱ـ۴

پاسخ : با توجه به معادله‌های حرکت داریم :

$$x = ۶t + ۵ \Rightarrow t = \frac{x - ۵}{۶}$$

$$y = ۴t^۲ = ۴\left(\frac{x - ۵}{۶}\right)^۲ = \frac{۱}{۹}(x^۲ - ۱۰x + ۲۵)$$

در $t = ۰$ داریم : $x = ۵m$ و $y = ۰$. همچنین در $t = ۱s$ داریم : $x = ۱۱m$ و $y = ۴m$. به این ترتیب نمودار مسیر حرکت متحرک به صورت شکل ۴۰ است. توجه کنید بردار سرعت لحظه‌ای بر مسیرحرکت مماس است.



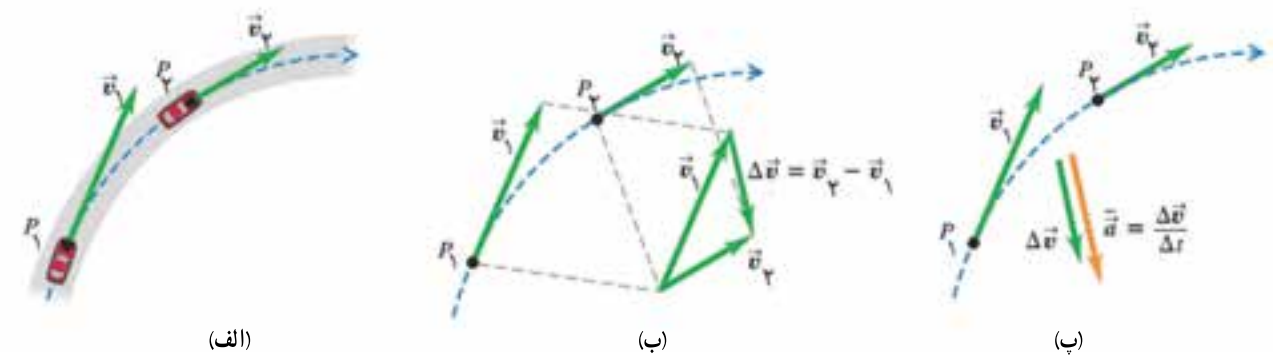
شکل ۴۰

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

راهنمای تدریس : در این قسمت شتاب ذره‌ای را که در صفحه حرکت می‌کند بررسی می‌کنیم. در اینجا نیز درست همانند حرکت بر خط راست، شتاب توصیف می‌کند که سرعت ذره چگونه تغییر می‌کند.

برای شروع می‌توانید از احساس دانش‌آموزان هنگامی که در اتومبیل در حال حرکتی نشسته‌اند سؤال کنید. از آنها بپرسید که در اتومبیلی که رو به جلو شتاب می‌گیرد (سرعت آن رو به افزایش است) چه احساسی دارند؟ با توجه به تجربهٔ روزمره انتظار می‌رود که پاسخ دهند که به عقب اتومبیل می‌لغزند یا به پشتی صندلی فشار می‌آورند. همچنین وقتی اتومبیلی رو به عقب شتاب می‌گیرد (سرعت آن رو به کاهش است)، از آنها بپرسید چه تمایلی پیدا می‌کنند؟ در اینجا نیز پاسخ مورد انتظار این است که بگویند به جلوی اتومبیل می‌لغزند. اکنون بپرسید اگر اتومبیل روی جاده مسطحی (مثلاً دور یک میدان) بپیچد چه احساسی به آنها دست می‌دهد. دوباره با توجه به تجربهٔ روزمره انتظار می‌رود پاسخ دهند که به طرف خارج پیچ یا میدان کشیده می‌شوند. جالب آن است که در این قسمت دانش‌آموزان به سختی می‌توانند قبول کنند که شتابی به طرف داخل پیچ یا میدان دارند.

آنچه ممکن است در این قسمت با یافته‌های قبلی دانش‌آموزان ناسازگار باشد این موضوع است که **هر ذره‌ای که برمسیر خمیده‌ای حرکت کند همواره شتاب غیرصفر دارد حتی اگر بزرگی سرعت ثابت باشد**. توجه دانش آموزان را به این نکته جلب نمایید که هنگام حرکت ذره‌ای بر مسیر خمیده، هرچند ممکن است بزرگی سرعت ذره ثابت باشد ولی چون جهت آن به‌طور دائم تغییر می‌کند، شتاب ذره غیرصفر است. شکل ۴۱ الف اتومبیلی (که به عنوان یک ذره تلقی شده است) را نشان می‌دهد که هنگام دور زدن دور یک میدان (مسیر خمیده)، با کم کردن سرعت، شتاب می‌گیرد. در واقع سرعت لحظه‌ای اتومبیل هم از نظر بزرگی و هم از نظر جهت تغییر می‌کند. شکل ۴۱ ب به‌دست‌آوردن $\Delta \vec{v} = \vec{v}_۲ - \vec{v}_۱$ از طریق تفاضل برداری و شکل ۴۱ پ بردار $\bar{\vec{a}} = \Delta\vec{v}/\Delta t$ شتاب متوسط ذره را بین دو نقطهٔ $P_۱$ و $P_۲$ نشان می‌دهد. دانش‌آموزان باید توجه کنند که شتاب متوسط همان جهت تغییر سرعت، یعنی $\Delta\vec{v}$ را دارد.



شکل ۴۱

فعالیت ۱ـ۵

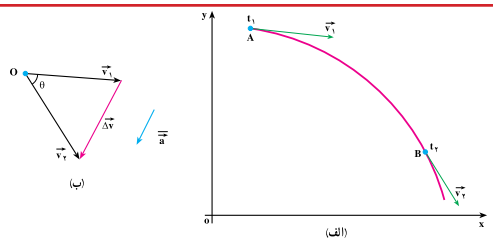
پاسخ : ماهواره‌ای که بر مدار دایره‌ای دور زمین می‌چرخد و اتومبیلی را با سرعت ثابت دور میدانی می‌پیچد می‌توان نام برد.

مثال‌های مفهومی

هنگامی که کمان گیری تیری را پرتاب می کند، مؤلفه‌های شتاب تیر را رسم کنید.

پاسخ : شکل ۴۲ مؤلفه های بردار شتاب تیر را نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود کمان‌گیر، به تیر هم شتاب به طرف بالا می‌دهد و هم شتاب رو به جلو. بنابراین بردار شتاب آن هم مؤلفه‌ای افقی (a_x) و هم مؤلفه ای قائم (a_y) دارد.

شکل ۴۲



شکل ۱ـ۱۷ـ بردار شتاب متوسط با $\Delta\vec{v}$ هم‌جهت است.

شتاب لحظه‌ای در لحظهٔ t_1 را نیز می‌توان به‌صورت حدّ شتاب متوسط، هنگامی که Δt به‌سمت صفر میل می‌کند، تعریف کرد؛ یعنی :

$$\vec{a} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{حدّ}} (\overline{\vec{a}}) = \underset{\Delta t \to 0}{\text{حدّ}} (\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}) \quad (۱ـ۳۰$$

با توجه به مفهوم مشتق، رابطهٔ ۱ـ۳۰ به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (۱ـ۳۱)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2(\vec{r})}{dt^2} \quad (۱ـ۳۲)$$

به کمک رابطهٔ ۱ـ۲۹ می‌توانیم بنویسیم :

$$\vec{a} = (\frac{dv_x}{dt})\vec{i} + (\frac{dv_y}{dt})\vec{j} \quad (۱ـ۳۳)$$

که در آن، $\frac{dv_x}{dt} = a_x$ و $\frac{dv_y}{dt} = a_y$ مؤلفه‌های شتاب لحظه‌ای‌اند.

درنتیجه، می‌توان نوشت :

$$\vec{a} = (a_x)\vec{i} + (a_y)\vec{j} \quad (۱ـ۳۴)$$

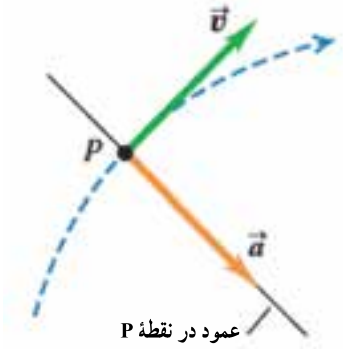
۲۴

بردارهای سرعت و شتاب ذره‌ای متحرک را روی یک مسیر خمیده برای هریک از وضعیت‌های زیر رسم کنید.

الف) ذره با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

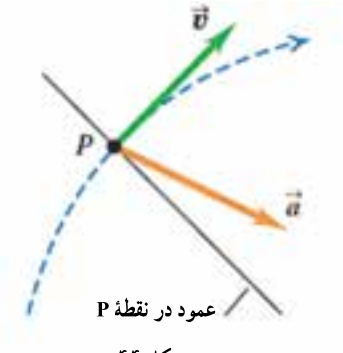
ب) سرعت ذره رو به افزایش است.

پ) سرعت ذره رو به کاهش است.



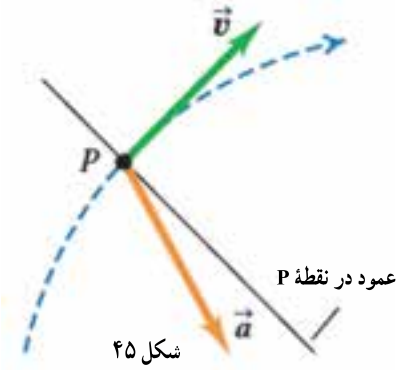
شکل ۴۳

پاسخ : الف) اگر مکان ذره را روی مسیر خمیده با نقطهٔ P نمایش دهیم، شکل ۴۳ بردارهای سرعت و شتاب ذره را در حالتی نشان می‌دهد که بزرگی سرعت آن ثابت است. توجه کنید که در این وضعیت $\vec{a}$ هم بر مسیر و هم بر $\vec{v}$ عمود است و جهت آن به سوی کاوی مسیر قرار دارد.



شکل ۴۴

ب) شکل ۴۴ بردارهای سرعت و شتاب ذره را برای وضعیتی نشان می‌دهد که بزرگی سرعت آن رو به افزایش است. در این حالت شتاب $\vec{a}$ علاوه بر مؤلفهٔ عمودی دارای یک مؤلفهٔ موازی سرعت نیز است، در این صورت $\vec{a}$ در جلوی راستای عمود بر مسیر قرار دارد.



شکل ۴۵

پ) شکل ۴۵ بردارهای سرعت و شتاب ذره را برای حالتی که بزرگی سرعت آن رو به کاهش است نشان می‌دهد. در این وضعیت نیز، $\vec{a}$ علاوه بر مؤلفهٔ عمود بر $\vec{v}$ ، دارای مؤلفه‌ای موازی در خلاف جهت $\vec{v}$ است و $\vec{a}$ در پشت راستای عمود بر مسیر قرار می‌گیرد.

اسکی‌بازی همان‌گونه که در شکل ۴۶ الف نشان داده شده است در شیب راههٔ پرش اسکی حرکت می‌کند. شیب‌راهه از نقطهٔ A تا نقطهٔ C مستقیم و از نقطهٔ C به بعد خمیده است. بزرگی سرعت اسکی باز در سراشیبی از نقطهٔ A تا نقطهٔ E که در آن بزرگی سرعت او بیشینه می‌شود افزایش می‌یابد. پس از گذشتن از نقطهٔ E، سرعت او کاهش می‌یابد. جهت بردار شتاب را در نقطه‌های B، D، E و F رسم کنید.

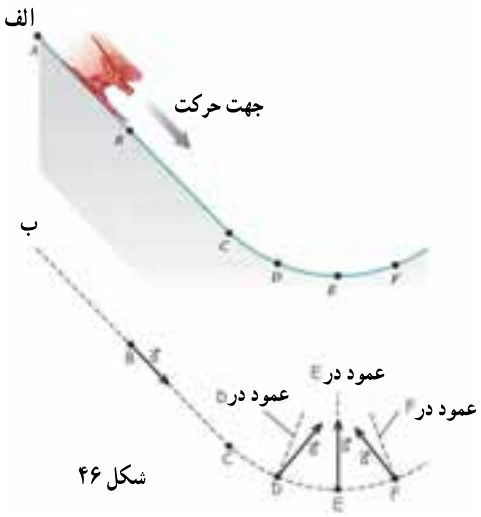
پاسخ : شکل ۴۶ ب پاسخ را نشان می‌دهد. در نقطهٔ B اسکی‌باز بر یک خط راست با سرعت رو به افزایش حرکت می‌کند، بنابراین شتاب او به طرف پایین و در همان جهت سرعت اوست.

در نقطهٔ D اسکی‌باز در امتداد یک مسیر خمیده حرکت می‌کند، بنابراین شتاب او دارای مؤلفه‌ای عمود برمسیر است. همچنین مؤلفه‌ای در جهت حرکت اسکی‌باز نیز وجود دارد زیرا سرعت او در این نقطه کماکان رو به افزایش

است. بنابراین بردار شتاب در جلوی راستای عمود بر مسیر در نقطهٔ D قرار می‌گیرد.

بزرگی سرعت اسکی‌باز در نقطهٔ E به‌طور لحظه‌ای تغییر نمی‌کند، سرعت در این نقطه بیشینه، و در نتیجه مشتق آن صفر است. مؤلفهٔ موازی برای $\vec{a}$ وجود ندارد و شتاب بر حرکت اسکی‌باز عمود است.

سرانجام در نقطهٔ F شتاب (با توجه به آن که مسیر اسکی‌باز در این نقطه خمیده است) یک مؤلفهٔ عمودی و (با توجه به آن که سرعت اسکی‌باز رو به کاهش است) یک مؤلفهٔ موازی در خلاف جهت حرکت اسکی‌باز دارد. بنابراین بردار شتاب در این نقطه در پشت راستای عمود بر مسیر اسکی‌باز قرار می‌گیرد.



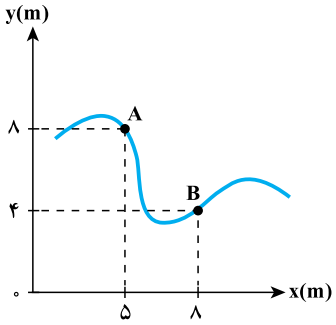
شکل ۴۶

مثال پیشنهادی

متحرکی به‌طور یکنواخت و با سرعت ثابت ۱۰m/s روی یک مسیر خمیده مطابق شکل ۴۷ در حرکت است. این متحرک در لحظهٔ $t_1 = ۳s$ از نقطهٔ A و در لحظهٔ $t_2 = ۵s$ از نقطهٔ B عبور می‌کند.

الف) بزرگی بردارهای جابه‌جایی و سرعت متوسط متحرک را بین نقطه‌های A و B به‌دست آورید.

ب) هرگاه بردارهای سرعت لحظه‌ای در نقطه‌های A و B بر یکدیگر عمود باشند، بزرگی شتاب متوسط را حساب کنید.



شکل ۴۷

حل : الف) بردارهای مکان A و B برحسب بردارهای یکه عبارت‌اند از :

$$\vec{r}_A = ۵\vec{i} + ۸\vec{j} \quad \text{و} \quad \vec{r}_B = ۸\vec{i} + ۴\vec{j}$$

در نتیجه بردار جابجایی متحرک برابر است با :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (۸-۵)\vec{i} + (۴-۸)\vec{j} = ۳\vec{i} - ۴\vec{j}$$

به این ترتیب بزرگی بردار جابجایی بین نقطه‌های A و B برابر است با :

$$\Delta r = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵m$$

همچنین بردار سرعت متوسط متحرک برابر است با :

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{۳\vec{i} - ۴\vec{j}}{۵-۳} = ۱/۵\vec{i} - ۲\vec{j}$$

که بزرگی آن برابر است با :

$$\bar{v} = \sqrt{(۱/۵)^۲ + (-۲)^۲} = ۲/۵m/s$$

ب)

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

چون متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند، یعنی $v = v_A = v_B$، داریم :

$$\Delta v = ۲v\sin\frac{\theta}{۲}$$

که در آن θ زاویهٔ بین بردارهای $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$ است. با توجه به فرض مسئله $\theta = ۹۰^\circ$ است. بنابراین :

$$\Delta v = ۲v\sin ۴۵^\circ = \sqrt{۲}v = ۱۰\sqrt{۲}\ m/s$$

در نتیجه بزرگی بردار شتاب متوسط بین دو نقطهٔ A و B برابر است با :

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۱۰\sqrt{۲}}{۲} = ۵\sqrt{۲}\ m/s^۲$$

رابطهٔ ۱ــ۲۸ نشان می‌دهد که $\vec{\bar{a}}$ و $\Delta\vec{v}$ هم‌جهت‌اند ولی همان‌طورکه در شکل ۱ــ۱۷ــب نشان داده شده است، در حرکت روی مسیر خمیده، معمولاً بردار شتاب متوسط $\vec{\bar{a}}$ ، با بردارهای سرعت، ($\vec{v}_۱$ یا $\vec{v}_۲$) هم‌جهت نیست. درحالتی هم که Δt به سمت صفر میل می‌کند و بردار $\vec{v}_۲$ به‌بردار $\vec{v}_۱$ بسیار نزدیک می‌شود، شتاب لحظه‌ای با سرعت لحظه‌ای نیز معمولاً هم‌جهت نخواهد بود. ولی به کمک رابطهٔ ۱ــ۳۳ و با داشتن معادلهٔ سرعت، جهت بردار شتاب لحظه‌ای را، که از این پس آن را به اختصار **شتاب** خواهیم نامید، می‌توان به‌دست آورد.

مثال ۱ــ۱۳

معادلهٔ حرکت دو بعدی جسمی در SI به‌صورت زیر است :

$$\begin{cases} x = ۲۰t^۲ \\ y = -۵t^۳ \end{cases}$$

بردار سرعت و بردار شتاب این جسم را در لحظهٔ $t=۱s$ به‌دست آورید. آیا این دو بردار هم‌جهت‌اند؟

پاسخ

برای تعیین بردار سرعت، ابتدا مؤلفه‌های v_x و v_y را در $t=۱s$ به‌دست می‌آوریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ۴۰t \xrightarrow{t=۱s} v_x = ۴۰\ m/s$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -۱۵t^۲ \xrightarrow{t=۱s} v_y = -۱۵\ m/s$$

بنابراین، بردار سرعت لحظه‌ای در $t=۱s$ چنین خواهد بود :

$$\vec{v} = ۴۰\vec{i} - ۱۵\vec{j}$$

برای تعیین بردار شتاب نیز ابتدا مؤلفه های شتاب، یعنی a_x و a_y، را به دست می آوریم. مؤلفهٔ افقی شتاب، ثابت است :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = ۴۰\ m/s^۲$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -۳۰t$$

مثال پیشنهادی

سرعت اولیهٔ ذره‌ای (در $t = ۰$) که با شتاب ثابت $\vec{a}$ حرکت می‌کند برحسب متر بر ثانیه برابر $\vec{v}_۰ = -۲\vec{i} + ۴\vec{j}$ است. بزرگی شتاب ذره $۳m/s^۲$ و جهت آن $\theta = ۱۳۰^\circ$ نسبت به سوی مثبت محور x است. سرعت $\vec{v}$ ی ذره در لحظهٔ $t = ۵s$ چیست؟

حل : مؤلفه‌های سرعت عبارت‌اند از : (در SI)

$$v_x = v_{۰x} + a_x t = -۲ + a_x t$$

$$v_y = v_{۰y} + a_y t = ۴ + a_y t$$

برای به‌دست آوردن مؤلفه‌های شتاب داریم :

$$a_x = a\cos\theta = (۳m/s^۲)\cos ۱۳۰^\circ = -۱/۹۳m/s^۲$$

$$a_y = a\sin\theta = (۳m/s^۲)\sin ۱۳۰^\circ = ۲/۳m/s^۲$$

به این ترتیب در لحظهٔ $t = ۵s$ داریم :

$$v_x = -۲m/s + (-۱/۹۳m/s^۲)(۵s) \simeq -۱۲m/s$$

$$v_y = ۴m/s + (۲/۳m/s^۲)(۵s) \simeq ۱۶m/s$$

در نتیجه بردار سرعت $\vec{v}$ عبارت است از : (در SI)

$$\vec{v} = -۱۲\vec{i} + ۱۶\vec{j}$$

و بزرگی سرعت $\vec{v}$ برابر است با :

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} \simeq ۱۹m/s$$

تمرین‌های پیشنهادی

بردار مکان $\vec{r}$ ذره‌ای که درحال حرکت در صفحهٔ xy است با رابطهٔ زیر داده شده است : (در SI)

$$\vec{r} = (۲t^۳ - ۵t^۲)\vec{i} + (۶ - ۷t^۴)\vec{j}$$

برحسب نمادگذاری بردارهای یکه به ازای لحظهٔ $t = ۲s$ مطلوب است :

الف) بردار جابجایی $\vec{r}$.

ب) بردار سرعت $\vec{v}$.

پ) بردار شتاب $\vec{a}$.

ت) زاویهٔ بین سوی مثبت محور x و خط مماس بر مسیر ذره در $t = ۲s$ چیست؟

پاسخ : الف) $\vec{r} = ۶\vec{i} - ۱۰۶\vec{j}$. ب) $\vec{v} = ۱۹\vec{i} - ۲۲۴\vec{j}$.

پ) $\vec{a} = ۲۴\vec{i} - ۳۳۶\vec{j}$. ت) $-۸۵/۲^\circ$.

هواپیمای جتی در ارتفاع ثابت پرواز می‌کند. مؤلفه‌های سرعت آن در زمان $t_۱ = ۰$ عبارتند از $v_x = ۹۰ m/s$ و $v_y = ۱۱۰ m/s$. این مؤلفه‌ها در زمان $t_۲ = ۳۰ s$ عبارت‌اند از : $v_x = -۱۷۰ m/s$ و $v_y = ۴۰ m/s$.

الف) بردارهای سرعت در $t_۱$ و $t_۲$ را رسم کنید. این دو بردار چه تفاوت هایی باهم دارند؟

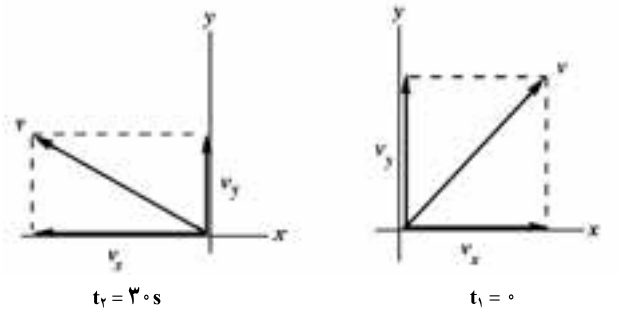
ب) مؤلفه‌های شتاب متوسط را در این بازهٔ زمانی پیدا کنید.

پ) بزرگی و جهت شتاب متوسط را پیدا کنید.

پاسخ : الف) شکل ۴۸ را ببینید.

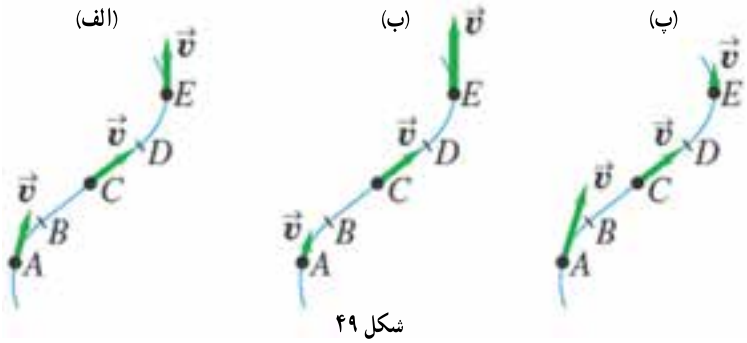
ب) $\overline{a_x} = -۸/۶۷ m/s^۲$, $\overline{a_y} = -۲/۳۳ m/s^۲$

پ) $a = ۸/۹۸ m/s^۲$, $\theta = ۱۹۵^\circ$



شکل ۴۸

ذره‌ای در مسیری که در شکل ۴۹ نشان داده شده است حرکت می‌کند. مسیر ذره بین نقطه‌های B و D یک خط راست است. بردارهای شتاب را در C، A و E در هریک از حالت‌های زیر رسم کنید.



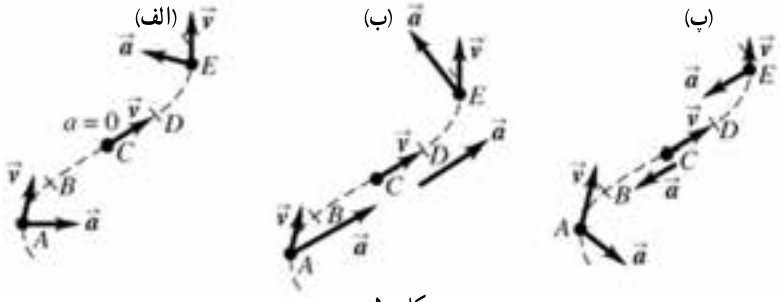
شکل ۴۹

الف) بزرگی سرعت ذره ثابت است (شکل الف).

ب) بزرگی سرعت ذره رو به افزایش است (شکل ب).

پ) بزرگی سرعت ذره رو به کاهش است (شکل پ).

پاسخ : شکل ۵۰ را ببینید.



شکل ۵۰

تمرین پیشنهادی

باد ملایمی سنگ کوچکی را بر صفحهٔ xy افقی با شتاب ثابت $\vec{a} = ۵\vec{i} + ۷\vec{j}$ برحسب $m/s^۲$ شتاب می‌دهد. در $t = ۰$ سرعت اولیهٔ سنگ برابر $v_۰ = ۴\hat{i}$ برحسب m/s است. وقتی سنگ به اندازهٔ ۱۲ m موازی محور x جابجا می‌شود، بزرگی و جهت سرعت آن را پیدا کنید.

پاسخ : ابتدا از رابطهٔ $x - x_۰ = \frac{۱}{۲}a_x t^۲ + v_{۰x} t$ پیدا کنید که چه مدت طول می‌کشد تا سنگ ۱۲ m در امتداد محور x جابه‌جا شود. بزرگی سرعت حدود ۱۵/۵ m/s است.

a_y تابع زمان است و در t=۱s برابر است با :

$$a_y = -۳۰ m/s^۲$$

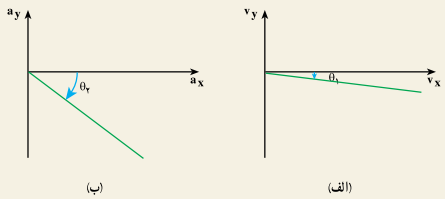
با توجه به مقدارهای a_x و a_y در لحظهٔ t=۱s، بردار شتاب در این لحظه برابر است با :

$$\vec{a} = ۴۰\vec{i} - ۳۰\vec{j}$$

زاویه‌ای که بردارهای سرعت و شتاب در لحظهٔ t=۱s با محور افقی می‌سازند، به ترتیب برابرند با :

$$\tan\theta_۱ = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-۱۵}{۴۰} \Rightarrow \theta_۱ = \tan^{-۱}\frac{-۳}{۸} = -۷^\circ$$

$$\tan\theta_۲ = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{۳۰}{۴۰} \Rightarrow \theta_۲ = \tan^{-۱}\frac{-۳}{۴} = -۳۷^\circ$$



(ب) (الف)

شکل ۱ــ۱۸

با مقایسهٔ زاویه‌های $\theta_۱$ و $\theta_۲$ در شکل ۱ــ۱۸ می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای سرعت و شتاب در این لحظه هم‌جهت نیستند.

حرکت با شتاب ثابت در صفحه ــ حرکت پرتابی

وقتی حرکت در یک صفحه با شتاب ثابت باشد، بزرگی و جهت بردارِ شتاب ثابت می‌ماند؛ از این‌رو، مؤلفه‌های $\vec{a}$ در طول حرکت تغییری نمی‌کنند و مقدار ثابتی دارند. از سوی دیگر، طبق قانون ۲۶

حرکت با شتاب ثابت در صفحه ــ حرکت پرتابی

راهنمای تدریس : ابتدا تعریف‌های زیر را برای مشخص شدن موضوع مورد بحث برای دانش‌آموزان، مطرح نماید.

پرتابه : به هر جسمی که به آن یک سرعت اولیه داده شده باشد و مسیری را بپیماید که به‌طور کامل تحت تأثیر شتاب گرانشی و مقاومت هوا تعیین می‌شود، **پرتابه** می‌گویند. توپ فوتبال ضربه خورده، توپ بسکتبال پرتاب شده، بسته‌ای که از یک هواپیما رها شده و گلوله‌ای که از تفنگی شلیک شده باشد جملگی پرتابه‌اند.

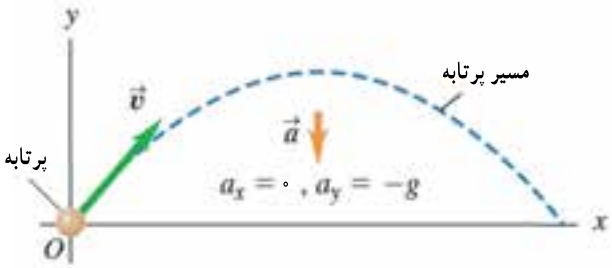
مسیر پرتابه : ردّ پرتابه در فضا را **مسیر پرتابه** می‌نامیم.

حرکت پرتابی (پرتابه‌ای) : به حرکتی که در آن به بررسی و شناخت یک پرتابه و مسیر آن در فضا پرداخته می‌شود **حرکت پرتابی** یا **حرکت پرتابه‌ای** گفته می‌شود.

فرض‌های اولیه در حرکت پرتابی : برای بررسی این نوع متداول حرکت با یک مدل آرمانی آغاز می‌کنیم که در آن پرتابه به عنوان یک تک‌ذره با شتابی (ناشی از گرانش) که هم ازنظر جهت و هم از نظر بزرگی ثابت است درنظر گرفته می‌شود. اثرهای مقاومت هوا و خمیدگی و چرخش زمین را نادیده می‌گیریم. در دنبالهٔ این فصل عبارت «حرکت پرتابی» اشاره بر آن دارد که مقاومت هوا را نادیده گرفته‌ایم.

فعالیت ۱ـ۶

پاسخ : حرکت پرتابه همواره محدود به صفحهٔ قائمی است که با جهت سرعت اولیه مشخص می‌شود (شکل ۵۱). دلیل این امر آن است که شتاب ناشی از گرانش به‌طور محض قائم است؛ گرانش نمی‌تواند پرتابه را به یک پهلو بکشد. بنابراین حرکت پرتابه دوبعدی است. صفحهٔ حرکت را صفحهٔ مختصات xy می‌نامیم که در آن x محور افقی و محور y قائم و به طرف بالاست.



شکل ۵۱

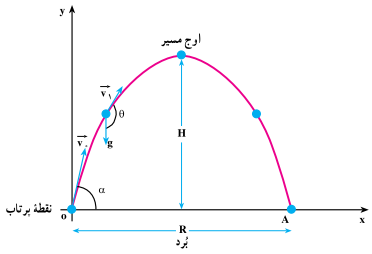
دوم نیوتون، شتاب هنگامی ثابت است که نیروی وارد بر جسم ثابت باشد. در این نوع حرکت برای سادگی، محورهای x و y را طوری انتخاب می‌کنیم که راستای شتاب حرکت بر راستای یکی از محورهای مختصات منطبق باشد؛ بنابراین، مؤلفهٔ شتاب در یک راستا صفر و در راستای دیگر، ثابت است؛ مثلاً اگر محور y با شتاب هم‌راستا باشد، داریم :

$a_x = 0$ و $a_y =$ ثابت

شکل ۱ـ۱۹

ساده‌ترین نوع حرکتِ با شتاب ثابت در صفحه، حرکت پرتابی است. اگر جسم کوچکی را چنان پرتاب کنیم که زاویهٔ سرعت اولیه‌اش با امتداد قائم، مخالف صفر باشد این حرکت را پرتابی و جسم پرتاب شده را **پرتابه** می‌نامیم. اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم، تنها نیروی وارد بر پرتابه، وزن آن $m\vec{g}$ و شتاب حاصل از این نیرو $\vec{g}$ است که در نزدیکی سطح زمین، بزرگی آن ثابت و جهت آن به‌طرف مرکز زمین است.

نتیجهٔ فعالیت ۱ـ۷ نشان می‌دهد که حرکت پرتابی در یک صفحهٔ قائم انجام می‌شود. برای بررسی این حرکت، محور ox را در راستای افق و محور oy را در راستای g درنظر می‌گیریم. درنتیجه، حرکت پرتابی را می‌توان به‌صورت ترکیب دو حرکت، یکی در راستای افق و دیگری در راستای قائم دانست. در این حرکت، نقطهٔ پرتاب جسم را مبدأ مختصات ($x_0 = 0$ و $y_0 = 0$) جهت مثبت محور y را، به‌طرف بالا فرض می‌کنیم.



شکل ۱ـ۲۰

۲۷

کلید بررسی حرکت پرتابی آن است که می‌توانیم مختصات x و y را به‌طور جداگانه مطالعه کنیم. مؤلفهٔ x شتاب ندارد و شتاب مؤلفهٔ y آن ثابت و برابر g− است. (بنابه تعریف g همواره مثبت است و با جهت‌هایی که برای محورهای مختصات برگزیده‌ایم a_y منفی است.) بنابراین می‌توانیم حرکت پرتابی را به‌صورت ترکیبی از حرکت افقی با سرعت ثابت و حرکت قائم با شتاب ثابت بررسی کنیم. به این ترتیب دانش‌آموزان به سادگی می‌توانند از روابطی که تاکنون در حرکت یکنواخت و شتاب ثابت در یک بعد فراگرفته‌اند استفاده نمایند.

پرسش پیشنهادی

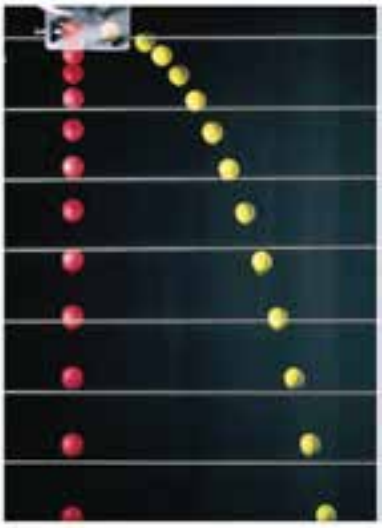
با توجه به آنچه تاکنون درخصوص حرکت پرتابی برای دانش‌آموزان ارائه نموده‌اید از آنها بپرسید آیا حرکت یک پرنده یا هواپیمای در حال پرواز، نوعی حرکت پرتابی است یا خیر؟

انتظار می‌رود دانش‌آموزان با توجه به درکی که از حرکت پرتابی به‌دست آورده‌اند پاسخی درست به این پرسش بدهند. از آنجا که موارد ذکر شده، فاقد ویژگی‌های حرکت پرتابی هستند، مثلاً هواپیما یا پرندهٔ در حال پرواز می‌توانند شتاب افقی داشته باشند، نمی‌توان آنها را پرتابه به‌شمار آورد.

پرسش پیشنهادی

توجه دانش‌آموزان را به شکل ۱ـ۲۴ کتاب درسی جلب نمایید (شکل ۵۲) و از آنها بخواهید دریافت خود را از این شکل بیان کنند.

انتظار می‌رود دانش‌آموزان بیان کنند که این شکل نشان می‌دهد که یک توپ (توپ قرمز) از حالت سکون آزادانه رها شده و توپ دیگر (توپ زرد) در همان لحظه به‌طور افقی به سمت راست پرتاب شده است. آنچه مهم‌تر است دانش‌آموزان اشاره کنند آن است که حرکت‌های قائم این دو توپ هیچ تفاوتی باهم ندارند. به عبارت دیگر این آزمایش نشان می‌دهد که: این که یک توپ در حالی که سقوط می‌کند حرکت افقی هم دارد، هیچ اثری برحرکت قائم آن نمی‌گذارد. پس حرکت‌های افقی و قائم مستقل از یکدیگرند و هیچ یک بر دیگری تأثیری ندارد.

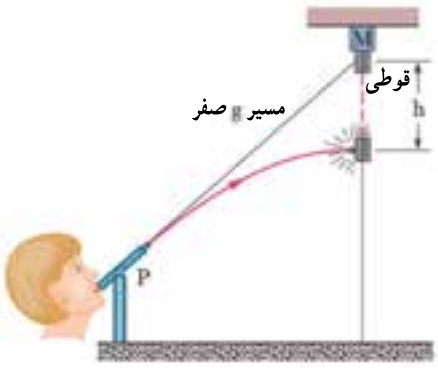


شکل ۵۲

فعالیت پیشنهادی

در صورتی که شرایط و علاقه‌مندی دانش‌آموزان را مناسب می‌بینید، انجام این فعالیت در کلاس درس می‌تواند بسیار هیجان‌انگیز باشد. شکل ۵۳ لولهٔ خودکار P را نشان می‌دهد که با فوت دهان، گلوله را به عنوان پرتابه، پرتاب می‌کند. هدفی که از آهنربای الکتریکی M آویزان شده است، یک قوطی فلزی کوچک است. لولهٔ خودکار مستقیماً به‌طرف این قوطی نشانه رفته است. آزمایش چنان طراحی می‌شود که به محض خروج گلوله از لولهٔ تفنگ بادی قوطی هم از آهنربا جدا می‌شود و آزادانه سقوط می‌کند.

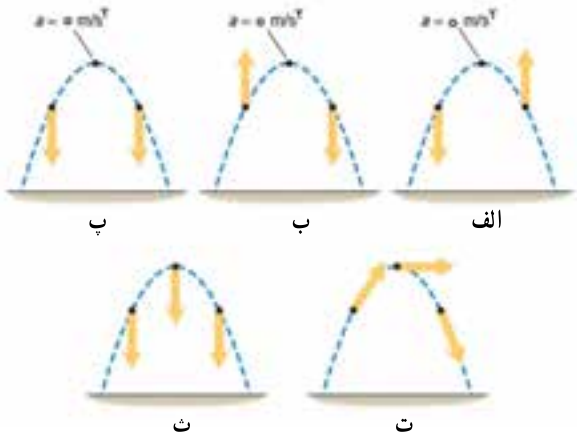
اگر g (بزرگی شتاب سقوط آزاد) صفر بود، گلوله مسیر مستقیمی را می‌پیمود که در شکل ۵۳ با خط راست نشان داده شده است و قوطی هم پس از رها شدن از آهنربا در همان‌جا در هوا معلق می‌ماند. در این‌صورت، مسلّم است که گلوله در همان نقطه با قوطی برخورد می‌کرد. اما می‌دانیم g صفر نیست، با وجود این گلوله باز هم با قوطی برخورد می‌کند! چنانکه شکل ۵۳ نشان می‌دهد، در خلال حرکت پرتابی گلوله، هم گلوله و هم قوطی نسبت به وضعیت g صفر خود، مسافت یکسان h را به طرف پایین سقوط می‌کنند. شخص هرچه با شدت بیشتری فوت کند، سرعت اولیهٔ گلوله بیشتر و زمان حرکت کوتاه‌تر می‌شود، و مقدار h هم کوچکتر خواهد شد.



شکل ۵۳

پرسش پیشنهادی

هریک از شکل‌های ۵۴ الف تا ث مسیر یک پرتابه را نشان می‌دهند. کدام یک از این نمودارها، شتاب پرتابه را در سه نقطهٔ مشخص شده روی نمودار درست نشان می‌دهد؟



شکل ۵۴

در شکل ۱ـ۲۰ مسیر حرکت یک پرتابه، روی صفحهٔ مختصات xoy، همراه با بردار شتاب $\vec{g}$ و نیز بردار سرعت اولیهٔ جسم $\vec{v}_0$ که با افق زاویهٔ α می‌سازد، نشان داده شده است. در این شکل، مؤلفه‌های بردار شتاب $\vec{g}$ با رابطه‌های زیر داده می‌شوند :

$$a_x = 0 \text{ و } a_y = -g \quad (۱ـ۳۵)$$

مؤلفه‌های سرعت اولیهٔ $\vec{v}_0$ نیز برابرند با :

$$v_{0x} = v_0\cos\alpha \text{ و } v_{0y} = v_0\sin\alpha \quad (۱ـ۳۶)$$

چون $a_x = 0$ است ، حرکت در راستای محور x با سرعت ثابت $(v_0\cos\alpha)$ انجام می‌شود.

بنابراین، با استفاده از رابطهٔ ۱ـ۷، معادله‌های حرکت و سرعت پرتابه در راستای محورx، به‌صورت زیر است :

$$x = (v_0\cos\alpha)\,t \quad (۱ـ۳۷)$$

$$v_x = v_0\cos\alpha = \text{ثابت} \quad (۱ـ۳۸)$$

حرکت در راستای قائم y، یک حرکت با شتاب ثابت (g−) است؛ بنابراین، با استفاده از رابطه‌های ۱ـ۱۴ و ۱ـ۱۵ معادله‌های حرکت پرتابه در راستای محور y را نیز به‌صورت زیر خواهیم داشت :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t \quad (۱ـ۳۹)$$

$$v_y = -gt + v_0\sin\alpha \quad (۱ـ۴۰)$$

معادله‌های ۱ـ۳۵ تا ۱ـ۴۰ مؤلفه‌های بردار شتاب و سرعت و مکان پرتابه را در هر لحظه روی محورهای x و y مشخص می‌کنند. می‌دانیم که اگر در معادله‌های حرکت،برای x و y در حرکت دوبعدی، زمان حذف شود، معادلهٔ مسیر حرکت به‌دست خواهد آمد؛ بدین ترتیب، معادلهٔ مسیر حرکت پرتابی روی صفحهٔ xoy نیز چنین است :

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)$$

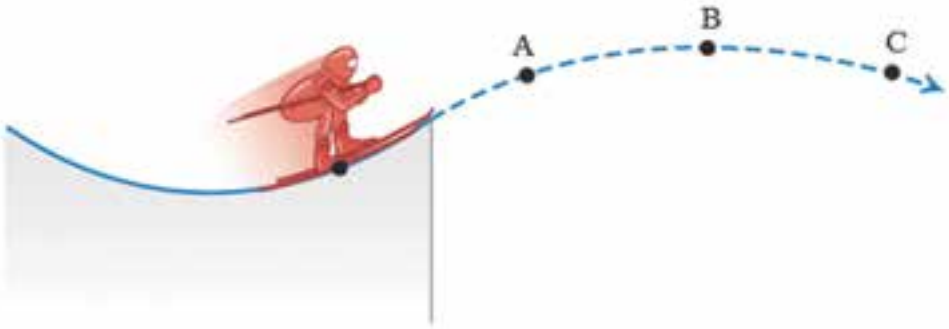
$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha \quad (۱ـ۴۱)$$

رابطهٔ ۱ـ۴۱ نشان می‌دهد که مسیر حرکت پرتابی در شرایط خلأ، سهمی است (چرا؟). در حرکت پرتابی، فاصلهٔ افقی‌ای را که پرتابه طی می‌کند تا دوباره به ارتفاع اولیهٔ پرتاب برگردد، **بُرد پرتابه**

۲۸

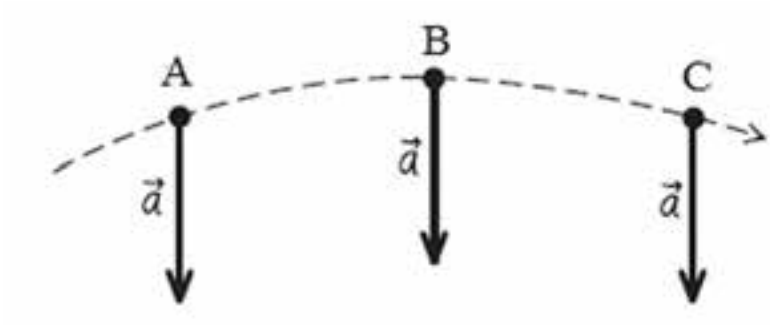
مثال‌های پیشنهادی

شکل ۵۵ اسکی‌بازی را در حال پریدن از روی شیب راهه‌ای نشان می‌دهد. شتاب اسکی‌باز در نقطه‌های A، B و C پس از پریدن از روی شیب‌راهه چقدر است؟ مقاومت هوا را نادیده بگیرید.



شکل ۵۵

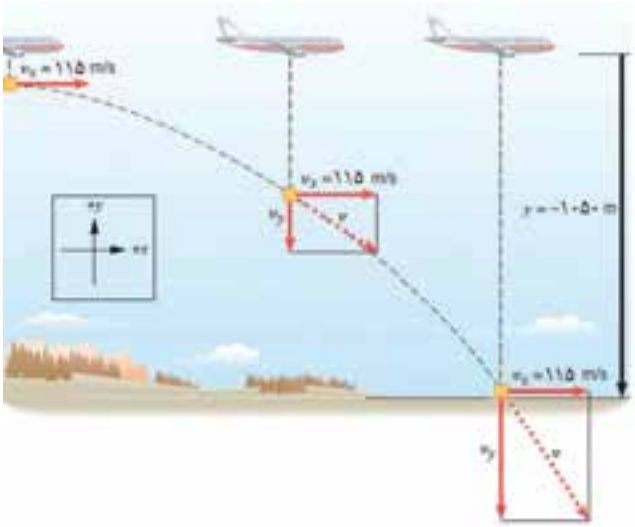
پاسخ : شکل ۵۶ پاسخ را نشان می‌دهد. شتاب اسکی‌باز روی شیب‌راهه، از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند ولی به محض آن که اسکی‌باز شیب‌راهه را ترک می‌کند، به صورت یک پرتابه درمی‌آید. بنابراین در نقطه‌های A ، B و C و در واقع در تمام نقطه‌ها پس از ترک شیب‌راهه، شتاب اسکی‌باز قائم و به طرف پایین بوده و بزرگی آن g است. شتاب یک ذره پیش از آن که به‌صورت پرتابه درآید هر پیچیدگی که داشته باشد، در هر حال شتاب پرتابه با $a_x = 0$ و $a_y = -g$ داده می‌شود.



شکل ۵۶

از هواپیمایی که با سرعت افقی ۱۱۵ m/s در حال پرواز است، بسته‌ای آزادانه رها می‌شود. اگر ارتفاع هواپیما از سطح زمین ۱۰۵۰ متر باشد، پس از چه مدت بسته به زمین می‌رسد؟ مقاومت هوا را در خلال حرکت بسته نادیده بگیرید.

حل : چون مقاومت هوا برای حرکت بسته نادیده فرض شده است، حرکت آن را می‌توان به‌صورت یک حرکت پرتابی بررسی کرد. شکل ۵۷ وضعیت بسته را در سه حالت نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود در خلال حرکت بسته، سرعت افقی آن ثابت و سرعت روبه قائم آن در حال افزایش است. برای سادگی، مبدأ دستگاه مختصات را در محلی که بسته رها شده است گرفته‌ایم.



شکل ۵۷

اطلاعات مسئله در جهت y در جدول زیر داده شده است :

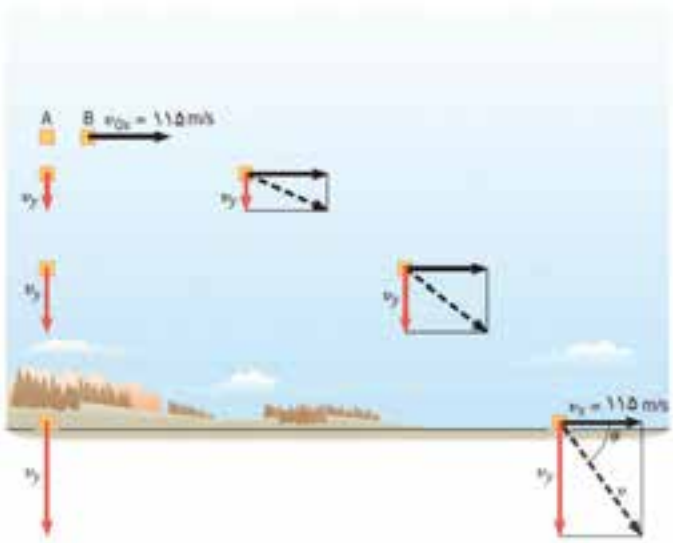
در جهت y				
y	a_y	v_y	$v_{\circ y}$	t
$-۱۰۵۰\ m$	$-۹/۸\ m/s^۲$		$\circ\ m/s$	?

با استفاده از رابطهٔ $y = v_{\circ y}t + \frac{۱}{۲}a_y t^۲$ داریم :

$$t = \sqrt{\frac{۲y}{a_y}} = \sqrt{\frac{۲(-۱۰۵۰m)}{-۹/۸m/s^۲}} = ۱۴/۶s$$

اگر در مثال پیشین، به‌طور همزمان و از همان ارتفاع، بسته‌ای مشابه از بالون ساکنی رها می‌شد، زمان رسیدن بسته به سطح زمین چه تفاوتی می‌کرد؟

پاسخ : همانطور که در شکل ۵۸ نیز نشان داده شده است، حرکت قائم بسته، چه از سوی یک هواپیمای درحال پرواز در امتداد سطح زمین رها شود (بستهٔ B) و چه از بالون ساکنی رها گردد (بستهٔA)، تفاوتی ندارد. به این ترتیب زمان رسیدن هردو بسته به سطح زمین در هر دو حالت یکسان است.



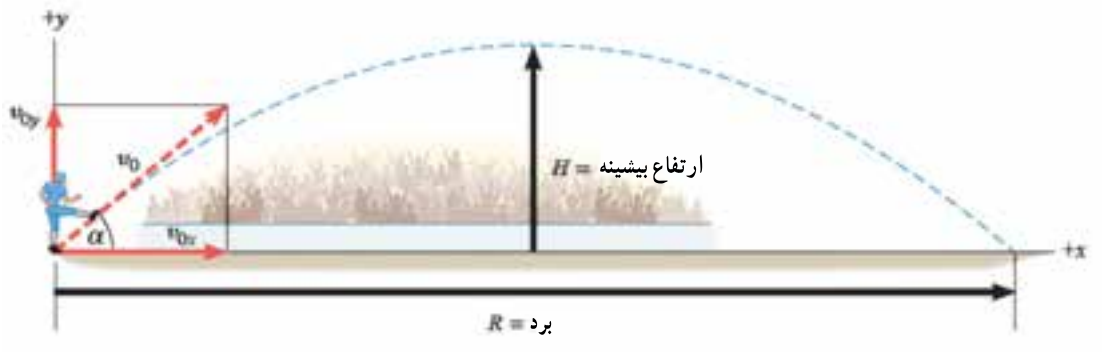
شکل ۵۸

دروازه‌بانی توپی را با سرعت اولیه $v_\circ = ۲۲m/s$ و در راستایی که با افق زاویهٔ $\alpha = ۴۰^\circ$ می‌سازد، شوت می‌کند (شکل ۵۹)، با نادیده گرفتن مقاومت هوا، مطلوب است :

الف) ارتفاع بیشینه‌ای که توپ می‌رسد.

ب) بُرد توپ.

پ) زمانی که توپ به زمین برمی‌گردد.



شکل ۵۹

حل : الف) با توجه به رابطهٔ ۱ــ۴۳ کتاب درسی، ارتفاع نقطهٔ اوج برابر است با :

$$H=\frac{v_0^{2}\sin^{2}\alpha}{2g}=\frac{(22\,m/s)^{2}(\sin 44^\circ)^{2}}{2\times(9/8\,m/s^{2})}\simeq 10\,m$$

ب) با توجه به رابطهٔ ۱ــ۴۲ کتاب درسی، بُرد پرتابه برابر است با :

$$R=\frac{v_0^{2}\sin 2\alpha}{g}=\frac{(22\,m/s)^{2}\sin 88^\circ}{9/8\,m/s^{2}}\simeq 49\,m$$

پ) زمانی که توپ به زمین برمی‌گردد برابر است با :

$$t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}=\frac{2(22\,m/s)\sin 44^\circ}{9/8\,m/s^{2}}=2/9\,s$$

می‌نامند. بُرد پرتابه را با R نمایش می‌دهیم (شکل ۱ــ۲۰). مختصات نقطهٔ بازگشت به ارتفاع اولیه با توجه به شکل ۱ــ۲۰ به‌صورت $y=0$ و $x=R$ است. با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۴۱ داریم :

$$0=\frac{-g(R)^{2}}{2v_0^{2}\cos^{2}\alpha}+(R)\tan\alpha$$

$$R=\frac{2v_0^{2}\times\sin\alpha\times\cos\alpha}{g}$$

$$R=\frac{v_0^{2}\sin 2\alpha}{g} \qquad (۱ــ۴۲)$$

تمرین ۱ــ۵

به ازای چه زاویه‌ای (α)، بُرد پرتابه بیشینه است؟

در حرکت پرتابی، بالاترین نقطه‌ای که پرتابه به آن می‌رسد، **نقطهٔ اوج** نام دارد. در شکل ۱ــ۲۰ ارتفاع نقطهٔ اوج با H نشان داده شده است. سرعت در راستای محور y در نقطهٔ اوج صفر است (چرا؟)؛ درنتیجه، با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۴۰ داریم :

$$0=-gt+v_0\sin\alpha$$

$$t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

t زمانِ رسیدن به نقطهٔ اوج است. با جای‌گذاری این زمان در معادلهٔ ۱ــ۳۹، ارتفاع نقطهٔ اوج به‌دست می‌آید :

$$H=-\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^{2}+(v_0\sin\alpha)\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)$$

$$H=\frac{v_0^{2}\sin^{2}\alpha}{2g} \qquad (۱ــ۴۳)$$

۲۹

ورزشکاری توپ بیسبالی را آن چنان می‌زند که با سرعت ۳۶ m/s و زاویه 28° زیر سطح افق، به بالای پله‌هایی برخورد کند (شکل ۶۰). نقطهٔ برخورد ۷/۵ متر بالاتر از نقطهٔ پرتاب توپ است.

بزرگی و جهت سرعت اولیه را پیدا کنید. (مقاومت هوا را نادیده بگیرید.)

شکل ۶۰

حل : سرعت افقی توپ در خلال حرکت ثابت و برابر است با :

$$v_{\circ x} = v_x = v\cos ۲۸^\circ$$

مؤلفهٔ قائم سرعت توپ برابر است با :

$$v_y = -v\sin ۲۸^\circ$$

از طرف دیگر داریم :

$$v_y^۲ - v_{\circ y}^۲ = ۲a_y y \Rightarrow v_{\circ y} = \sqrt{v_y^۲ + ۲gy}$$

یا

$$v_{\circ y} = \sqrt{(-v\sin ۲۸^\circ)^۲ + ۲gy}$$

به این ترتیب داریم :

$$v_\circ = \sqrt{v_{\circ x}^۲ + v_{\circ y}^۲} = \sqrt{(v\cos ۲۸^\circ)^۲ + (-v\sin ۲۸^\circ)^۲ + ۲gy}$$

با جای‌گذاری مقادیر داده شده، داریم :

$$v_\circ \simeq ۳۸ m/s$$

همچنین زاویهٔ پرتاب توپ برابر است با :

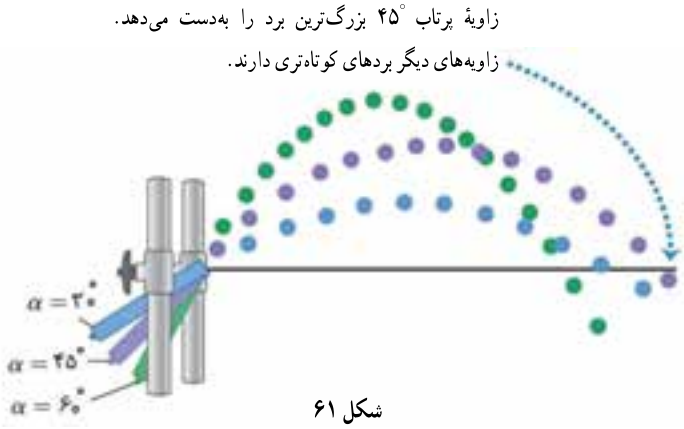
$$\alpha = \tan^{-۱}(\frac{v_{\circ y}}{v_{\circ x}}) = ۳۳^\circ$$

تمرین ۱ـ۵

با توجه به رابطهٔ ۱ـ۴۲ کتاب درسی، برد یک پرتابه برابر است با :

$$R = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\alpha}{g}$$

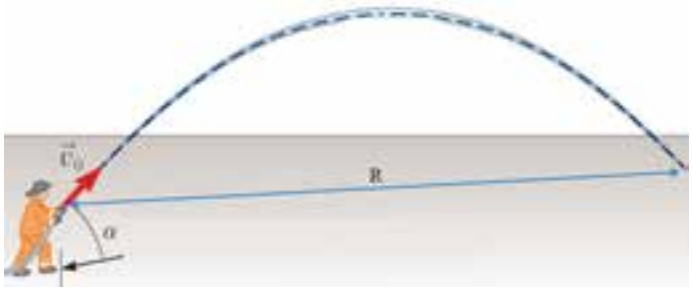
بیشینهٔ مقدار $\sin ۲\alpha$ یک است؛ این وضعیت هنگامی رخ می‌دهد که $۲\alpha = ۹۰^\circ$ یا $\alpha = ۴۵^\circ$ باشد. این زاویه بیشینهٔ برد به‌ازای یک سرعت اولیهٔ معین را به‌دست می‌دهد. شکل ۶۱ براساس یک عکس ترکیبی از سه مسیر پرتابه‌ای توپی است که از یک تفنگ فنری در زاویه‌های ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° پرتاب شده است. سرعت اولیه $v_\circ$ در هر سه‌مورد تقریباً یکسان است. همان‌طور که دیده می‌شود بردهای افقی برای زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° تقریباً یکسان و برای زاویهٔ ۴۵° بیش از آن دو است.



شکل ۶۱

فعالیت ۱ـ۷

شکل ۶۲ روش ساده‌ای را برای اندازه‌گیری سرعت خروج آب از شیلنگ نشان می‌دهد. با اندازه‌گیری زاویهٔ α و برد R، به کمک رابطهٔ ۱ـ۴۲ می‌توانید v_0 را پیدا کنید.



شکل ۶۲

فعالیت ۱ـ۶

آزمایشی پیشنهاد کنید که به کمک آن بتوان سرعت آب را در لحظهٔ خارج شدن از شیلنگ اندازه گرفت.

مثال ۱ـ۱۴

یک بازیکن فوتبال، توپی را تحت زاویهٔ 37° نسبت به افق، با سرعت اولیهٔ $10\,m/s$ شوت می کند. با فرض اینکه توپ در صفحهٔ xoy حرکت کند و مقاومت هوا ناچیز باشد:

الف) زمان رسیدن توپ به نقطهٔ اوج را به دست آورید.

ب) پس از چه زمانی توپ به زمین برمی‌گردد؟ $(\sin 37 = 0/6)$

شکل ۱ـ۲۱

پاسخ

الف) در نقطهٔ اوج مسیر داریم: $v_y = -gt + v_0 \sin\alpha$

$$0 = -9/8t + 10 \times 0/6 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{6}{9/8} = 0/6s$$

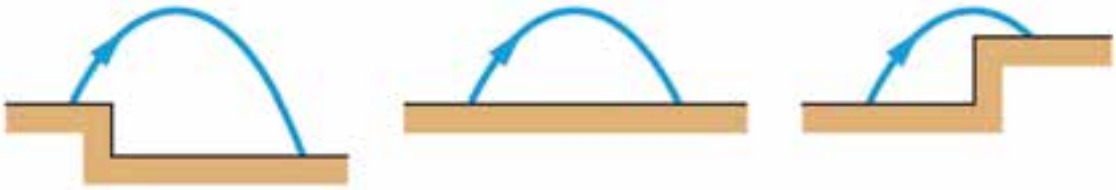
ب) در بازگشت به زمین $y = 0$ است.

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t$$

۳۰

پرسش‌های پیشنهادی

شکل ۶۳ سه حالت را نشان می‌دهد که در آنها پرتابه‌های یکسان با مقدار سرعت اولیه و زاویهٔ پرتاب یکسان و از ارتفاع یکسان پرتاب می‌شوند. اما این پرتابه‌ها در ارتفاع‌های متفاوتی فرود می‌آیند. این حالت‌ها را براساس مقدار سرعت پرتابه در زمان فرود پرتابه، از زیاد به کم، مرتب کنید.



الف ب پ

شکل ۶۳

پاسخ: پ، ب، الف

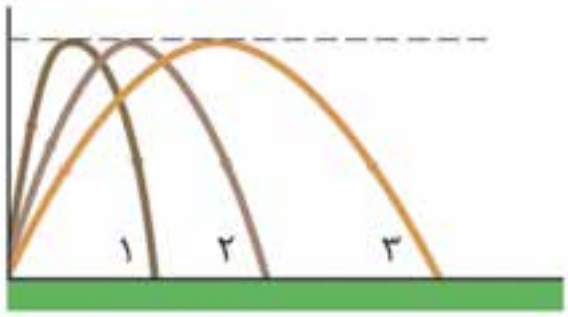
شکل ۶۴ سه مسیر حرکت یک توپ فوتبال را نشان می‌دهد که از سطح زمین شوت شده است. با نادیده گرفتن اثرهای مقاومت هوا، این سه مسیر را طبق شاخص‌های زیر از زیاد به کم مرتب کنید.

الف) زمان پرواز توپ.

ب) مؤلفهٔ قائم سرعت اولیه.

پ) مؤلفهٔ افقی سرعت اولیه.

ت) مقدار سرعت اولیه.



شکل ۶۴

پاسخ : الف) همه با هم مساوی‌اند.

ب) همه با هم مساوی‌اند.

پ) ۱، ۲، ۳.

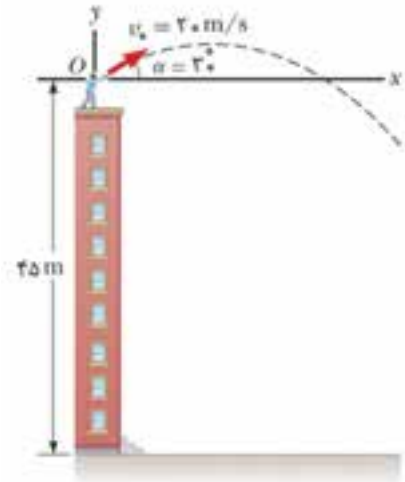
ت) ۱، ۲، ۳.

تمرین‌های پیشنهادی

سنگی از بالای ساختمانی با سرعت اولیهٔ ۲۰ m/s و در امتداد 30° بالای سطح افق پرتاب می‌شود (شکل ۶۵). با نادیده گرفتن مقاومت هوا مطلوب است :

الف) زمانی که طول می‌کشد تا سنگ به زمین برسد.

ب) بزرگی سرعت توپ درست پیش از برخورد به سطح زمین.



شکل ۶۵

پاسخ : الف) ۴/۲۲ s ، ب) ۳۵/۸ m/s

$0 = -4/9t^2 + (10 \times 0/6)t$

$t(-4/9t + 6) = 0 \Rightarrow t = 0 , t = 1/2s$

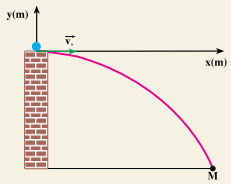
که در آن $t=0$ لحظهٔ پرتاب توپ و $t=1/2s$ لحظهٔ برخورد توپ به زمین (زمان کلّ حرکت) است.

تمرین ۱ــ۶

ارتفاع نقطهٔ اوج و نیز بُرد توپ را در مثال ۱ــ۱۴ محاسبه کنید.

مثال ۱ــ۱۵

از بالای برجی به ارتفاع ۴۹ متر، توپی با سرعت افقی ۲۲m/s پرتاب می شود. الف)چه مدت طول می کشد تا توپ به زمین برسد؟ ب) فاصلهٔ نقطهٔ برخورد توپ با زمین تا پای برج چندمتر است؟ پ) سرعت توپ هنگام برخورد به زمین چه‌قدر است؟



شکل ۱ــ۲۲

پاسخ

الف) نقطهٔ پرتاب را مبدأ مختصات می‌گیریم. نقطهٔ M محل فرود توپ بر روی زمین است که برای آن $y_m = -49m$. با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۳۹ داریم :

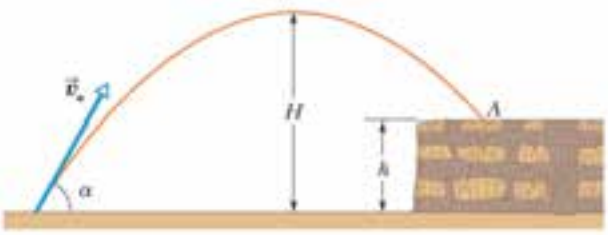
۳۱

در شکل ۶۶، سنگی را به سمت صخره‌ای که ارتفاع آن برابر h است پرتاب کرده‌ایم. مقدار سرعت اولیهٔ سنگ ۴۲ m/s است و جهت آن زاویهٔ $\alpha = ۶۰^\circ$ نسبت به افق دارد. این سنگ ۵/۵ ثانیه پس از پرتاب به نقطهٔ A برخورد می‌کند.

الف) ارتفاع h صخره را پیدا کنید.

ب) مقدار سرعت سنگ را درست قبل از برخورد در نقطهٔ A حساب کنید.

پ) حداکثر ارتفاع H که سنگ در این پرتاب به آن می‌رسد چقدر است؟



شکل ۶۶

پاسخ : الف) ۵۲ m.

ب) ۲۷/۴ m/s.

پ) ۶۷/۵ m.

تمرین ۱ـ۶

از رابطهٔ (۱ــ ۴۳) برای پیدا کردن ارتفاع نقطهٔ اوج توپ استفاده می‌کنیم؛

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{(10\,m/s)^2 \sin^2 37^\circ}{2\times(9/8\,m/s^2)} \simeq 1/85\,m$$

و از رابطهٔ (۱ــ۴۳) برای محاسبهٔ برد توپ بهره می‌گیریم؛

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(10\,m/s)^2 \sin 74^\circ}{9/8\,m/s^2} = 9/8\,m$$

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + (v_۰ \sin\alpha)t$$
$$-۴۹ = -۴/۹t^۲ + ۰$$
$$t = \sqrt{۱۰} \simeq ۳/۲s$$

ب) برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ فرود تا پای برج از معادلهٔ ۱ــ۳۷ استفاده می کنیم :

$$x = (v_۰ \cos\alpha)t$$
$$x = (۲۲\times۱)\times۳/۲ = ۷۰/۴m$$

پ) مؤلفه‌های سرعت را در لحظهٔ برخورد با زمین از رابطه‌های ۱ــ۳۸ و ۱ــ۴۰ به دست می‌آوریم :

$$v_x = v_۰ \cos\alpha = ۲۲\times۱ = ۲۲m/s$$

و

$$v_y = -gt + v_۰ \sin\alpha = -۹/۸\times۳/۲ + ۰ = -۳۱/۳۶\,m/s$$
$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \sqrt{۲۲^۲ + ۳۱/۳۶^۲} = \sqrt{۴۸۴ + ۹۸۳/۴}$$
$$v \simeq ۳۸\ m/s$$

تمرین‌های فصل اوّل

۱ــ معادلهٔ حرکت جسمی در SI به‌صورت $x = t^۳ - ۳t^۲$ است. مطلوب است :

الف) بزرگی سرعت متوسط جسم در بازهٔ زمانی ۱ تا ۲ ثانیه.

ب) بزرگی سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۴s$.

پ) بزرگی شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۲ تا ۳ ثانیه.

ت) بزرگی شتاب متحرک در لحظهٔ $t = ۴s$.

۲ــ خودرویی در پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبز شدن چراغ، خودرو با شتاب $۲m/s^۲$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه، کامیونی با سرعت ثابت $۳۶km/h$ از کنار آن می‌گذرد.

الف) نمودارهای مکان ــ زمان و سرعت ــ زمان را برای اتومبیل و کامیون رسم کنید.

ب) پس از چه مدتی، اتومبیل به کامیون می‌رسد؟

۳۲

راهنمای پاسخ‌یابی تمرین‌های فصل اوّل

۱ــ الف) از رابطهٔ $\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ داریم : $\bar{v}_x = -۲m/s$

ب) از رابطهٔ $v_x = dx/dt$ داریم : $v_x = ۳t^۲ - ۶t$

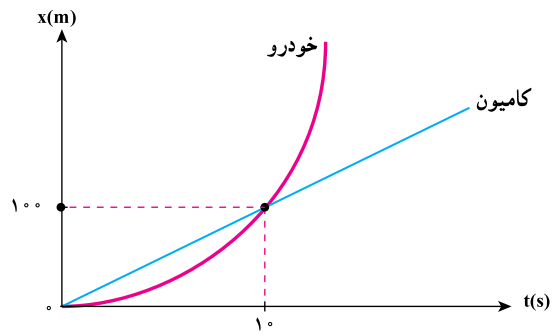
و در لحظهٔ $t = ۴s$ داریم : $v_x = ۲۴m/s$.

پ) از رابطهٔ $\bar{a}_x = \Delta v_x/\Delta t$ داریم : $\bar{a}_x = ۹m/s^۲$

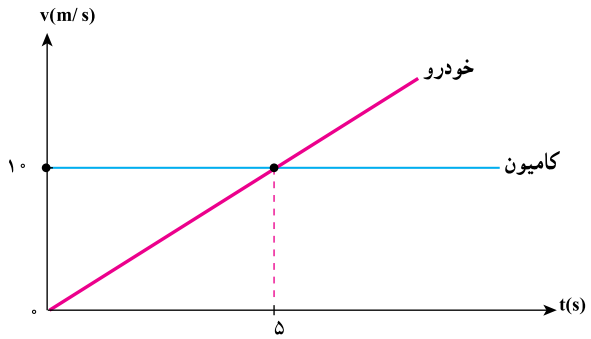
ت) از رابطهٔ $a_x = dv_x/dt$ داریم : $a_x = ۶t - ۶$

و در لحظهٔ $t = ۴s$ داریم : $a_x = ۱۸m/s^۲$.

۲ــ شکل ۶۷ نمودار مکان ــ زمان و شکل ۶۸ نمودار سرعت ــ زمان خودرو و کامیون را نشان می‌دهد.



شکل ۶۷



شکل ۶۸

۳ــ الف) مبدأ را نقطه‌ای می‌گیریم که توپ به طرف بالا پرتاب شده است. ۲ ثانیه طول می‌کشد تا توپ به نقطهٔ اوج خود برسد. به این ترتیب داریم :

$$v_y = -gt + v_{\circ y}$$

$$\circ = -(۱\circ m/s^۲)(۲s) + v_{\circ y} \Rightarrow v_{\circ y} = ۲\circ m/s$$

ب) ارتفاع نقطهٔ اوج توپ برابر است با :

$$\Delta y = \frac{v_y^۲ - v_{\circ y}^۲}{-۲g} = \frac{\circ - (۲\circ m/s)^۲}{-۲\times(۱\circ m/s^۲)} = ۲\circ m$$

پ) با توجه به این که مبدأ را نقطهٔ پرتاب توپ گرفتیم ($y_\circ = \circ$)، روی زمین داریم $y = -۲۵\,m$. به این ترتیب :

$$v_y^۲ - v_{\circ y}^۲ = -۲g\,(y - y_\circ)$$

$$v_y^۲ - (۲\circ m/s)^۲ = -۲\,(۱\circ m/s^۲)(-۲۵m - \circ)$$

$$\Rightarrow v_y = -۳\circ m/s$$

علامت منفی نشان می‌دهد جهت سرعت توپ هنگام برخورد به زمین، خلاف جهت مثبت محور y است.

ت) از رابطهٔ $v_y = -g\,t + v_{\circ y}$ داریم :

$$-۳\circ m/s = -(۱\circ m/s^۲)t + ۲\circ m/s \Rightarrow t = ۵s$$

۴ــ

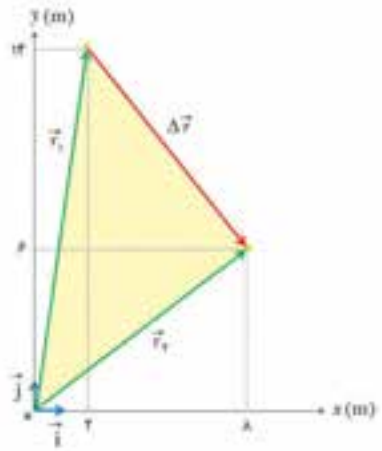
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱ = (۸\vec{i} + ۶\vec{j}) - (۲\vec{i} + ۱۴\vec{j}) = ۶\vec{i} - ۸\vec{j}$$

از رابطهٔ $\bar{\vec{v}} = \Delta\vec{r}/\Delta t$ داریم :

$$\bar{\vec{v}} = \frac{۶\vec{i} - ۸\vec{j}}{۲۵ - ۵} = \circ/۳\,\vec{i} - \circ/۴\,\vec{j}$$

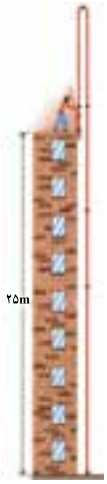
با فرض این که یکاها برحسب SI منظور شده‌اند، داریم :

$$\bar{v} = \sqrt{(\circ/۳)^۲ + (-\circ/۴)^۲} = \circ/۵\,m/s$$



شکل ۶۹

شکل ۶۹ نمودار بردارهای $\vec{r}_۱$، $\vec{r}_۲$ و $\Delta\vec{r}$ را در صفحهٔ xy نشان می‌دهد. با توجه به رابطهٔ $\bar{\vec{v}} = \Delta\vec{r}/\Delta t$، بردار سرعت متوسط $\bar{\vec{v}}$ نیز در جهت بردار $\Delta\vec{r}$ است.



شکل ۱ــ۲۳

۳ــ در شکل ۱ــ۲۳ توپی در راستای قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود و پس از ۴ ثانیه به نقطهٔ پرتاب برمی‌گردد. توپ :

الف) با چه سرعتی پرتاب شده است؟ ب) تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

پ) با چه سرعتی به زمین می‌رسد؟ ت) بعد از چند ثانیه به زمین می‌رسد؟ ($g = ۱\circ m/s^۲$)

۴ــ بردارهای مکان ذرهٔ متحرکی در لحظه‌های $t_۱ = ۵\,s$ و $t_۲ = ۲۵\,s$ به‌ترتیب $\vec{r}_۱ = ۲\vec{i} + ۱۴\vec{j}$ و $\vec{r}_۲ = ۸\vec{i} + ۶\vec{j}$ است. بزرگی سرعت متوسط این ذره را بین دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ به‌دست آورید. با رسم یک نمودار جهت $\bar{\vec{v}}$ را نشان دهید.

۵ــ معادلهٔ حرکت جسمی با دو رابطهٔ زیر، در SI داده شده است :

$y = ۲t^۲ + ۱\ ,\ x = ۶t$

الف) معادلهٔ سرعت جسم را بنویسید و بزرگی سرعت را در $t = ۲s$ محاسبه کنید.

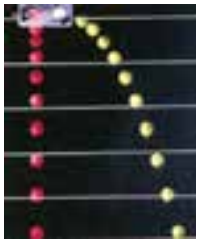
ب) معادلهٔ مسیر حرکت را به‌دست آورید.

پ) بردار سرعت متوسط جسم را بین لحظه‌های $t = ۱$ و $t = ۲$ ثانیه برحسب بردارهای یکهٔ $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.

۶ــ الف) سرعت یک پرتابه را در نقطهٔ اوج آن، برحسب $v_\circ$ و α به‌دست آورید.

ب) اگر نقطهٔ فرود و نقطهٔ پرتاب در یک صفحهٔ افقی باشند، بردار سرعت پرتابه را هنگام فرود برحسب α و $v_\circ$ به‌دست آورید.

۷ــ در شکل ۱ــ۲۴، گلولهٔ زرد رنگ در امتداد افق پرتاب شده است. اگر گلولهٔ قرمز رنگ نیز هم‌زمان با گلولهٔ زرد رنگ رها شده باشد، نشان دهید که ارتفاع این دو، در حین سقوط در تمام لحظه‌ها، یکسان خواهد بود.



شکل ۱ــ۲۴

۳۳

۵ــ الف)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ۶\,m/s \quad و \quad v_y = \frac{dy}{dt} = ۴t$$

$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} = ۶\,\vec{i} + ۴t\,\vec{j}$$

در لحظهٔ $t = ۲s$ داریم :

$$\vec{v} = ۶\,\vec{i} + ۸\,\vec{j} \Rightarrow v = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰\,m/s$$

ب)

$$t = \frac{x}{۶} \Rightarrow y = ۲(\frac{x}{۶})^۲ + ۱ \Rightarrow y = \frac{x^۲}{۱۸} + ۱$$

پ) بردار مکان جسم عبارت‌است از :

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = ۶t\,\vec{i} + (۲t^۲ + ۱)\,\vec{j}$$

در $t = ۱s$ داریم :

$$\vec{r}_۱ = ۶\,\vec{i} + ۳\,\vec{j}$$

در $t = ۲s$ داریم :

$$\vec{r}_۲ = ۱۲\,\vec{i} + ۹\,\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱ = ۶\,\vec{i} + ۶\,\vec{j}$$

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{۶\,\vec{i} + ۶\,\vec{j}}{۲ - ۱} = ۶\,\vec{i} + ۶\,\vec{j}$$

۶ ــ الف) در نقطهٔ اوج، مؤلفهٔ قائم سرعت پرتابه صفر است؛ یعنی $v_y = ۰$. به این ترتیب داریم :

$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} = v_{۰x}\cos\alpha\,\vec{i}$$

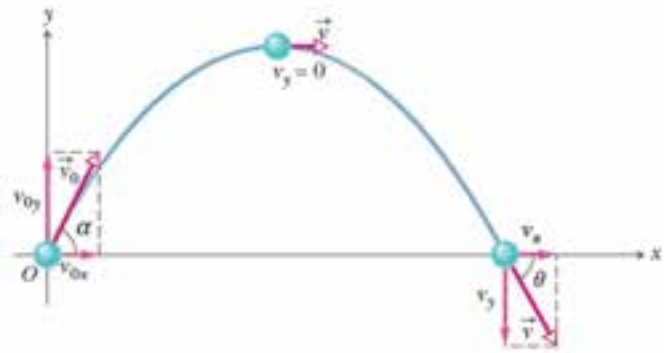
ب) شرایط مورد اشاره در مسئله در شکل ۷۰ نشان داده شده است. در نقطهٔ فرود داریم :

$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} = (v_۰\cos\alpha)\,\vec{i} + (-gt + v_۰\sin\alpha)\,\vec{j}$$

از آنجا که زمان کل حرکت پرتابه برابر است با :

$t = \frac{۲v_۰\sin\alpha}{g}$ ، داریم :

$$\vec{v} = (v_۰\cos\alpha)\,\vec{i} - (v_۰\sin\alpha)\,\vec{j}$$



شکل ۷۰

۷ــ از آنجا که گلولهٔ زرد رنگ در امتداد افق پرتاب شده است، داریم : $\alpha = ۰$. به این ترتیب معادلهٔ حرکت پرتابه در راستای محور y برابر است با :

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰ \sin\alpha t = -\frac{۱}{۲}gt^۲$$

یعنی، مکان دو توپ در امتداد محور y از رابطهٔ $y = -\frac{۱}{۲}gt^۲$ به دست می‌آید. پس ارتفاع این دو توپ در خلال سقوط در تمام لحظه‌ها یکسان خواهد بود.

۸ــ با توجه به این که برد پرتابه با $\sin ۲\alpha$ متناسب است به ازای دو وضعیت که زاویهٔ پرتاب $(۴۵^\circ - \theta)$ و $(۴۵^\circ + \theta)$ است، داریم :

$$\sin ۲(۴۵^\circ \pm \theta) = \sin ۹۰^\circ \cos ۲\theta \pm \cos ۹۰^\circ \sin ۲\theta = \cos ۲\theta$$

همان‌طور که دیده می‌شود در هر دو حالت برد پرتابه با $\cos ۲\theta$ متناسب است و در نتیجه بردها با یکدیگر مساوی‌اند.

تذکر : بهتر است به‌جای نماد α در شکل ۱ــ۲۵ کتاب درسی از نماد θ استفاده کنید. زیرا در این کتاب α به عنوان زاویهٔ پرتاب یک پرتابه به‌کار رفته است.

۹ــ مبدأ را محل پرتاب جسم و جهت روبه بالا را سوی مثبت y انتخاب می‌کنیم. چون جسم در امتداد افق پرتاب شده، زاویهٔ $\alpha = ۰$ است.

الف)

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + (v_۰ \sin\alpha)t$$

$$-۲۰m = -\frac{۱}{۲}(۹/۸m/s^۲)t^۲ + ۰ \Rightarrow t \simeq ۲s$$

ب)

$$x = (v_۰ \cos\alpha)t = (۳۰m/s)(\cos ۰^\circ)(۲s) = ۶۰m$$

پ)

$$v_x = v_۰ \cos\alpha = (۳۰m/s)\cos ۰^\circ = ۳۰m/s$$

$$v_y = -gt + v_۰ \sin\alpha = -(۹/۸m/s^۲)(۲s) + ۰ = -۱۹/۶m/s$$

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \sqrt{(۳۰m/s^۲) + (-۱۹/۶m/s)^۲} \simeq ۳۶m/s$$

۱۰ــ چون بسته از هواپیما رها می‌شود، مانند آن است که بسته را با سرعت $v_۰$ (سرعت افقی هواپیما) در امتداد افق $(\alpha = ۰)$ پرتاب کرده باشیم. زمانی که لازم است تا بسته ارتفاع قائم ۲۴۵ m را طی کند برابر است با :

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + (v_۰ \sin\alpha)t$$

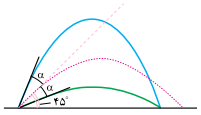
$$-۲۴۵m = -\frac{۱}{۲}(۹/۸m/s^۲)t^۲ + ۰ \Rightarrow t \simeq ۷s$$

مسافت افقی که در این مدت بسته طی می‌کند برابر است با :

$$x = (v_۰ \cos\alpha)t = (۱۰۰m/s)(\cos ۰^\circ)(۷s) = ۷۰۰m$$

بنابراین خلبان باید در فاصلهٔ افقی ۷۰۰ m مانده به سیل‌زدگان بسته را رها کند تا به آنها برسد.

۸ــ گالیله در یکی از کتاب‌های خود نوشته است : «برای زاویه‌های پرتابی که به یک اندازه از زاویهٔ ۴۵° بیشتر یا کمترند، بُردها مساوی‌اند...» (شکل ۱ــ۲۵). درستی این گفته را اثبات کنید.



شکل ۱ــ۲۵

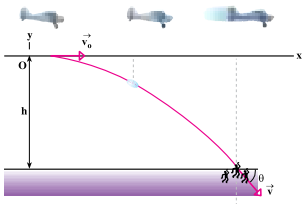
۹ــ از روی پلی به ارتفاع ۲۰ متر، بالای سطح آب یک رودخانه، جسمی را در راستای افقی با سرعت ۳۰m/s پرتاب می‌کنیم.

الف) چه زمانی طول می‌کشد تا جسم به آب برخورد کند؟

ب) فاصلهٔ افقی نقطهٔ برخورد به آب تا نقطهٔ پرتاب چه‌مقدار است؟

پ) بزرگی سرعت جسم هنگام برخورد با آب، چه‌مقدار است؟

۱۰ــ هواپیمایی که با سرعت ۳۶۰km/h در ارتفاع ۲۴۵m موازی با سطح زمین پرواز می‌کند، می‌خواهد بسته‌ای را برای سیل‌زدگان به پایین بیندازد (شکل ۱ــ۲۶). خلبان در چه فاصلهٔ افقی، بسته را رها کند تا به‌سیل‌زدگان برسد؟



شکل ۱ــ۲۶

۳۴

تذکر : در این مسئله نیز مبدأ مختصات را محل پرتاب بسته و جهت روبه بالا را سوی مثبت محور y انتخاب کرده‌ایم.

۱۱ــ الف) انرژی مکانیکی جسم در محل پرتاب برابر است با :

$$E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

انرژی مکانیکی جسم در نقطهٔ A برابر است با :

$$E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

با توجه به فرض‌های مسئله $(E_1 = E_2)$ داریم :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

ب) برای هر نقطهٔ دلخواه، از جمله نقطه A روی مسیر پرتابه (y =h)، داریم :

$$v_x = v_0\cos\alpha \quad \text{و} \quad v_y = -gt + v_0\sin\alpha$$

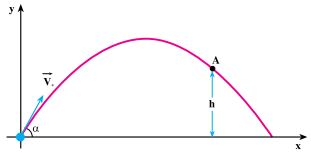
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (-gt + v_0\sin\alpha)^2}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2gtv_0\sin\alpha}$$

$$= \sqrt{v_0^2 - 2g\left[-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t\right]} = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

۱۱ــ مطابق شکل ۱ــ۲۷ جسمی به جرم m را با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_0$ و با زاویهٔ α نسبت به افق، پرتاب می‌کنیم. فرض کنید نیروی مقاومت هوا در برابر حرکت جسم قابل چشم‌پوشی است.

الف) با استفاده از قانون پایستگی انرژی مکانیکی، بزرگی سرعت جسم را در نقطهٔ A در ارتفاع h، از نقطهٔ پرتاب به‌دست آورید.

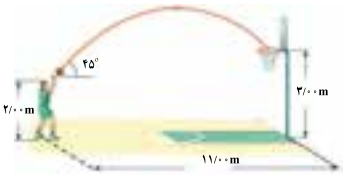


شکل ۱ــ۲۷

ب) بزرگی سرعت جسم را در نقطهٔ A با استفاده از معادله‌های حرکت پرتابی به‌دست آورید و آن را با نتیجهٔ قسمت «الف» مقایسه کنید.

۱۲ــ در شکل ۱ــ۲۸ سرعت اولیهٔ توپ را طوری حساب کنید که توپ داخل سبد بیفتد.

$g = 10\,m/s^2$



شکل ۱ــ۲۸

۳۵

همان‌طور که دیده می‌شود بزرگی سرعت پرتابه در نقطهٔ A از هردو روش به مقدار یکسانی منجر شد.

۱۲ــ در این مسئله نیز مبدأ مختصات را محل پرتاب توپ و جهت روبه بالا را سوی مثبت محور y انتخاب می‌کنیم. با این توصیف، مختصات سبد عبارت است از : $x = 11m$ و $y = 1m$

از معادلهٔ مسیر پرتابه داریم :

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha$$

$$1m = -\frac{(10\,m/s^2)(11m)^2}{2v_0^2\cos^2 45^\circ} + (11m)\tan 45^\circ$$

$$-10\,m = -\frac{(10\,m/s^2)(11m)^2}{2v_0^2(\frac{1}{2})} \Rightarrow v_0^2 = (11m/s)^2 \Rightarrow v_0 = 11m/s$$

با توجه به این که جهت سرعت اولیه 45° بالای افق است، علامت مثبت را برای سرعت اولیه برگزیده‌ایم.

برای دیدن نمونه آزمون تشریحی و چهارگزینه‌ای فصل به CD ضمیمه‌ی کتاب راهنما معلم یا وب‌سایت گروه فیزیک مراجعه کنید.