فصل اول

حرکت‌شناسی در دو بعد

گالیلئوگالیله : در سال ۱۵۸۱ میلادی به دانشگاه پیزا وارد شد، اما در سال ۱۵۸۵ قبل از آن که مدرکی بگیرد از آنجا بیرون آمد. پیش خودش به مطالعهٔ آثار اقلیدس و ارشمیدس پرداخت و به زودی آن‌قدر یادگرفت که توانست در فلورانس به دانشجویان درس بدهد. در سال ۱۵۸۶، رسالهٔ کوتاهی با عنوان **ترازوی کوچک** نوشت و در آن همان استدلالی را بازسازی کرد که معتقد بود ارشمیدس با استفاده از آن توانسته است بفهمد که زرگر سازندهٔ تاج شاهی هرون، در ساخت آن فلزی سبک‌تر از طلا را هم به کار برده است.

در سال ۱۵۸۹ به استادی ریاضیات در دانشگاه پیزا منصوب شد. در فاصلهٔ سال‌های ۱۵۸۹ تا ۱۵۹۲ به بالای برج پیزا رفت و به منظور مردود کردن نظریات ارسطو، نشان داد که اجسامی با وزن‌های مختلف همه با هم به زمین سقوط می‌کنند. گالیله در سال ۱۵۹۲ به استادی کرسی ریاضیات دانشگاه پادوا منصوب شد و در سال ۱۵۹۷ اولین نشانه‌های دل سپردگی او به نظریهٔ کوپرنیک دیده می‌شود.

در حدود سال ۱۶۰۲، گالیله شروع به آزمایش‌های سقوط اجسام کرد و در سال ۱۶۰۹ موفق به ساخت تلسکوپی با بزرگنمایی ۹ برابر شد. ادامهٔ زندگی‌نامهٔ گالیله را در CD ضمیمهٔ کتاب ببینید.

هدف‌های آموزشی فصل

انتظار می‌رود دانش‌آموزان با مطالعهٔ این فصل مفاهیم زیر را فرا بگیرند :

- چگونه حرکت بر خط راست برحسب سرعت متوسط، سرعت لحظه‌ای، شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای توصیف می‌شود.
- نمودارهای مکان برحسب زمان، سرعت برحسب زمان و شتاب برحسب زمان چگونه تفسیر می‌شوند.
- وقتی شتاب ثابت نیست حرکت بر خط راست چگونه تحلیل می‌شود.
- مکان جسم در یک بعد و دو بعد چگونه با استفاده از بردار مکان نمایش داده می‌شود.
- چگونه با دانستن مسیر جسم، سرعت برداری آن تعیین می‌شود.
- شتاب برداری چگونه محاسبه می‌شود.
- مسیر خمیدهٔ یک پرتابه چگونه توصیف می‌شود.

حرکت شناسی در دو بعد

نگاهی به فصل : دربارهٔ حرکت‌هایی که در اطراف ما رخ می‌دهد، اغلب، پرسش‌های زیادی برای ما مطرح می‌شود؛ پرسش‌هایی چون : سیاره‌ها در چه مسیرهایی به دور خورشید حرکت می‌کنند؟ چرا هنگامی که فنری را می‌کشیم و رها می‌کنیم، نوسان می‌کند؟ ماهواره‌ها را چگونه در مدار زمین قرار می‌دهند؟ و... پاسخ این پرسش‌ها را باید در علم مکانیک جست‌وجو کرد. علمی که در آن حرکت اجسام مورد بررسی قرار می‌گیرد. هنگامی که چگونگی حرکت را توصیف می‌کنیم، با بخشی از علم مکانیک که **حرکت‌شناسی** نامیده می‌شود، سروکار داریم. بخش دیگری از علم مکانیک، **دینامیک** است که به بررسی رابطهٔ بین حرکت و نیرو می‌پردازد.

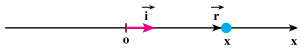
در فیزیک (۲) و آزمایشگاه تا اندازه‌ای حرکت‌شناسی در یک بعد را مورد بررسی قرار دادیم، با کمیت‌های مکان، جابه‌جایی سرعت متوسط و ... آشنا شدیم، و حرکت یکنواخت و حرکت با شتاب ثابت برروی یک خط راست را نیز بررسی کردیم. ما در زندگی روزمره بیشتر با حرکت‌هایی که در دو بعد و سه بعد انجام می‌شوند سروکار داریم، و بررسی آنها اهمیت بیشتری دارد؛ از این رو، در این فصل، پس از یادآوری مطالبی که در کتاب فیزیک (۲) و آزمایشگاه خوانده‌اید، به بررسی حرکت در دو بعد می‌پردازیم.

۱ــ۱ــ حرکت در یک بعد

در شکل ۱ــ۱ جسمی بر روی محور x نمایش داده شده است. مکان جسم در این شکل با بردار $\vec{r}$ مشخص شده است. بردار $\vec{r}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\vec{r} = x\,\vec{i} \qquad (۱ــ۱)$$

در این رابطه، $\vec{i}$ بردار یکّه در جهت محور x است.



شکل ۱ــ۱

۲

۱ــ۱ــ حرکت در یک بعد

راهنمای تدریس : دانش‌آموزان در فیزیک۲ و آزمایشگاه تا حدود زیادی با تحلیل حرکت جسم در یک بعد و معادله‌های مربوط به آن آشنا شده‌اند. آنچه این بخش را نسبت به دانسته‌های قبلی دانش‌آموزان متمایز می‌سازد، سازوکار برداری است که برای توصیف حرکت به کار رفته است. دانش‌آموزان باید توجه کنند که گزینش جهت محور مختصات اختیاری است و هنگامی که این گزینش را انجام دادند هنگام تعبیر علامت کمیت‌های مختلف حرکت باید به آن نظر داشته باشند.

برای آن که بین دانسته‌های قبلی دانش‌آموزان و مفاهیم این بخش ارتباط معنی داری برقرار شود مثال‌های زیر یا هر مثال مشابه دیگری را که مناسب می‌دانید مطرح کنید.

مثال پیشنهادی

معادلهٔ حرکت جسمی روی خط راست در SI با رابطهٔ زیر بیان می‌شود :

$$x = ۲t^۲ - ۴t + ۱$$

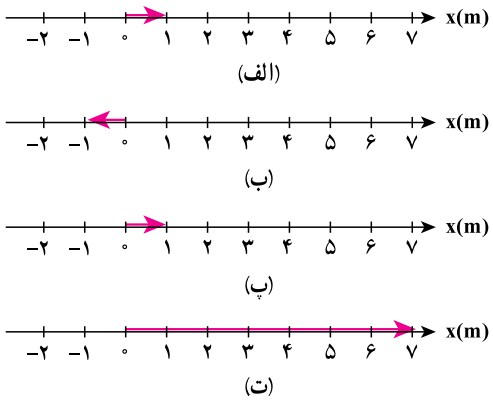
الف) بردار مکان جسم را در لحظه‌های ۳, ۲, ۱, $t = ۰$ ثانیه روی محور x نمایش دهید.

ب) نمودار مکان ــ زمان، $(x-t)$، آن را رسم کنید.

حل : الف) با توجه به معادلهٔ حرکت جسم، جدول زیر را کامل می‌کنیم.

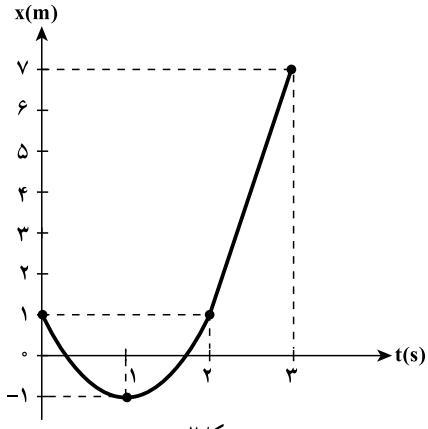
t(s)	۰	۱	۲	۳
x(m)	۱	−۱	۱	۷

از مقادیر به دست آمده در جدول بالا، بردار مکان جسم در لحظه‌های مورد نظر در شکل‌های الف، ب، پ و ت رسم شده است.



شکل۱

ب) با توجه به مقادیر به دست آمده در جدول، نمودار مکان ــ زمان جسم در شکل ۲ رسم شده است.

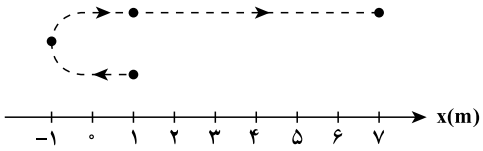


شکل۲

مثال پیشنهادی

حل : مسیر حرکت جسم را در مثال بالا رسم کنید.

با توجه به مقادیر به دست آمده در جدول مثال بالا، مسیر حرکت جسم در شکل ۳ رسم شده است.



شکل۳

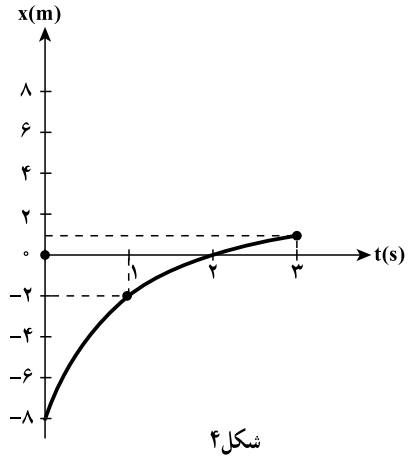
دانش‌آموزان باید توجه کنند که در شکل ۳ باید مسیر روی محور x رسم شود، ولی برای نمایش بهتر مسیر، آن را به‌صورتی که در شکل با نقطه‌چین نشان داده شده است، رسم کرده‌ایم.

تمرین ۱ـ۱

حل : الف) با توجه به معادلهٔ حرکت جسم، جدول زیر را کامل می‌کنیم.

t(s)	۰	۱	۲	۳
x(m)	−۸	−۳	۰	۱

به کمک مقادیر به دست آمده در جدول، نمودار مکان ــ زمان جسم در شکل ۴ رسم شده است.



شکل۴

هنگامی که جسم روی محور x حرکت می‌کند، در هر لحظه بردار مکان آن تغییر می‌کند. برای توصیف حرکت جسم،یعنی برای مشخص کردن بردار مکان جسم در لحظهٔ t کافی است که x را به صورت تابعی از زمان داشته باشیم :

$$x=f(t) \qquad (۱ــ۲)$$

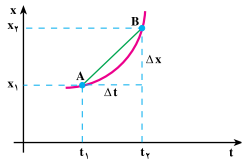
این رابطه، **معادلهٔ حرکت** جسم نامیده می‌شود.

در کتاب فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم که حرکت جسم را می‌توان به صورت نموداری در دستگاه مختصات مکان ــ زمان نمایش داد؛ به عبارت دیگر، این نمودار با رسم تابع $x=f(t)$ در دستگاه مختصات t ــ x به‌دست می‌آید.

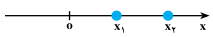
تمرین ۱ــ۱

معادلهٔ حرکت جسمی در یک بعد در SI با رابطهٔ $x = -t^2 + 6t - 8$ بیان شده است. الف) نمودار مکان ــ زمان آن را رسم کنید. ب) بردار مکان جسم را در زمان‌های $t = 0$ ، ۱ ، ۳ (s) روی محور x نمایش دهید.

سرعت متوسط : نمودار مکان ــ زمان جسمی در شکل ۱ــ۲ــ الف نمایش داده شده است. همان‌طور که در شکل ۱ــ۲ــ ب نشان داده شده است، متحرک در لحظهٔ t_1 در مکان x_1 (نقطهٔ A) روی نمودار مکان ــ زمان و در لحظهٔ t_2 در مکان x_2 (نقطهٔ B) قرار دارد.



شکل ۱ــ۲ــ الف



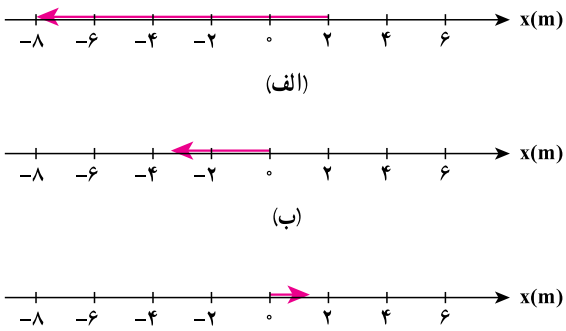
شکل ۱ــ۲ــ ب

در این شکل، $\Delta x = x_2 - x_1$ مقدار جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$، و نسبت $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، که شیب خط AB در دستگاه مکان ــ زمان است، سرعت متوسط متحرک نامیده می‌شود. این کمیت را با $\bar{v}_x$ نشان دادیم :

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (۱ــ۳)$$

۳

ب) بردار مکان جسم در لحظه‌های مورد نظر در جدول بالا، در شکل‌های ۵ــ الف، ب و پ رسم شده است.



شکل۵

سرعت متوسط

راهنمای تدریس : پس از بررسی مفهوم سرعت متوسط، خوب است توجه دانش‌آموزان را به چند قاعدهٔ ساده در خصوص سرعت متوسط در امتداد محور x جلب نمایید :

● هرگاه x مثبت و روبه افزایش باشد یا منفی بوده و قدر مطلق آن رو به کاهش باشد، ذره در جهت x+ در حرکت است و $\bar{v}_x$ مثبت است.

● هرگاه x مثبت و رو به کاهش باشد یا منفی بوده و قدر مطلق آن رو به افزایش باشد، ذره در جهت x− در حرکت است و $\bar{v}_x$ منفی است.

مثال پیشنهادی

معادلهٔ مکان ــ زمان جسمی که روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به‌صورت زیر بیان می‌شود :

$$x = ۲t^۳ - ۴t + ۲$$

سرعت متوسط متحرک را در ۴ ثانیهٔ اول حرکت حساب کنید.

حل : مکان متحرک در لحظه‌های $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۴s$ ثانیه به ترتیب برابر است با :

$$x_۱ = ۲ \times ۰ - ۴ \times ۰ + ۲ = ۲m$$

و

$$x_۲ = ۲ \times ۴^۳ - ۴ \times ۴ + ۲ = ۱۱۴m$$

در این صورت جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $\Delta t = ۵s$ برابر است با :

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = ۱۱۴ - ۲ = ۱۱۲m$$

به این ترتیب سرعت متوسط متحرک برابر است با :

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۱۲}{۴} = ۲۸ m/s$$

تمرین پیشنهادی

اتومبیلی روی یک خط راست در راستای جاده‌ای حرکت می‌کند. فاصلهٔ اتومبیل از یک علامت توقف در جاده به‌صورت تابعی از زمان با معادلهٔ زیر داده می‌شود :

$$x(t) = \alpha t^۲ - \beta t^۳$$

که در آن $\alpha = ۱/۵ m/s^۲$ و $\beta = ۰/۰۵ m/s^۳$ است. سرعت متوسط اتومبیل را در هریک از بازه‌های زمانی زیر محاسبه کنید.

الف) از $t = ۰$ تا $t = ۲s$.

ب) از $t = ۰$ تا $t = ۴s$.

پ) از $t = ۲s$ تا $t = ۴s$.

پاسخ : الف) $+۲/۸ m/s$. ب) $+۵/۲ m/s$. پ) $+۷/۶ m/s$.

سرعت لحظه‌ای

راهنمای تدریس : نکتهٔ مهمی که در این قسمت دانش‌آموزان باید به آن توجه کنند این است که واژهٔ **لحظه** در فیزیک با تعریف محاوره‌ای آن، قدری متفاوت است. ممکن است عبارت «تنها یک لحظه طول می‌کشد» را در مواردی به‌کار بریم که در واقع منظور یک بازهٔ زمانی کوتاه است. ولی در فیزیک لحظه به هیچ وجه طول نمی‌کشد و لحظه به یک تک مقدار از زمان اشاره دارد.

یافتن سرعت لحظه‌ای از نمودار x−t : در اینجا فرصتی است تا این موضوع با مثال‌های بیشتری برای دانش‌آموزان تبیین گردد. همانطور که در کتاب درسی نیز اشاره شده است در نمودار مکان ــ زمان برای حرکت راست خط، سرعت لحظه‌ای x در هر نقطه با شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه برابر است. بسته به این که شیب خط مماس به چه نحوی باشد سرعت لحظه‌ای می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. شکل ۶ این سه امکان مختلف را نشان می‌دهد. در شکل ۶ حرکت یک ذره، در واقع به دو شیوه ترسیم شده است : (الف) در نمودار x − t و (ب) در نمودار حرکت. نمودار حرکت، مکان ذره در زمان‌های مختلف را همراه با پیکان‌هایی که نشان دهندهٔ سرعت ذره در هر لحظه‌اند نشان می‌دهد.

زیرنویس x مشخص می‌کند که حرکت در راستای محور x انجام می‌شود.

مثال ۱ــ۱

معادلهٔ حرکت جسمی در SI با رابطهٔ $x = 2t^2 + 1$ بیان شده است. سرعت متوسط آن را در بازه‌های زمانی (الف) ۱ تا ۲ ثانیه، (ب) ۱ تا ۱/۱ ثانیه، (پ) ۱ تا ۱/۰۱ ثانیه و (ت) ۱ تا ۱/۰۰۱ ثانیه به دست آورید.

پاسخ

الف) $\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$\bar{v}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{9-3}{2-1} = 6\,m/s$$

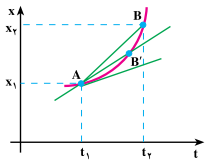
ب) $\bar{v}_x = \frac{3/42-3}{1/1-1} = 4/2\,m/s$

پ) $\bar{v}_x = \frac{3/0402-3}{1/01-1} = 4/02\,m/s$

ت) $\bar{v}_x = \frac{3/00402-3}{1/001-1} = 4/002\,m/s$

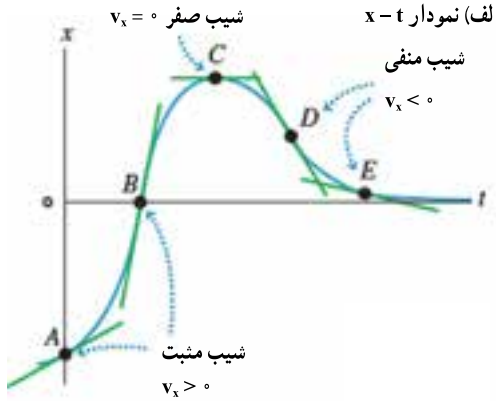
سرعت لحظه‌ای : در فیزیک(۲) و آزمایشگاه دیدیم که اگر بازهٔ زمانی Δt کوچک و کوچک‌تر شود، نقطهٔ B به نقطهٔ A نزدیک و نزدیک‌تر شده و سرانجام، خط AB در نقطهٔ A بر نمودار مماس می‌شود (شکل ۱ــ۳). شیب خط مماس را در این حالت، سرعت لحظه‌ای جسم در لحظهٔ t_1 می‌نامیم.

به‌عبارت دیگر، هنگامی که t_2 به t_1 نزدیک می‌شود، یعنی وقتی Δt به سمت صفر میل می‌کند، نسبت $\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ سرعت لحظه‌ای جسم را در لحظهٔ t_1 به دست می‌دهد. پس، **سرعت لحظه‌ای حد سرعت متوسط است، هنگامی که Δt به سمت صفر میل می‌کند.** سرعت لحظه‌ای را با v_x نمایش می‌دهیم؛ در نتیجه داریم :

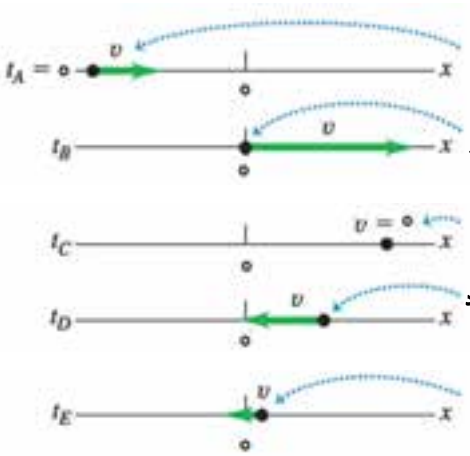


شکل ۱ــ۳

۴



هر چه شیب نمودار x − t یک جسم (چه مثبت چه منفی) بیشتر باشد. بزرگی سرعت آن در جهت x مثبت یا منفی بیشتر خواهد بود.



شکل ۶

پرسش پیشنهادی

شکل ۷ نمودار x – t حرکت ذره‌ای را در امتداد خط راست نشان می‌دهد.

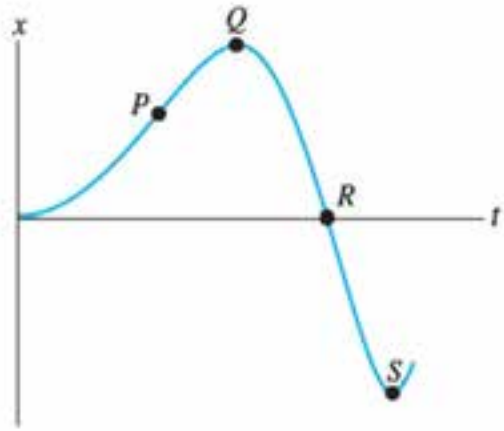
الف) مقدارهای سرعت ذره v_x را در نقطه‌های P، Q، R و S از مثبت‌ترین تا منفی‌ترین مرتب کنید.

ب) در چه نقطه‌هایی v_x مثبت است؟

پ) در چه نقطه‌هایی v_x منفی است؟

ت) در چه نقطه‌هایی v_x صفر است؟

ث) بزرگی سرعت ذره را در نقطه‌های P، Q، R و S از سریع‌ترین تا کندترین مرتب کنید.



شکل۷

پاسخ : الف) P، Q، S و R.

ب) درنقاطی که شیب نمودار مثبت است.

پ) در نقاطی که شیب نمودار منفی است.

ت) در نقاطی که شیب نمودار صفر است.

ث) R، P، Q و S، در جایی که نمودار تندترین شیب (چه مثبت چه منفی) را دارد، مقدار سرعت بیشترین و هرجا شیب صفر باشد، سرعت صفر است.

$$v_x = \text{حد}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (۱\text{ـ}۴)$$

در درس ریاضی دیده‌اید که این حد برابر مشتق تابع x نسبت به زمان است که به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad (۱\text{ـ}۵)$$

اگر $x = f(t)$ معلوم باشد، از رابطهٔ ۱ـ۵ می‌توان v_x را به صورت تابعی از زمان به دست آورد؛ این تابع معادلهٔ سرعت نامیده می‌شود. در حالت حدی، وقتی که Δt به سمت صفر میل می‌کند، وتر AB در نقطهٔ A بر نمودار مکان ــ زمان مماس می‌شود. این همان تعبیر هندسی **مشتق** است که در درس ریاضی خوانده‌اید. از این پس، سرعت لحظه‌ای را ــ برای اختصار ــ سرعت می‌نامیم.

مثال ۱ــ۲

در مثال ۱ــ۱، معادلهٔ حرکت متحرک به صورت $x=2t^2+1$ است.

الف) معادلهٔ سرعت آن را به دست آورید.

ب) نمودار سرعت ــ زمان را برای آن رسم کنید.

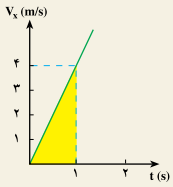
پ) سرعت متحرک را در لحظهٔ $t = 1s$ به دست آورید.

پاسخ

الف) با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۵ داریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4t$$

ب) نمودار سرعت ــ زمان به صورت خط راستی است که از مبدأ دستگاه v ــ t می‌گذرد.



شکل ۱ــ۴

۵

مثال پیشنهادی

معادلهٔ مکان ــ زمان متحرکی در SI به‌صورت $x = ۸t - ۲t^۲$ است.

الف) نمودار $x - t$ این متحرک را بین $t = ۰$ و $t = ۵s$ رسم کنید.

ب) به کمک نمودار $x - t$، سرعت متوسط متحرک را در این بازهٔ زمانی به دست آورید.

پ) سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۲s$ چقدر است؟

حل : الف) نمودار مکان ــ زمان متحرک با استفاده از نقطه‌یابی در شکل ۸ رسم شده است.

ب) با توجه به نمودار شکل ۸، شیب خط OA برابر سرعت متوسط است. به این ترتیب داریم :

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۱۰}{۵} = -۲m/s$$

پ) به دو روش می‌توان سرعت متحرک را در لحظهٔ $t = ۲s$ به دست آورد. با توجه به نمودار $x - t$ در شکل ۸، شیب خط مماس بر منحنی در لحظهٔ $t = ۲s$ صفر است. در نتیجه سرعت متحرک در این لحظه صفر است.

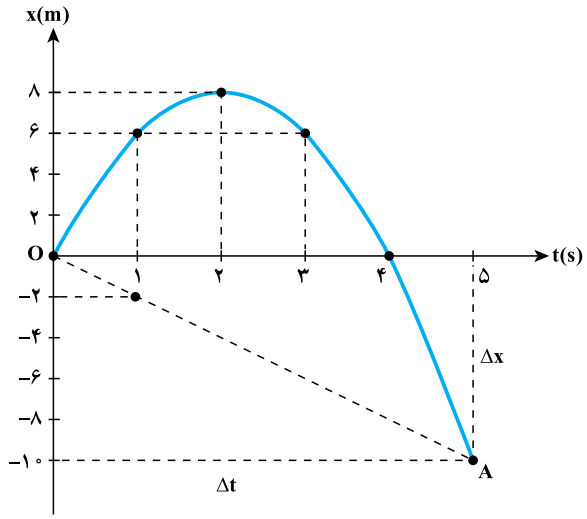
روش دوم با استفاده از معادلهٔ سرعت متحرک است. در این صورت داریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ۸ - ۴t$$

در نتیجه در لحظهٔ $t = ۲s$ داریم :

$$v_x = ۸ - ۴ \times ۲ = ۰$$

t(s)	x(m)
۰	۰
۱	۶
۲	۸
۳	۶
۴	۰
۵	−۱۰



شکل ۸

اتومبیلی پشت چراغ راهنمایی ایستاده است. پس از سبز شدن چراغ در راستای جادهٔ مستقیمی به حرکت درمی‌آید به‌طوری که فاصلهٔ آن از چراغ با معادلهٔ $x = bt^۲ + ct^۳$ داده می‌شود که در آن $b = ۲/۴\ m/s^۲$ و $c = ۰/۱۲\ m/s^۳$ است.

الف) سرعت متوسط اتومبیل را در بازهٔ زمانی از $t = ۰$ تا $t = ۱۰\ s$ محاسبه کنید.

ب) سرعت لحظه‌ای اتومبیل را در $t = ۰$ ، $t = ۵s$ و $t = ۱۰\ s$ محاسبه کنید.

پ) این اتومبیل چه مدت پس از شروع حرکت دوباره می‌ایستد؟

پاسخ : الف) $۱۲\ m/s$.

ب) $۰\ m/s$ ، $۱۵\ m/s$ و $۱۲\ m/s$.

پ) $۱۳/۳\ s$.

شخصی از خانهٔ خود خارج شده و در امتداد خط راست شروع به پیاده‌روی می‌کند. پس از ۵ دقیقه باران شروع به باریدن می‌کند و شخص به خانه باز می‌گردد.

فاصلهٔ شخص از خانه‌اش به صورت تابعی از زمان در شکل ۹ نشان داده شده است. در کدامیک از نقطه‌های نشان داده شده سرعت شخص

الف) صفر است؟

ب) ثابت و مثبت است؟

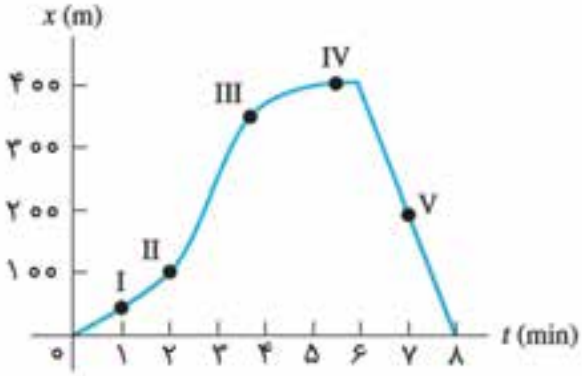
پ) ثابت و منفی است؟

ت) بزرگی آن رو به افزایش است؟

ث) بزرگی آن رو به کاهش است؟

پاسخ : الف) نقطهٔ IV. ، ب) نقطهٔ I.

پ) نقطهٔ V. ، ت) نقطهٔ II. و ث) نقطهٔ III.



شکل ۹

توپی در امتداد افق و روی خط راستی (محورx) حرکت می‌کند. نمودار شکل ۱۰ سرعت این توپ را به‌صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد.

پ) $v_x = ۴t$

$t = ۱s \Rightarrow v_x = ۴m/s$

این نتیجه را می‌توانستیم از مثال ۱ــ۱ حدس بزنیم؛ زیرا در آن مثال با نزدیک شدن $t_۲$ به $t_۱$، سرعت متوسط جسم نیز به مقدار $۴m/s$ (سرعت جسم در لحظهٔ $t = ۱s$) نزدیک می‌شود.

بردار سرعت متحرک را، در حرکت یک بعدی ، می‌توان به صورت زیر نمایش داد :

$$\vec{v} = v_x \vec{i} \qquad (۶ــ۱)$$

هنگامی‌که جسم در جهت محور x حرکت می‌کند، v_x مثبت است (چرا؟) و در نتیجه، بردار سرعت جسم در جهت این محور قرار می‌گیرد. هنگامی‌که جسم در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، v_x منفی است و بردار سرعت در جهت عکس این محور قرار می‌گیرد.

مثال ۱ــ۳

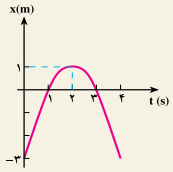
معادلهٔ حرکت جسمی در SI با رابطهٔ $x = -t^۲ + ۴t - ۳$ بیان شده است. الف) معادلهٔ سرعت آن را به دست آورید. ب) نمودارهای مکان ــ زمان و سرعت ــ زمان متحرک را در ۴ ثانیهٔ اول رسم کنید. پ) نمودار مسیر حرکت جسم را رسم و چگونگی حرکت را توصیف کنید.

پاسخ

الف) با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۵ داریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -۲t + ۴$$

ب) نمودار مکان ــ زمان متحرک به صورت یک سهمی (شکل ۱ــ۵) است که بیشینهٔ آن در لحظهٔ $t = ۲s$ است (چرا؟). همچنین، جسم در لحظه‌های $t = ۱s$ و $t = ۳s$ در مبدأ و در لحظهٔ $t = ۰$، در نقطهٔ $x = -۳m$ قرار دارد.

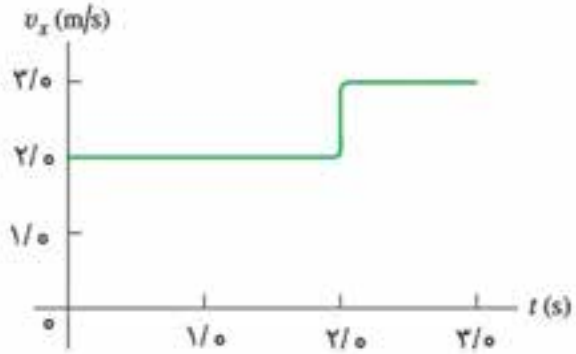


شکل ۱ــ۵

۶

الف) بزرگی سرعت متوسط (مسافت پیموده شده بر زمان) و سرعت متوسط توپ در طی ۳ ثانیهٔ نخست چقدر است؟

ب) فرض کنید که توپ به گونه‌ای حرکت می‌کرد که آن بخش از نمودار که مربوط به بعد از ۲s است به جای ۳ m/s+ برابر ۳ m/s− می‌بود. بزرگی سرعت متوسط و سرعت متوسط توپ را در این مورد حساب کنید.

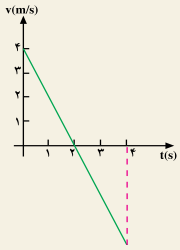


شکل ۱۰

پاسخ : الف) ۲/۳۳ m/s و ۲/۳۳ m/s.

ب) ۲/۳۳ m/s و ۰/۳۳ m/s.

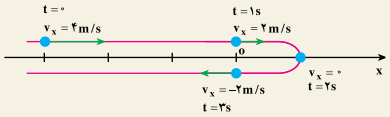
نمودار سرعت ــ زمان متحرک به صورت یک خط راست است (شکل ۱ــ۶) که در بند (الف) معادلهٔ آن را به دست آوردیم.



شکل ۱ــ۶

ب) با توجه به این نمودارها ملاحظه می‌شود که متحرک در لحظهٔ $t = ۰$ در مکان $x = -۳m$ قرار دارد و با سرعت ۴m/s در جهت محور x حرکت می‌کند. سپس سرعت آن به تدریج کاهش می‌یابد (شیب مماس بر نمودار مکان ــ زمان در شکل ۱ــ۵ به تدریج کم می‌شود) تا در لحظهٔ $t = ۲s$ که سرعت آن صفر می‌شود. می‌توان گفت شیب مماس بر نمودار مکان ــ زمان در این لحظه صفر می‌شود.

از لحظهٔ $t = ۲s$ به بعد متحرک برمی‌گردد و در خلاف جهت محور x شروع به حرکت می‌کند و v_x منفی می‌شود. در برگشت، اندازهٔ سرعت افزایش می‌یابد و در لحظهٔ $t = ۳s$ دوباره از مبدأ می‌گذرد. در این لحظه، سرعت آن ۲m/s− است. مسیر حرکت جسم در شکل ۱ــ۷ رسم شده و بردار سرعت آن نیز روی شکل نمایش داده شده است.



شکل ۱ــ۷

در شکل ۱ــ۷ باید مسیر روی محور x رسم شود ولی ما برای این که مسیر را بهتر مشخص کنیم، آن را در بالا و پایین این محور رسم کرده‌ایم. ملاحظه می‌شود که در تمام مسیر رفت وبرگشت، معادلهٔ مکان و معادلهٔ سرعت جسم، به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شود :

$$x = -t^۲ + ۴t - ۳$$

$$v_x = -۲t + ۴$$

۷

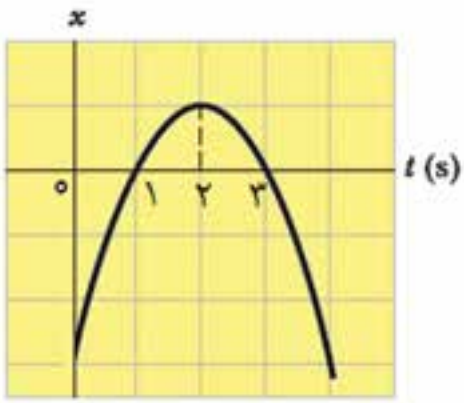
پرسش پیشنهادی

شکل ۱۱ نمودار مکان ــ زمان ذره‌ای را نشان می‌دهد که در امتداد محور x حرکت می‌کند.

الف) در زمان $t = ۰$، علامت مکان ذره چیست؟

ب) آیا سرعت ذره در هریک از لحظه‌های $t = ۱s$ ، $t = ۲s$ و $t = ۳s$ مثبت است یا منفی، یا صفر است؟

پ) این ذره چند بار از نقطهٔ $x = ۰$ عبور می‌کند؟



شکل ۱۱

تمرین پیشنهادی

مکان ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند، برحسب cm با $x = ۹/۷۵ + ۱/۵۰\, t^۳$ داده شده است، که در آن t برحسب ثانیه است. مطلوب است محاسبهٔ :

الف) سرعت متوسط ذره درحین بازهٔ زمانی $t = ۲s$ تا $t = ۳s$.

ب) سرعت لحظه‌ای ذره در $t = ۲s$.

پ) سرعت لحظه‌ای ذره در $t = ۳s$.

ت) سرعت لحظه‌ای ذره در $t = ۲/۵s$.

ث) سرعت لحظه‌ای هنگامی که ذره وسط مکان‌های خود در $t = ۲s$ و $t = ۳s$ قرار دارد.

پاسخ : الف) ۲/۸۵ cm/s ب) ۱۸/۰ cm/s پ) ۴۰/۵ cm/s

ت) ۲۸/۱ cm/s ث) ۳۰/۳ cm/s

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

راهنمای تدریس : یکی از مشکلاتی که از نظر درک مفهومی دانش‌آموزان معمولاً با آن مواجه‌اند، اشتباه گرفتن مفهوم شتاب و سرعت به جای یکدیگر است. دانش‌آموزان باید توجه کنند که :

سرعت توصیف می‌کند که مکان یک جسم با زمان چگونه تغییر می‌کند. همچنین می‌گوید که جسم چقدر سریع و در چه جهتی حرکت می‌کند.

در حالی که شتاب توصیف می‌کند که سرعت چگونه با زمان تغییر می‌کند. همچنین می‌گوید که جهت حرکت و بزرگی سرعت چگونه تغییر می‌کند.

به خاطرسپردن این گزاره می‌تواند برای دانش‌آموزان سودمند باشد که «ارتباط شتاب با سرعت، همانند ارتباط سرعت با مکان است.» همچنین گزارهٔ «همان‌گونه که سرعت آهنگ تغییر مکان با زمان را توصیف می‌کند، شتاب نیز آهنگ تغییر سرعت با زمان را به دست می‌دهد.» بیانی دیگر از ارتباط این کمیت‌ها نسبت به یکدیگر است.

نمودار شکل ۱۲، نمودار مفیدی برای نشان دادن شتاب‌های متوسط و لحظه‌ای است که خلاصه‌ای از مطالب این بخش را در بردارد.

مثال ۱ــ۴

متحرکی با سرعت ثابت 5m/s، در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. این متحرک در لحظهٔ $t = ۰$ از نقطهٔ $x = ۱۰m$ می‌گذرد. الف) معادلهٔ حرکت را بنویسید. ب) تعیین کنید که متحرک پس از چه زمانی به مبدأ مختصات می‌رسد.

پاسخ

الف) در فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم که معادلهٔ حرکت یکنواخت یک جسم روی خط راست با رابطهٔ :

$$x = v_x t + x_۰ \qquad (۷ــ۱)$$

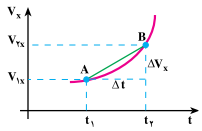
بیان می‌شود که در آن v_x سرعت (ثابت) جسم و $x_۰$ مکان جسم در لحظهٔ $t = ۰$ است؛ در نتیجه، چون در این مثال $x_۰ = +۱۰m$ و $v_x = -5m/s$ است، معادلهٔ حرکت جسم به‌صورت زیر خواهد بود.

ب)

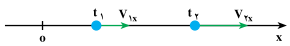
$$x = -5t + ۱۰$$

$$x = ۰ \Rightarrow = -5t + ۱۰ \Rightarrow t = ۲s$$

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای : می‌دانید هنگامی که سرعت جسم تغییر می‌کند، حرکت را **شتابدار** می‌نامند. در شکل ۱ــ۸ــ الف نمودار سرعت ــ زمان یک حرکت شتابدار و در شکل ۱ــ۸ــ ب بردار سرعت متحرک، در زمان‌های $t_۱$ و $t_۲$، نشان داده شده است.



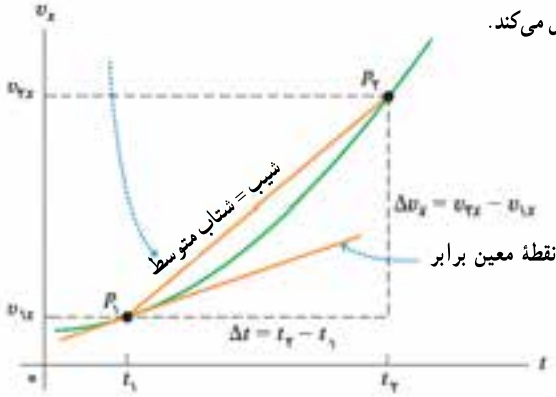
شکل ۱ــ۸ــ الف



شکل ۱ــ۸ــ ب

۸

شتاب متوسط x یک جسم در جابه‌جایی در راستای محور x برابر است با شیب خطی که نقطه‌های متناظر روی نمودار سرعت ($\bar{v}_x$) برحسب زمان (t) را به هم متصل می‌کند.



شیب مماس بر منحنی v_x–t در یک نقطهٔ معین برابر شتاب لحظه‌ای x در آن نقطه است.

شکل۱۲

هشدار در خصوص علامت‌های a_x و v_x : علامت جبری a_x به‌تنهایی دربارهٔ اینکه سرعت جسم رو به افزایش است یا کاهش، اطلاعی به ما نمی‌دهد. علامت‌های v_x و a_x را با هم باید مقایسه کرد. هرگاه v_x و a_x هم علامت باشند، سرعت جسم رو به افزایش است. اگر هر دو مثبت باشند جسم با سرعت رو به افزایش در جهت مثبت x در حرکت است. اگر هر دو منفی باشند جسم با سرعت v_x که منفی‌تر و منفی‌تر می‌شود، در جهت منفی x در حرکت است و باز هم بزرگی سرعت آن رو به افزایش است.

اگر v_x و a_x دارای علامت‌های مخالف هم باشند، سرعت جسم رو به کاهش است. اگر v_x مثبت و a_x منفی باشد، جسم با سرعت رو به کاهش در جهت مثبت حرکت می‌کند. اگر v_x منفی و a_x مثبت باشد، جسم در جهت منفی x با سرعت v_x که کمتر و کمتر منفی می‌شود در حرکت است و باز هم بزرگی سرعت آن رو به کاهش است. برخی از این وضعیت در شکل ۱۳ نشان داده شده‌اند.

همچنین، می‌دانید که $\Delta v_x = v_{۲x} - v_{۱x}$ را تغییر سرعت متحرک در بازهٔ زمانی Δt و نسبت $\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ را که شیب خط AB در نمودار سرعت ــ زمان است، شتاب متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی می‌نامند. این کمیت را با نماد $\bar{a}$ نشان می‌دهیم؛ در نتیجه داریم :

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad (۸\text{ــ}۱)$$

در این‌جا هم هنگامی که Δt بسیار کوچک و کوچک‌تر می‌شود، نقطهٔ B، در شکل ۱ــ۸ــالف، به نقطهٔ A نزدیک و نزدیک‌تر شده و سرانجام خط AB در نقطهٔ A بر نمودار سرعت ــ زمان مماس می‌شود. شیب خط مماس بر نمودار در نقطهٔ A را شتاب لحظه‌ای جسم در لحظهٔ $t_۱$ می‌نامیم.

اکنون می‌توان شتاب لحظه‌ای را، مانند سرعت لحظه‌ای، به‌طور دقیق این‌گونه تعریف کرد : هنگامی که Δt به سمت صفر میل می‌کند، نسبت $\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ شتاب لحظه‌ای جسم را در لحظهٔ $t_۱$ به دست می‌دهد؛ به عبارت دیگر، **شتاب لحظه‌ای حد شتاب متوسط است، هنگامی که Δt به سمت صفر میل می‌کند.** شتاب لحظه‌ای را با a_x نمایش می‌دهیم؛ در نتیجه داریم :

$$a_x = \underset{\Delta t \to ۰}{\text{حد}} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad (۹\text{ــ}۱)$$

به بیان ریاضی، شتاب لحظه‌ای مشتق سرعت نسبت به زمان است؛ از این پس، شتاب لحظه‌ای را ــ برای اختصار ــ شتاب می‌نامیم. اکنون با استفاده از رابطه‌های ۱ــ۵ و ۱ــ۹ شتاب را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$a_x = \frac{d^۲x}{dt^۲}$$

مثال ۱ــ۵

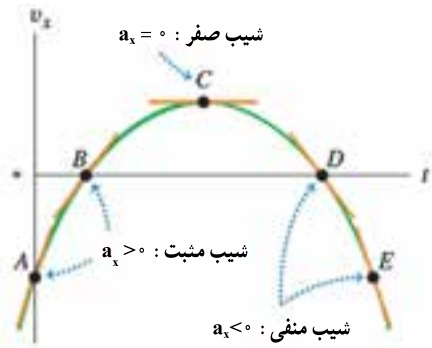
معادلهٔ حرکت جسمی در SI به صورت $x = t^۳ - ۶t^۲ + ۹t$ بیان شده است. الف) شتاب متوسط آن را در بازهٔ زمانی ۱ تا ۲ ثانیه به دست آورید. ب) شتاب آن را در لحظه‌های $t = ۰$ و $t = ۱$ ثانیه پیدا کنید.

پاسخ

الف) برای به دست آوردن شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی لازم است سرعت متحرک را در لحظه‌های $t = ۱s$ و $t = ۲s$ داشته باشیم. ابتدا معادلهٔ سرعت را به‌دست

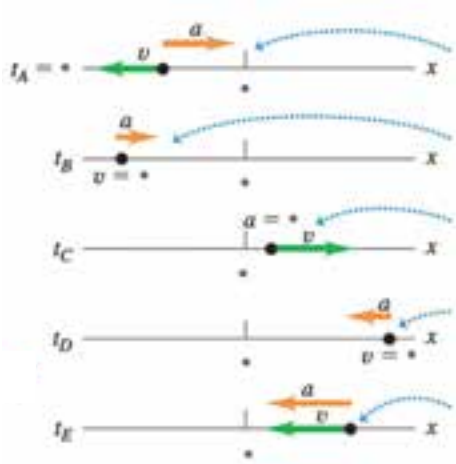
۹

(الف) نمودار v_x–t ذره‌ای که روی محور x حرکت می‌کند.



شکل۱۳ــ الف ــ هر چه شیب نمودار v_x–t یک جسم تندتر باشد (مثبت یا منفی)، شتاب جسم در جهت x مثبت یا منفی بیشتر است.

(ب) مکان، سرعت و شتاب ذره روی محور x



جسم در $x<0$ و در حرکت در جهت $-x$ ($v_x<0$) و در حال کاستن از سرعت خود است (v_x و a_x دارای علامت مخالف).

جسم در $x<0$ به‌طور لحظه‌ای ساکن است ($v_x=0$) و در آستانهٔ حرکت در جهت $+x$ است ($a_x>0$).

جسم در $x>0$ و در حرکت در جهت $+x$ ($v_x>0$) است و سرعت آن به‌طور لحظه‌ای بدون تغییر است ($a_x=0$).

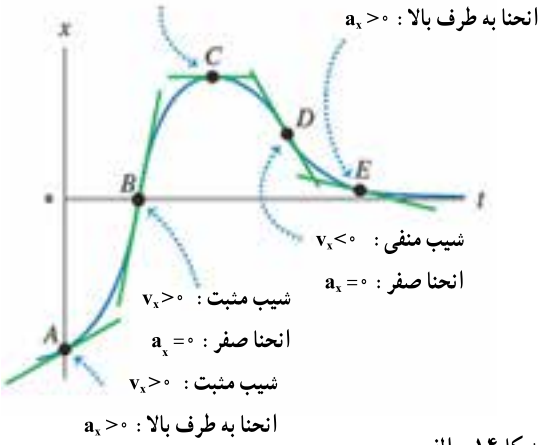
جسم در $x>0$ به‌طور لحظه‌ای ساکن است ($v_x=0$) و در آستانهٔ حرکت در جهت $-x$ است ($a_x<0$).

جسم در $x>0$ و در حرکت در جهت $-x$ ($v_x<0$) و در حال افزایش سرعت است (v_x و a_x هم علامت‌اند).

شکل۱۳ــ ب

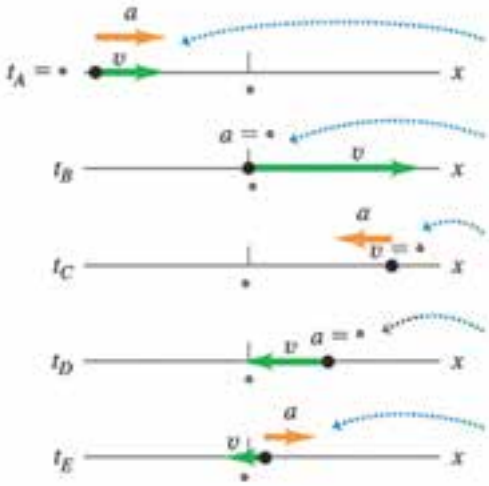
همچنین در شکل ۱۴ نمودار $x-t$ متحرکی نشان داده شده است که در امتداد محور x در حرکت است.

(الف) نمودار $x-t$



شکل۱۴ــ الف

(ب) حرکت جسم



جسم در $x<0$ در حال حرکت در جهت $+x$ ($v_x>0$) با سرعت رو به افزایش (v_x و a_x هم علامت).

جسم در $x=0$ در حال حرکت در جهت $+x$ ($v_x>0$) سرعت به‌طور لحظه‌ای بدون تغییر ($a_x=0$).

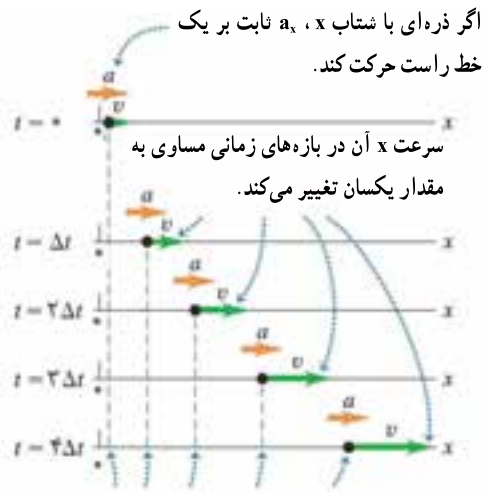
جسم در $x>0$، به‌طور لحظه‌ای ساکن ($v_x=0$) و در آستانهٔ حرکت در جهت $-x$ ($a_x<0$).

جسم در $x>0$ در حال حرکت در جهت $-x$ ($v_x<0$)؛ سرعت به‌طور لحظه‌ای بدون تغییر ($a_x=0$).

جسم در $x>0$ در حال حرکت در جهت $-x$ ($v_x<0$) با سرعت رو به کاهش (v_x و a_x با علامت‌های مخالف).

شکل۱۴ــ ب

ساده‌ترین نوع حرکت شتابدار، که دانش‌آموزان در فیزیک (۲) و آزمایشگاه با برخی از جوانب آن آشنا شدند، حرکت راست خط با شتاب است. نمودار شکل۱۵ می‌تواند مرور مناسبی باشد بر مفاهیم این حرکت. این شکل نمودار حرکتی است که مکان، سرعت و شتاب را برای ذره‌ای که با شتاب ثابت حرکت می‌کند نشان می‌دهد.



ولی مکان در بازه‌های زمانی مساوی به مقدارهای متفاوت تغییر می‌کند، زیرا سرعت در حال تغییر است.

شکل ۱۵

تمرین ۱ـ۲

پاسخ : با توجه به این که شیب خط مماس بر منحنی سرعت ــ زمان برابر شتاب لحظه‌ای متحرک است، در بازه‌های زمانی (t_1 و ۰) و(t_4 و t_3) مقدار شتاب لحظه‌ای مثبت و در نتیجه بردار شتاب متحرک در جهت مثبت محور x است. در بازهٔ زمانی (t_3 تا t_1) بردار شتاب متحرک در جهت منفی محور x است.

تمرین پیشنهادی

شکل ۱۶ نمودار تغییرات شتاب نسبت به زمان یک هواپیما را پیش از برخاستن از روی زمین نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود شتاب هواپیما در این بازهٔ زمانی چندان ثابت نیست. با این حال می‌توان فرض کرد که در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۸/۴ s شتاب آن ثابت و برابر $a_x = ۴/۳\ m/s^2$ است.

الف) سرعت هواپیما در لحظهٔ t =۱۸/۴ s چقدر است؟ (سرعت اولیهٔ هواپیما را صفر بگیرید.)

ب) در این بازهٔ زمانی هواپیما چه مسافتی را طی می‌کند؟

می‌آوریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ۳t^2 - ۱۲t + ۹$$

از این معادله در لحظه‌های t = ۱s و t = ۲s به ترتیب مقادیر ۰(صفر) و ۳m/s- برای سرعت به دست می‌آید.

$$\bar{a}_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{-۳ - ۰}{۲ - ۱} = -۳m/s^2$$

ب) ابتدا معادلهٔ شتاب متحرک را می‌نویسیم :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = ۶t - ۱۲$$

با استفاده از این رابطه، شتاب متحرک در لحظه‌های t = ۰ و t = ۱s چنین به دست می‌آید :

$$t = ۰s \rightarrow a_x = -۱۲m/s^2$$
$$t = ۱s \rightarrow a_x = -۶m/s^2$$

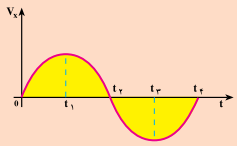
بردار شتاب را می‌توان به صورت زیر نمایش داد :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} \qquad (۱۰ــ۱)$$

در رابطهٔ بالا اگر a_x مثبت باشد، $\vec{a}$ در جهت محور x و اگر منفی باشد در خلاف جهت محور x قرار می‌گیرد.

تمرین ۱ــ۲

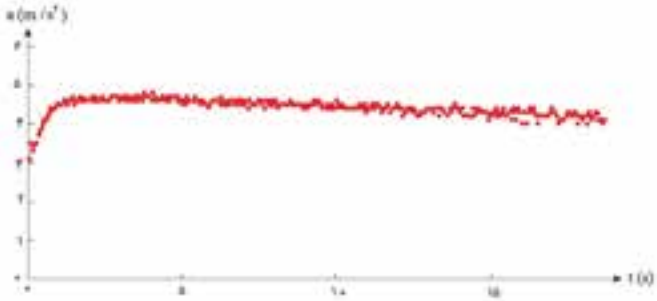
نمودار سرعت، زمان متحرکی در شکل ۱ــ۹ نشان داده شده است. تعیین کنید در چه بازهٔ زمانی بردار شتاب در جهت محور x و درکدام بازهٔ زمانی در خلاف جهت محور x است.



شکل ۱ــ۹

۱۰

پ) نمودارهای شتاب ــ زمان، سرعت ــ زمان و مکان ــ زمان هواپیما را رسم کنید.

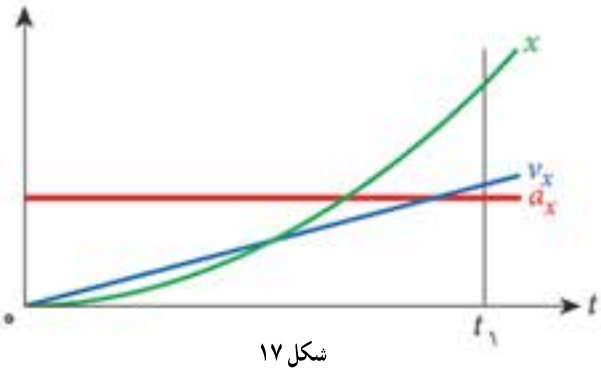


شکل ۱۶ــ اطلاعات شتاب یک هواپیما پیش از برخاستن

پاسخ : الف) $v_x \simeq ۷۹m/s$.

ب) $\Delta x \simeq ۷۲۸m$.

پ) شکل ۱۷ نمودارهای شتاب، سرعت و مکان هواپیما را برحسب زمان نشان می‌دهد.



شکل ۱۷

فعالیت ۱ــ۱

الف) مثبت، منفی، کندشونده، منفی.

ب) منفی، منفی، تندشونده، مثبت.

پ) منفی، مثبت، کندشونده، منفی.

هنگامی که اندازهٔ سرعت متحرکی زیاد می‌شود، حرکت را **تندشونده** و هنگامی که اندازهٔ سرعت متحرکی کاهش می‌یابد، حرکت را **کند شونده** می‌نامند.

فعالیت ۱ــ۱

در تمرین ۱ــ۲، سرعت متحرک در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 مثبت است. a_x نیز مثبت است؛ زیرا شیب مماس بر نمودار در این بازهٔ زمانی مثبت است و حرکت تندشونده است. حاصل‌ضرب a_xv_x نیز مثبت است. اکنون جاهای خالی را در گزاره‌های زیر پرکنید.

الف) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 سرعت متحرک ..... است. a_x ..... است. حرکت ..... است. حاصل‌ضرب a_xv_x ..... است.

ب) در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 سرعت متحرک ..... است. a_x ..... است. حرکت ..... است. حاصل‌ضرب a_xv_x ..... است.

پ) در زمان‌های بزرگ‌تر از t_3، سرعت متحرک ..... است. a_x ..... است. حرکت ..... است. حاصل‌ضرب a_xv_x ..... است.

در فعالیت بالا می‌بینید که وقتی $a_xv_x > 0$ باشد، حرکت تندشونده و وقتی $a_xv_x < 0$ باشد، حرکت کندشونده است.

مثال ۱ــ۶

خودرویی با سرعت $10m/s$ در حال حرکت است. راننده ترمز می‌کند و سرعت خودرو با شتاب $2m/s^2$ کاهش می‌یابد. الف) چه زمانی طول می‌کشد تا خودرو متوقف شود؟ ب) در این بازهٔ زمانی خودرو چه مسافتی را می‌پیماید؟

پاسخ

الف) در کتاب فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم که در حرکت با شتاب ثابت معادلهٔ سرعت به‌صورت زیر است :

$$v_x = a_xt + v_{0x} \qquad (۱ــ۱۱)$$

که در آن a_x شتاب (ثابت) جسم و v_{0x} سرعت جسم در لحظهٔ $t = 0$ است. در شکل

۱۱

شکل ۱۸ یک ماشین مسابقه‌ای را در حین کاهش سرعت نشان می‌دهد. اگر کاهش سرعت با شتاب ثابت باشد، با توجه به اطلاعات روی شکل، مطلوب است :

الف) شتاب ماشین.

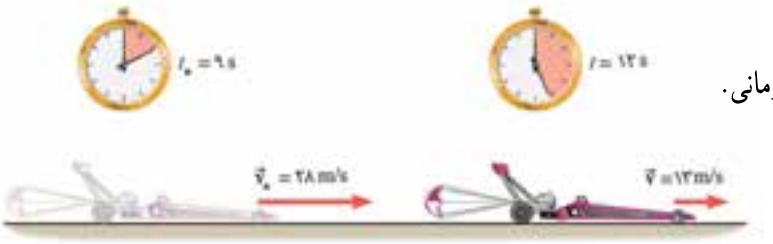
ب) جابه‌جایی ماشین در این بازهٔ زمانی.

پ) نوع حرکت ماشین.

پاسخ : الف) $-۵\ m/s^۲$.

ب) $۶۱/۵\ m$.

پ) کندشونده.



شکل ۱۸

شکل ۱۹ یک قایق تندرو را نشان می‌دهد که با شتاب ثابت $۲\ m/s^۲$ سرعت خود را افزایش می‌دهد. با توجه به اطلاعات روی شکل مطلوب است :

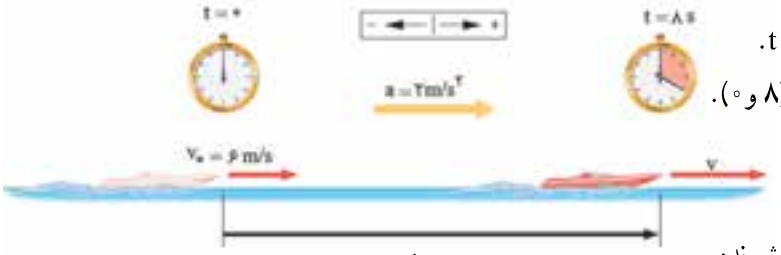
الف) سرعت قایق در لحظهٔ $t = ۸\ s$.

ب) جابه‌جایی قایق در بازهٔ زمانی (۸ و ۰).

پ) نوع حرکت قایق.

پاسخ : الف) $۲۲\ m/s$.

ب) $+۱۱۰\ m$ پ) تندشونده.



شکل ۱۹

شکل ۲۰ هواپیمایی را در حال سرعت گرفتن برای بلند شدن از عرشهٔ یک ناوجنگی نشان می‌دهد. با توجه به اطلاعات روی شکل، حداقل طول عرشهٔ این ناوجنگی چقدر باید باشد؟

پاسخ : $۶۲\ m$

شکل ۲۰

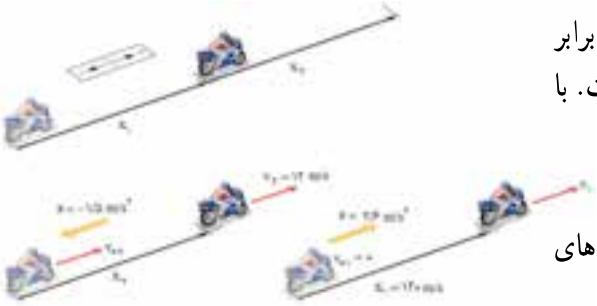
شکل۲۱ حرکت موتور سواری را در امتداد مسیری مستقیم نشان می‌دهد که شتاب آن در حین جابه‌جایی $x_۱$ برابر $+۲/۶\ m/s^۲$ و در حین جابه‌جایی $x_۲$ برابر $-۱/۵\ m/s^۲$ است. با توجه به اطلاعات روی شکل مطلوب است :

الف) جابه‌جایی $x_۲$

ب) نوع حرکت موتور سوار در هریک از جابه‌جایی‌های $x_۱$ و $x_۲$.

پاسخ : الف) $+۱۶۰\ m$.

ب) تندشونده، کند شونده.



شکل ۲۱

حرکت سقوط آزاد

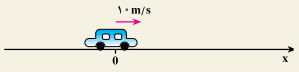
راهنمای تدریس : از آنجا که دانش‌آموزان در سال دوم با حرکت سقوط آزاد بدون سرعت اولیه آشنا شده‌اند، ضمن یادآوری فرض‌هایی که لازم است در نظر بگیریم تا حرکتی را بتوان سقوط آزاد نامید، با حل چند مثال مختلف به بررسی جسم در حال سقوط آزاد می‌پردازیم.

آزمایش نشان می‌دهد که اگر بتوان اثرهای مقاومت هوا را نادیده گرفت، همهٔ جسم‌ها در یک مکان خاص بدون توجه به اندازه یا وزن آن‌ها، با شتاب تقریباً ثابتی که جهت آن رو به پایین است، سقوط می‌کنند.

اگر علاوه بر این، مسافت سقوط در مقایسه با شعاع زمین کوچک باشد و اگر اثرهای اندک ناشی از چرخش زمین را نادیده بگیریم، شتاب سقوط جسم ثابت است.

حرکت آرمانی‌ای که با فرض‌های بالا نتیجه می‌شود، با آنکه علاوه بر سقوط شامل بالا رفتن نیز می‌شود، **سقوط آزاد** خوانده می‌شود.

۱ـ۱۰ حرکت خودرو را در جهت محور x در نظر گرفته‌ایم.



شکل ۱ـ۱۰

بنابراین، $v_{\circ x} = +۱\circ m/s$ و چون حرکت کندشونده است، علامت a_x مخالف علامت $v_{\circ x}$ است؛ در نتیجه، $a_x = -۲m/s^۲$. با استفاده از معادلهٔ سرعت داریم :

$v_x = -۲t + ۱\circ$

هنگامی که خودرو متوقف می‌شود، $v_x = \circ$ است ؛ در نتیجه :

$\circ = -۲t + ۱\circ \Rightarrow t = ۵s$

ب) می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت معادلهٔ حرکت به صورت زیر است

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}a_x t^۲ + v_{\circ x} t \qquad (۱۲ـ۱)$$

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}(-۲)(۵)^۲ + ۱\circ(۵) + \circ = ۲۵m$$

این نتیجه را می‌توانستیم از رابطهٔ مستقل از زمان زیر نیز به دست آوریم :

$$v_x^۲ - v_{\circ x}^۲ = ۲a_x(x - x_\circ) \qquad (۱۳ـ۱)$$

$$\circ - (۱\circ)^۲ = ۲(-۲)(\Delta x) \Rightarrow \Delta x = ۲۵m$$

حرکت سقوط آزاد : در فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم که سقوط آزاد اجسام در نزدیکی سطح زمین یکی از نمونه‌های مهم حرکت با شتاب ثابت برروی مسیر مستقیم است. شتاب این حرکت در خلأ برابر شتاب گرانش (g) وجهت آن رو به پایین است.

مثال ۱ـ۷

سنگی را از بالای ساختمان بلندی به ارتفاع ۴۵m رها می‌کنیم، (الف) سنگ پس از چه زمانی به زمین می‌رسد؟ (ب) سرعت آن هنگام رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه و چند کیلومتر بر ساعت است؟ ($g = ۱\circ m/s^۲$)

پاسخ

الف) برای بررسی حرکت سقوط آزاد اجسام، محور y را در راستای قائم و رو به بالا و مبدأ آن را نقطهٔ رها کردن جسم در نظر می‌گیریم. در این صورت، معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت (۱ـ۱۲) به صورت زیر به دست می‌آید :

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲$$

$$-۴۵ = -\frac{۱}{۲}(۱\circ)t^۲ \Rightarrow t = ۳s$$

ب) با استفاده از معادلهٔ سرعت (۱ـ۱۱) داریم :

$$v = -gt$$

$$v = -۱\circ \times ۳ = -۳\circ m/s = -۱\circ۸ km/h$$

فعالیت ۱ـ۲

از دوست خود بخواهید که مطابق شکل ۱ـ۱۱، خط‌کش مدرّج بلندی را بین انگشتان شما نگه دارد و در یک لحظه، آن را رها کند. چگونه می‌توانید زمان واکنش خود را (یعنی زمانی که طول می‌کشد تا پس از مشاهدهٔ رها شدن خط‌کش، آن را بگیرید) اندازه‌گیری کنید.

شکل ۱ـ۱۱

اکنون، مسئلهٔ پرتاب جسمی را در راستای قائم به طرف بالا بررسی می‌کنیم. جهت محور y را به طرف بالا در نظر می‌گیریم. معادله‌های حرکت و سرعت با رابطه‌های زیر بیان می‌شود :

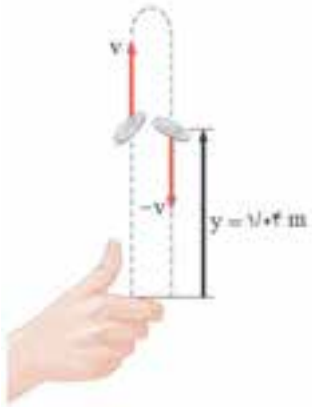
۱۲

۱۳

تمرین‌های پیشنهادی

سکه‌ای را با سرعت اولیهٔ ۵ m/s رو به بالا در امتداد قائم پرتاب می‌کنیم. سرعت آن در فاصلهٔ ۱/۰۴ m از نقطهٔ پرتاب چقدر است؟ (شکل ۲۲)

پاسخ : در مسیر رفت ۲/۱۵ m/s + و در مسیر برگشت ۲/۱۵ m/s− .



شکل ۲۲

توپی را از بام ساختمان بلندی به‌طور قائم روبه بالا پرتاپ می‌کنید. توپ در نقطه‌ای لب نرده‌های پشت بام با سرعت روبه بالایی به بزرگی ۱۵ m/s از دست شما رها می‌شود، از آن پس توپ در حال سقوط آزاد است. در راه پایین آمدن، توپ درست از کنار نرده‌ها می‌گذرد. در مکان ساختمان $g = ۹/۸\ m/s^۲$ است.

الف) مکان و سرعت توپ را ۱s و ۴s پس از رها شدن از دستان خود پیدا کنید.

ب) سرعت توپ وقتی به فاصلهٔ ۵ m بالای نرده‌ها می‌رسد، چقدر است؟

پ) ارتفاع بیشینه و زمانی را که توپ به آن ارتفاع می‌رسد به دست آورید.

ت) شتاب توپ در بیشینهٔ ارتفاع چقدر است؟

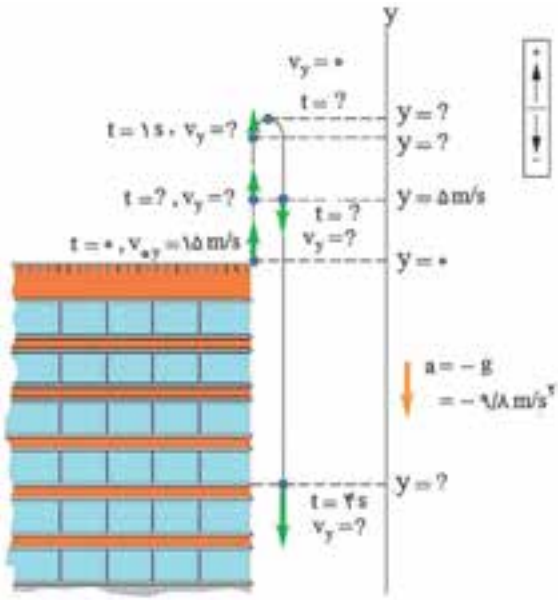
پاسخ : ابتدا تصویری مطابق شکل ۲۳ (که نمودار حرکت توپ نیز هست) رسم کنید.

الف) $y = -۱۸/۴m$ و $v_y = -۲۴/۲m/s$.

ب) $v_y = \pm ۱۱/۳\ m/s$، علامت مثبت مربوط به مسیر بالا رفتن و علامت منفی مربوط به مسیر بازگشت است.

پ) $t = ۱/۵۳s$ و $y = +۱۱/۵\ m$.

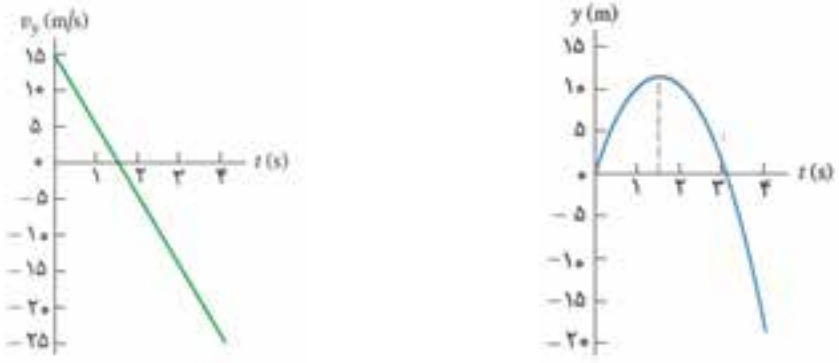
ت) این یک تصویر نادرست متداول است که حرکت سقوط آزاد، در بالاترین نقطه سرعت صفر و شتاب هم صفر است. اگر این طور می‌بود هنگامی که توپ به بالاترین نقطه می‌رسد باید همان جا در میان هوا معلق بماند. از آنجا که شتاب آهنگ تغییر سرعت است، اگر در بالاترین نقطه شتاب صفر می‌بود، سرعت توپ دیگر تغییری نمی‌کرد. به این ترتیب شتاب در بالاترین نقطه کماکان همان $a_y = -g = -۹/۸\ m/s^۲$ است که توپ به هنگام بالا رفتن یا پایین آمدن داشته است.



شکل ۲۳ــ مکان و سرعت توپی که به‌طور قائم پرتاپ شده است. به منظور روشنی بیشتر، مسیر به طرف پایین توپ اندکی از جای واقعی آن به راست جابه‌جا شده است.

نمودارهای مکان و سرعت برحسب زمان تمرین قبل را رسم کنید.

پاسخ : شکل ۲۴ــ الف نمودار مکان ــ زمان و شکل ۲۴ــ ب نمودار سرعت ــ زمان را نشان می‌دهد.



(ب) (الف)

شکل ۲۴

فعالیت پیشنهادی

اگر اثرهای مقاومت هوا که بر قطره‌های در حال سقوط باران عمل می‌کنند نادیده گرفته شوند، آنگاه می‌توانیم قطره‌های باران را مانند جسم‌های در حال سقوط آزاد بدانیم.

الف) ابرهای بارانی به‌طور نوعی حدود ۱۵۰۰ متر بالای زمین هستند. قطره‌های باران را به‌صورت جسم‌های در حال سقوط آزاد درنظر بگیرید و سرعت برخورد آنها را با زمین تخمین بزنید. مقدار تخمینی خود را برحسب m/s و km/ h ارائه کنید.

ب) با توجه به مشاهدات شخصی خود از باران، سرعت واقعی برخورد قطره‌های باران به زمین را تخمین بزنید.

پ) براساس پاسخ‌هایی که به بخش‌های (الف) و (ب) داده‌اید آیا نادیده گرفتن اثرهای مقاومت هوا بر قطره‌های باران در حال سقوط تقریب خوبی است؟ توضیح دهید.

فعالیت ۱ـ۲

این فعالیت در واقع آزمایش ساده‌ای است که به کمک آن می‌توان زمان واکنش هر شخص را اندازه‌گیری کرد. چنانچه برای انجام این آزمایش خط‌کش بلندتری استفاده کنید، انجام آن ساده‌تر است (شکل ۲۵). در یک آزمایش نوعی مقدار $h = ۲۰\ cm$ به دست آمده است. در نتیجه زمان واکنش برابر است با

$$y = y_۰ - \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow h = \frac{۱}{۲}gt^۲$$

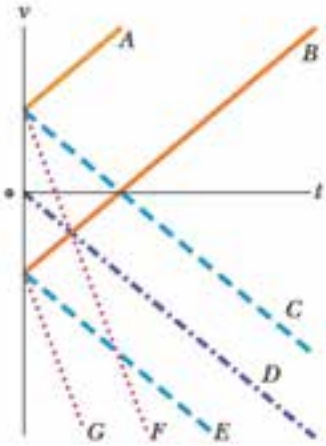
$$t = \sqrt{\frac{۲h}{g}} = \sqrt{\frac{۲\times ۰/۲m}{۹/۸m/s^۲}} = ۰/۲s$$

شکل ۲۵

در حالیکه به نرده‌های یک پل تکیه داده‌اید، در همان حال که توپی را (بدون سرعت اولیه) رها می‌کنید، توپ دیگری را رو به پایین پرت می‌کنید. کدامیک از منحنی های شکل ۲۶ سرعت $v(t)$ را برای هریک از حالت‌های زیر درست نشان می‌دهد؟ (منحنی‌های A و B موازی‌اند؛ به همان ترتیب منحنی‌های C، D و E با هم و منحنی‌های F و G نیز با هم موازی‌اند.)

الف) توپ رها شده.

ب) توپ پرت شده.



شکل ۲۶

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \qquad (۱\text{ـ}۱۴)$$

$$v_y = -gt + v_{0y} \qquad (۱\text{ـ}۱۵)$$

و معادلهٔ مستقل از زمان آن به صورت زیر است :

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0) \qquad (۱\text{ـ}۱۶)$$

مثال ۱ــ۸

سنگی را با سرعت $20\,m/s$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. الف) چه زمانی طول می‌کشد تا سنگ به بالاترین ارتفاع برسد؟ ب) سنگ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ پ) چه زمانی طول می‌کشد تا سنگ به نقطهٔ پرتاب برگردد؟ ت)سرعت سنگ در این نقطه چه مقدار است؟ ($g = 10\,m/s^2$)

پاسخ

الف) محور y را رو به بالا و مبدأ آن را در نقطهٔ پرتاب فرض می‌کنیم؛ درنتیجه، در لحظهٔ پرتاب داریم : $v_{0y} = +20\,m/s$ و $y_0 = 0$. در شروع حرکت، جسم در جهت محور y حرکت می‌کند، با استفاده از رابطه‌های ۱ــ۱۴ و ۱ــ۱۵ داریم :

$$y = -5t^2 + 20t$$

$$v_y = -10t + 20$$

در بالاترین نقطه، $v_y = 0$؛ در نتیجه :

$$0 = -10t + 20 \Rightarrow t = 2s$$

$$t = 2s$$

ب) بالاترین ارتفاعی که سنگ به آن می‌رسد، از معادلهٔ حرکت به دست می‌آید :

$$y = -5(2)^2 + 20(2) = 20m$$

پ) در بازگشت سنگ به نقطهٔ پرتاب، داریم : $y = 0$ ؛ در نتیجه :

$$-5t^2 + 20t = 0$$

یا

$$t(-5t + 20) = 0$$

۱۴

در شکل ۲۷ یک گلوله که به‌طور مستقیم روبه بالا پرتاب شده است از سه پنجره به ارتفاع یکسان که در فاصلهٔ مساوی از یکدیگر قرار گرفته‌اند، عبور می‌کند. این پنجره‌ها را به گونه‌ای مرتب کنید که کمیت‌های زیر در ابتدا دارای بیشترین مقدار باشند.

الف) بزرگی سرعت متوسط توپ به هنگام عبور از مقابل آنها.

ب) زمانی که طول می‌کشد توپ از مقابل آنها عبور کند.

پ) بزرگی شتاب توپ به هنگام عبور از مقابل آنها.

شکل ۲۷

تمرین پیشنهادی

الف) یک توپ باید با چه سرعتی به‌طور قائم از سطح زمین پرتاپ شود تا به ارتفاع بیشینهٔ ۵۰ m برسد؟

ب) توپ چه مدت در هوا حرکت خواهد کرد؟

پ) نمودارهای y، v و a را برحسب زمان برای توپ رسم کنید. روی دو نمودار اول، زمانی را که توپ به ارتفاع ۵۰ m می‌رسد، نشان دهید.

پاسخ : الف) ۳۱ m/s.

ب) ۶/۴ s.

پاسخ‌های این معادله $t = ۰s$ و $t = ۴s$ است. $t = ۰s$ مربوط به لحظهٔ پرتاب است و $t = ۴s$ زمانی است که طول می‌کشد تا سنگ به نقطهٔ پرتاب برگردد.

ت) سرعت متحرک در این لحظه از معادلهٔ سرعت به دست می‌آید :

$$v_y = -۱۰(۴) + ۲۰ = -۲۰ \ m/s$$

علامت منفی نشان می‌دهد که در هنگام بازگشت سنگ به نقطهٔ پرتاب، سوی سرعت آن رو به پایین است. ملاحظه می‌شود که با معادله‌های حرکت و سرعت، می‌توان چگونگی حرکت سنگ را، در هر لحظه از رفت و برگشت، توصیف کرد.

مثال ۱ــ۹

از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰m سنگی را در راستای قائم با سرعت ۱۵ m/s، به بالا پرتاب می‌کنیم. چه مدت زمانی طول می‌کشد تا سنگ به زمین برسد؟ ($g = ۱۰ \ m/s^۲$)

پاسخ

محور مختصات را رو به بالا و مبدأ آن را در بالای ساختمان در نظر می‌گیریم؛ در نتیجه، معادلهٔ حرکت سنگ به صورت زیر است :

$$y = -۵t^۲ + ۱۵t$$

در پایین ساختمان، $y = -۵۰m$؛ در نتیجه :

$$-۵۰ = -۵t^۲ + ۱۵t$$

با حل این معادله، دو مقدار $t = -۲s$ و $t = ۵s$ به‌دست می‌آید. چون حرکت از لحظهٔ $t = ۰$ شروع شده است، پاسخ اول قابل قبول نیست؛ در نتیجه، زمان رسیدن سنگ به زمین ۵s است.

۱ــ۲ــ حرکت در دو بُعد یا حرکت در صفحه

در بخش ۱ــ۱ حرکت در یک بعد را مرور کردیم. در این بخش به بررسی حرکت در صفحه که آن را حرکت دو بُعدی نیز می‌نامیم، می‌پردازیم. حرکت گلولهٔ توپی که شلیک می‌شود یا حرکت یک سیاره به دور خورشید یا حرکت اتومبیل در پیچ جاده و ... مثال‌هایی از حرکت دو بعدی‌اند.

۱۵

دانستنی

زمان تعلیق : برخی ورزشکاران توانایی پرش زیادی دارند. چنان مستقیماً بالا می‌جهند، که گویی با سرپیچی از گرانی «در هوا معلق» اند. اگر از دوستان خود بخواهید که «زمان تعلیق» ورزشکاران معروف را برآورد کنند ــ شاید بگویند زمانی که ورزشکار در هواست و پاهایش از زمین فاصله دارند دو یا سه ثانیه است. اما، شگفت آنکه زمان معلق بودن قهرمانان بزرگ همواره کمتر از ۱ ثانیه بوده است! زمان طولانی‌تر یکی از توهم‌های بی‌شمار ما از طبیعت است.

توهم دیگر مربوط به ارتفاع عمودی است که یک انسان می‌تواند بپرد. اغلب همکلاسی‌های شما احتمالاً نمی‌توانند بیش از ۰/۵ متر بالا بپرند. آنها می‌توانند از حصار ۰/۵ متری بپرند، اما برای این کار، بدنشان فقط اندکی بالا می‌رود. ارتفاع مانع با ارتفاع «گرانیگاه» کسی که می‌پرد تفاوت دارد. بسیاری از افراد می‌توانند از حصاری یک متری بپرند، ولی به ندرت کسی می‌تواند «گرانیگاه» بدن خود را ۱ متر بالا ببرد. حتی مایکل جوردن (Michael Jordan)، ستارهٔ معروف بستکبال، در اوج کار خود نمی‌توانست بدنش را ۱/۲۵ متر بالا ببرد، گرچه به راحتی می‌توانست به بالاتر از ارتفاع ۳ متری سبد برسد.

بهترین شیوهٔ اندازه‌گیری قابلیت پرش، پرش عمودی ایستاده است. مقابل یک دیوار بایستید و پاهای خود را صاف روی زمین بگذارید و دست‌های خود را بالا ببرید. بالاترین نقطه‌ای را که می‌توانید به آن برسید علامت‌گذاری کنید. سپس بالا بپرید و در نقطهٔ اوج خود علامتی بگذارید. فاصلهٔ بین این دو علامت، جهش عمودی شما را نشان می‌دهد. اگر این مقدار بیش از ۰/۶ متر باشد، استثنایی هستید.

فیزیک مسئله بدین قرار است. وقتی بالا می‌پرید، نیروی پرش فقط وقتی اعمال می‌شود که پای شما با زمین در تماس باشد. هرچه این نیرو بزرگتر باشد، اندازهٔ سرعت پرتاپ شما بیشتر است و بالاتر می‌پرید، سرعت بالاسوی شما بلافاصله با آهنگ ثابت g− یا $-10\ m/s^2$ کاهش می‌یابد. اندازهٔ سرعت بالاسوی شما در نقطهٔ اوج پرش صفر می‌شود. سپس شروع به افتادن می‌کنید، و درست با همان آهنگ g، شتاب می‌گیرید. اگر همانطور که بالا رفتید، ایستاده و با پاهای کشیده، فرود بیایید زمان صعود شما با زمان سقوط برابر می‌شود، زمان تعلیق، زمان بالا رفتن به‌علاوهٔ زمان پایین آمدن است. وقتی در هوا هستید، هیچ‌گونه بالا و پایین بردن دست و پا یا حرکت‌های بدنی دیگر نمی‌تواند زمان تعلیق شما را تغییر دهد.

رابطهٔ بین زمان بالا و پایین رفتن و ارتفاع عمودی به‌صورت زیر است :

$$d = \frac{1}{2}gt^2$$

اگر ارتفاع عمودی d را بدانیم، می‌توانیم با تغییر ترتیب این عبارت آن را به‌صورت زیر درآوریم :

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

اسپود وب (Spud Webb)، ستارهٔ بسکتبال امریکایی، رکورددار پرش عمودی ایستادهٔ ۱/۲۵ متر در سال ۱۹۸۶ است[1]. این ارتفاع در آن هنگام رکورد جهانی بود. بگذارید از ارتفاع ۱/۲۵ m برای d، و مقدار دقیق‌تر $9/8\ m/s^2$ برای g استفاده کنیم. باحل آن برای t، نصف زمان تعلیق، به دست می‌آوریم :

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g}} = \sqrt{\frac{2(1/25m)}{9/8m/s^2}} = 0/50\ s$$

این زمان را دو برابر کنید (زیرا فقط به یک طرف این رفت و برگشت به بالا و پایین مربوط می‌شود) و مشاهده می‌کنیم که زمان تعلیق اسپود رکوردشکن ۱ ثانیه می‌شود.

در اینجا از حرکت عمودی صحبت می‌کنیم. اما پرش‌های در حین دویدن چطور؟ زمان تعلیق فقط به سرعت عمودی شخص در آغاز پرش بستگی دارد. در حال پرواز، اندازهٔ سرعت افقی کسی که در حال پرش است ثابت می‌ماند، در حالیکه اندازهٔ سرعت عمودی او شتاب می‌گیرد.

شکل ۲۸

۱ــ مقدار ۱/۲۵ m برای d بیانگر بیشینهٔ ارتفاع گرانیگاه قهرمان است نه ارتفاع میله. در تعیین قابلیت پرش ارتفاع، گرانیگاه کسی که می‌پرد اهمیت دارد.

۱ــ۲ــ حرکت در دو بعد یا حرکت در صفحه

راهنمای تدریس : بیشتر حرکت‌هایی که در پیرامون ما رخ می‌دهند یا دو بعدی‌اند و یا سه بعدی. پرواز پرندگان و هواپیماها، حرکت توپ در فضا و حرکت بسیاری دیگر از این نمونه‌ها، یا در دو بعد انجام می‌شوند و یا در سه بعد. در اینجا باید به دانش‌آموزان گوشزد نمود که برای بررسی این نوع حرکت‌ها، نمی‌توان از همان روش‌هایی استفاده کنیم که برای اجسامی که تنها در راستای خط راست حرکت می‌کردند به‌کار بردیم. بلکه نیازمندیم که توصیف و بررسی حرکت را به دو و سه بعد تعمیم دهیم.

از آنجا که دانش‌آموزان در فیزیک سال سوم به اندازهٔ کافی با بردارها و بردارهای یکه و نحوه کار با آنها آشنا شده‌اند، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان بتوانند موضوع‌های مطرح شده را به خوبی دنبال کنند.

مثال پیشنهادی

معادله‌های حرکت متحرکی در امتداد محورهای x و y در SI به‌صورت زیر است :

$x = -۲t + ۱$ و $y = ۸t^۲$

الف) معادلهٔ مسیر این متحرک را به دست آورید.

ب) مسیر این متحرک را در صفحهٔ xy رسم کنید.

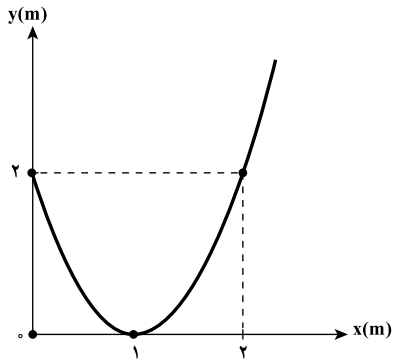
حل : الف) با استفاده از معادلهٔ حرکت در امتداد محور x ها داریم :

$$t = \frac{۱-x}{۲}$$

با جایگذاری t در معادلهٔ حرکت در امتداد محور y ها خواهیم داشت :

$$y = ۸\left(\frac{۱-x}{۲}\right)^۲ = ۲x^۲ - ۴x + ۲$$

ب) با نقطه‌یابی می‌توان معادلهٔ مسیر را در صفحهٔ xy رسم کرد. شکل ۲۹ مسیر حرکت این متحرک را نشان می‌دهد. همانطور که دیده می‌شود این مسیر، یک سهمی است که کمینهٔ آن در $x = ۱\ m$ قرار دارد.



شکل ۲۹

در شکل ۱ــ۱۳ مسیر حرکت جسمی در صفحهٔ xoy نشان داده شده است. در فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم که مکان جسم در این صفحه، با بردار $\vec{r}$ نمایش داده می‌شود. این بردار را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad (۱ــ۱۷)$$

که در آن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به ترتیب بردارهای یکّه در جهت‌های x و y اند.

شکل ۱ــ۱۲

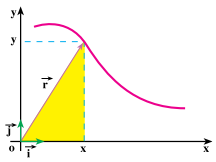
چون هنگام حرکت جسم، در هر لحظه بردار مکان آن تغییر می‌کند، برای مشخص کردن مکان جسم در حین حرکت، کافی است که مؤلفه‌های x و y را به صورت تابع‌هایی از زمان داشته باشیم :

$$x = f(t) \text{ و } y = g(t) \qquad (۱ــ۱۸)$$

رابطه‌های ۱ــ۱۸ معادله‌های حرکت یک جسم را در دو بُعد نشان می‌دهند. واضح است که در حرکت دو بعدی، بردار مکان نیز تابعی از زمان است :

$$\vec{r} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} \qquad (۱ــ۱۹)$$

بنابراین، می‌توان گفت که حرکت در صفحه، ترکیب دو حرکت یک بعدی در امتدادهای x و y است که با داشتن معادله‌های مربوط به آن، مکان جسم در هر لحظه معلوم و در نتیجه، **مسیر حرکت** آن مشخص می‌شود.



شکل ۱ــ۱۳

۱۶

مثال پیشنهادی

معادله‌های حرکت یک گوزن و یک یوزپلنگ (شکل ۳۰) درصفحهٔ افقی به ترتیب به صورت زیر است : (در SI)

$$\begin{cases} x = ۲t \\ y = ۸t^۲ \end{cases}$$

با رسم مسیر این دو حیوان در یک صفحهٔ مختصات، نشان دهید آیا یوزپلنگ به گوزن می‌رسد؟

شکل ۳۰

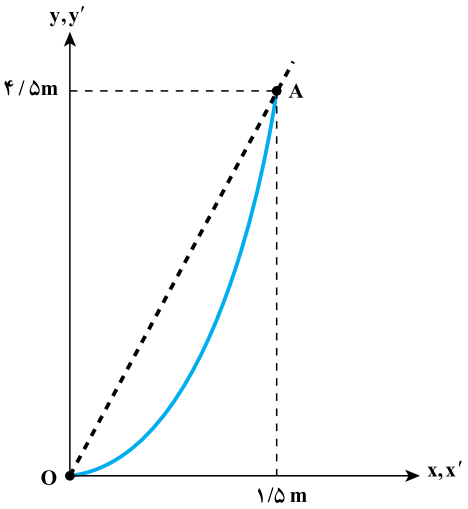
حل : ابتدا معادلهٔ حرکت گوزن را به دست می‌آوریم :

$$t = \frac{x}{۲} \Rightarrow y = ۸(\frac{x}{۲})^۲ = ۲x^۲$$

به همین ترتیب معادلهٔ مسیر یوزپلنگ عبارت است از :

$$t = \frac{x'}{۴} \Rightarrow y' = ۱۲(\frac{x'}{۴}) = ۳x'$$

شکل ۳۱ مسیرهای گوزن (خط‌پر) و یوزپلنگ (خط‌چین) را نشان می‌دهد که به طریق نقطه‌یابی رسم شده است. همانطور که دیده می‌شود در نقطهٔ A به مختصات (۴/۵و ۱/۵) یوزپلنگ به گوزن می‌رسد.



شکل ۳۱

فعالیت ۱ـ۳

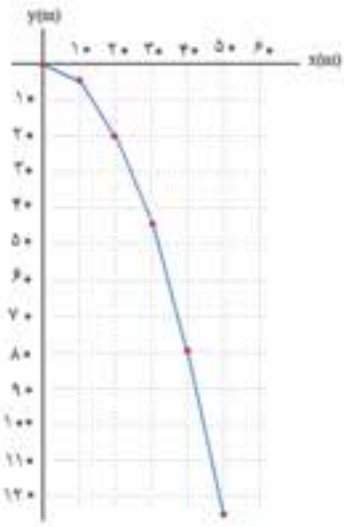
معادلهٔ مسیر خرگوش عبارت است از :

$$y=-۵(\frac{۱}{۱۰}x)^۲=-\frac{۱}{۲۰}x^۲$$

در $t=۰$ داریم $x=۰$ و در $t=۵\,s$ داریم $x=۵۰\,m$. به این ترتیب در بازهٔ ۰ تا ۵ ثانیه داریم :

x(m)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
y(m)	۰	−۵	−۲۰	−۴۵	−۸۰	−۱۲۵

مسیر حرکت این خرگوش در شکل ۳۲ رسم شده است.



شکل ۳۲

فعالیت ۱ـ۳

فرض کنید در یک مدت کوتاه، معادله‌های حرکت یک خرگوش در سطح زمین، برحسب یکاهای SI، به‌صورت $x=۱۰t$ و $y=-۵t^۲$ است. مسیر حرکت این خرگوش را به کمک نقطه‌یابی، در بازهٔ زمانی ۰ تا ۵ ثانیه، روی کاغذ شطرنجی رسم کنید.

باید دانست که مسیر را می‌توان، علاوه بر روش نقطه‌یابی، به کمک **معادلهٔ مسیر** هم مشخص کرد. برای یافتن معادلهٔ مسیر کافی است که با حذف زمان (t) بین معادله‌های حرکت برای x و y رابطه‌ای بین آنها، به دست آورد.

مثال ۱ـ۱۰

معادلهٔ مسیر را برای خرگوش در فعالیت ۱ـ۳ به دست آورید و آن را رسم کنید.

پاسخ

t را بین مؤلفه‌های بردار مکان حذف می‌کنیم :

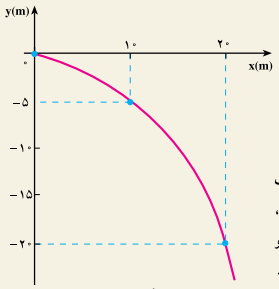
$$x=۱۰t\rightarrow t=\frac{x}{۱۰}$$

و

$$y=-۵t^۲\rightarrow y=-۵(\frac{x}{۱۰})^۲$$

$$y=-\frac{x^۲}{۲۰}$$

معادلهٔ مسیر در این مثال، یک سهمی است که بیشینهٔ آن در $x=۰$ ، است و از نقطه‌های $(۱۰m\,,\,-۵m)$ و $(۲۰m\,,\,-۲۰m)$ می‌گذرد (شکل ۱ـ۱۴).



شکل ۱ـ۱۴

مثال پیشنهادی

در محوطهٔ پارکینگی خرگوشی در حال دویدن است. مختصات خرگوش (به متر) برحسب تابع زمان t (به ثانیه) به‌صورت زیر داده شده است :

$$\begin{cases} x=-۰/۳۱t^۲+۷/۲t+۲۸ \\ y=۰/۲۲t^۲-۹/۱t+۳۰ \end{cases}$$

الف) در $t=۱۵s$، بردار مکان $\vec{r}$ خرگوش، برحسب نمادگذاری بردارهای یکه چگونه است؟

ب) مسیر حرکت خرگوش را در بازهٔ زمانی ۰ تا ۲۵ ثانیه رسم کنید.

حل : الف) در $t = ۱۵s$ داریم :

$$x = (-۰/۳۱)(۱۵)^۲ + (۷/۲)(۱۵) + ۲۸ = ۶۶\ m$$

$$y = (۰/۲۲)(۱۵)^۲ - (۹/۱)(۱۵) + ۳۰ = -۵۷\ m$$

به این ترتیب از رابطهٔ $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$ داریم :

$$\vec{r} = (۶۶m)\,\vec{i} - (۵۷m)\,\vec{j}$$

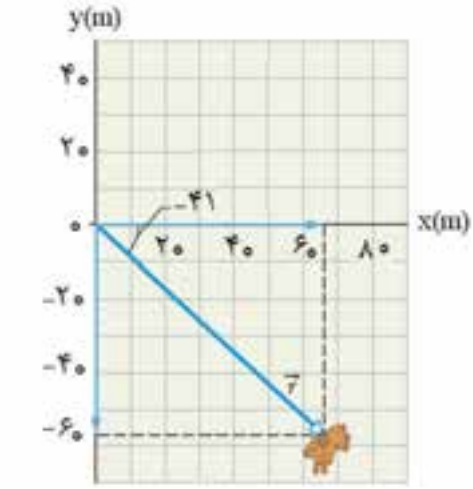
این بردار در شکل ۳۳ــ الف رسم شده است. برای به دست آوردن بزرگی و جهت $\vec{r}$ داریم :

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{(۶۶m)^۲ + (-۵۷m)^۲} = ۸۷m$$

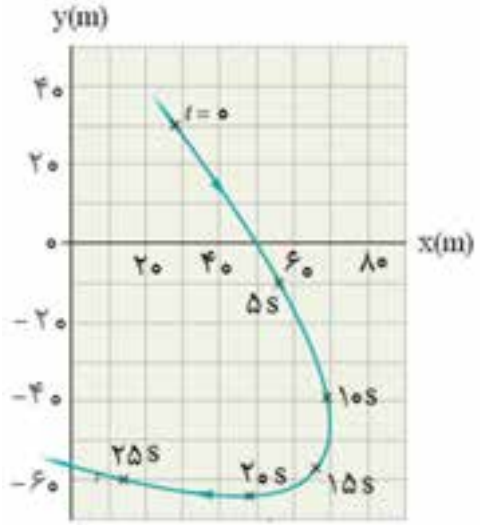
و

$$\theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x} = \tan^{-۱}\left(\frac{-۵۷m}{۶۶m}\right) = -۴۱^\circ$$

ب) چنانچه قسمت الف را برای مقادیر مختلف t تکرار کنیم، آنگاه نتایج حاصل در بازهٔ ۰ تا ۲۵ ثانیه مطابق شکل ۳۳ــ ب خواهد بود.



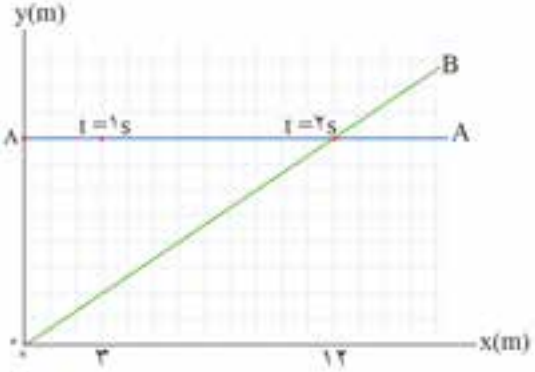
شکل ۳۳ــ الف



شکل ۳۳ــ ب

فعالیت ۱ــ۴

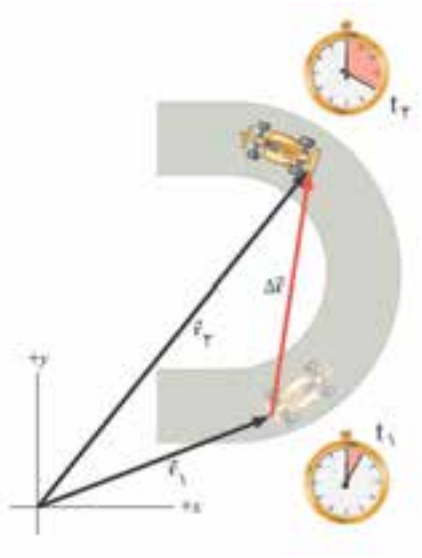
همانطور که نمودار شکل ۳۴ نشان می‌دهد در لحظهٔ $t = ۲s$، دو خودرو با هم تلاقی دارند. اگر در زمان یکسانی از نقطهٔ (۸ m، ۱۲ m) عبور نکنند بین آنها برخورد رخ نمی‌دهد.



شکل ۳۴

جابه‌جایی و سرعت متوسط

راهنمای تدریس : در اینجا نیز جسم در واقع ذره‌ای است که روی مسیری در صفحه حرکت می‌کند. باید دانش‌آموزان به مسیر و تغییرات مؤلفه‌های x و y ذره هنگام حرکت توجه داشته باشند. چنانچه مسیری واقعی‌تر مطابق شکل ۳۵ روی تابلوی کلاس رسم کنید. به نظر می‌رسد درک آن ملموس‌تر باشد. در اینجا ماشین را نیز مانند یک ذره در نظر می‌گیریم.



شکل ۳۵

فعالیت ۱ــ۴

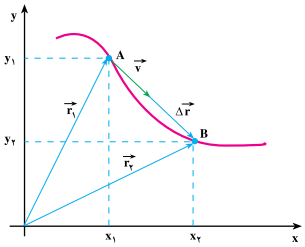
معادله‌های حرکت در SI برای خودروی A در صفحهٔ افقی به صورت $x_A = 2t^2$ و $y_A = 8$ و برای خودروی B در همان صفحه به صورت $x_B = 6t$ و $y_B = 4t$ داده شده است. از طریق نقطه‌یابی تحقیق کنید که آیا مسیر این دو خودرو تلاقی دارند یا نه؟ چه شرطی باید برقرار باشد تا بین خودروها برخورد رُخ دهد؟

جابه‌جایی و سرعت متوسط : برای بررسی حرکت جسم روی مسیری مطابق شکل ۱ــ۱۵، فرض کنید متحرکی در لحظهٔ t_1 در نقطهٔ A (مکان $\vec{r}_1$) و در لحظهٔ t_2 در نقطهٔ B (مکان $\vec{r}_2$) باشد. در فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم، برداری که از A به B رسم می‌شود جابه‌جایی (تغییر مکان) جسم را در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ نمایش می‌دهد. این بردار که در شکل ۱ــ۱۵ رسم شده است، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (۱ــ۲۰)$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})$$

$$\Delta\vec{r} = (\Delta x)\vec{i} + (\Delta y)\vec{j} \qquad (۱ــ۲۱)$$



شکل ۱ــ۱۵ــ بردار سرعت متوسط و بردار تغییر مکان هم‌جهت‌اند.

۱۸

مثال پیشنهادی

معادله‌های حرکت جسمی در امتداد محورهای x و y در SI با رابطه‌های زیر بیان شده است

$$x = -8t + 1 \quad , \quad y = t^2 - 2t$$

الف) بردار مکان جسم را در لحظه‌های $t_1 = 0$ و $t_2 = 3\,s$ به دست آورید.

ب) سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی صفر تا ۳s تعیین و بزرگی آن را حساب کنید.

حل : الف) در لحظهٔ $t_1 = 0$ داریم :

$$x_1 = 1m, y_1 = 0 \Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{i}$$

همچنین در لحظهٔ $t = 3s$ داریم :

$$x_2 = -23m \ , \ y_2 = 3m \Rightarrow \vec{r}_2 = -23\vec{i} + 3\vec{j}$$

ب) در بازهٔ زمانی صفر تا ۳s، یعنی $\Delta t = 3s$، داریم :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -23 - 1 = -24m$$

$$\Delta y = y_۲ - y_۱ = ۳ - ۰ = ۳m$$

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

$$= \frac{-۲۴}{۳}\vec{i} + \frac{۳}{۳}\vec{j} = -۸\vec{i} + \vec{j}$$

$$\bar{v} = \sqrt{(-۸)^۲ + (۱)^۲} = \sqrt{۶۵} \simeq ۸ m/s$$

تمرین پیشنهادی

بردار مکان ذره‌ای در ابتدا $\vec{r}_۱ = ۵\vec{i} - ۶\vec{j}$ و ۱۰ ثانیه بعد $\vec{r}_۲ = -۲\vec{i} + ۸\vec{j}$ است (همه برحسب متر). بردار سرعت متوسط این ذره در حین این ۱۰ ثانیه برحسب نماد گذاری بردارهای یکه چگونه است؟

پاسخ :

$$\vec{\bar{v}} = -۰/۷\vec{i} + ۱/۴\vec{j}$$

سرعت متوسط جسم در یک بازهٔ زمانی معین، همانند حالت یک بعدی، به‌این صورت تعریف می‌شود :

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (۱-۲۲)$$

و با استفاده از رابطهٔ ۱ـ۲۱ داریم :

$$\vec{\bar{v}} = (\frac{\Delta x}{\Delta t})\vec{i} + (\frac{\Delta y}{\Delta t})\vec{j} \qquad (۱-۲۳)$$

اگر $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ را با $\bar{v}_x$ و $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ را با $\bar{v}_y$ نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$\vec{\bar{v}} = (\bar{v}_x)\vec{i} + (\bar{v}_y)\vec{j} \qquad (۱-۲۴)$$

پرسش ۱ـ۱

رابطهٔ ۱ـ۲۲ نشان می‌دهد که سرعت متوسط، کمیتی برداری است و $\vec{\bar{v}}$ با $\Delta \vec{r}$ هم‌جهت است. علت را توضیح دهید.

مثال ۱ـ۱۱

معادله‌های حرکت جسمی در دو بُعد، به صورت زیر است :

$x = ۲t$ و $y = -t^۲ + ۴t$ (SI)

الف) بردار مکان جسم را در لحظه‌های $t_۱ = ۱s$ و $t_۲ = ۲s$ به دست آورید.

ب) سرعت متوسط آن را در بازهٔ زمانی ۱تا۲ ثانیه تعیین و بزرگی آن را حساب کنید.

پاسخ

الف) در $t_۱ = ۱s$:

$x_۱ = ۲m$ و $y_۱ = +۳m$

۱۹

پرسش ۱ـ۱

پاسخ : از آنجا که Δt همواره کمیتی نرده‌ای و مثبت است، تقسیم یک کمیت برداری بر Δt، تغییری در جهت و ماهیت برداری بودن آن کمیت نمی‌دهد.

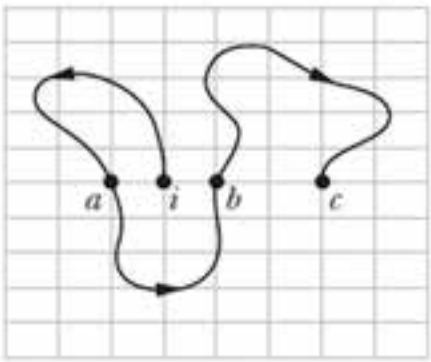
تمرین‌های پیشنهادی

خرگوشی در زمان $t_۱ = ۰$ دارای مؤلفه‌های x و y (۳/۴ m و ۱/۱ m) و در زمان $t_۲ = ۳s$، دارای مؤلفه‌های (۵/۳ m و −۰/۵ m) است. در این بازهٔ زمانی مطلوب است :

الف) مؤلفه‌های سرعت متوسط خرگوش.

ب) بزرگی و جهت سرعت متوسط.

شکل ۳۶ مسیر حرکت خرگوش را نشان می‌دهد که در پی غذا از نقطهٔ آغازین i به راه افتاده است. خرگوش برای رفتن از هر نقطهٔ مشخص شده به نقطهٔ مشخص شدهٔ بعدی روی مسیر، زمان یکسان T را طی می‌کند. نقطه‌های a، b و c را بنا به بزرگی سرعت متوسط خرگوش برای رسیدن به آنها از نقطهٔ آغازین i به گونه‌ای مرتب کنید که بیشترین مقدار در ابتدا باشد.

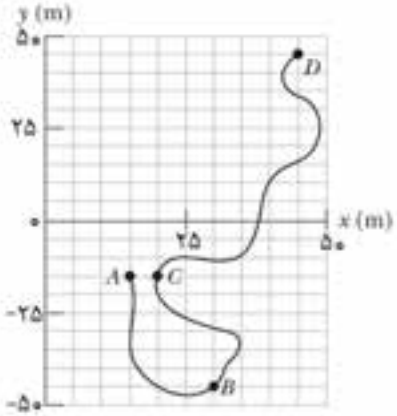


شکل ۳۶

شکل ۳۷ مسیر حرکت سنجابی را نشان می‌دهد که روی سطح زمین از نقطهٔ A (در زمان $t = ۰$) به نقاط B (در زمان $t = ۵\ min$) و C (در زمان $t = ۱۰\ min$) و D (در زمان $t = ۱۵\ min$) می‌رود.

الف) بردار سرعت‌های متوسط سنجاب را از نقطهٔ A به هر سه نقطهٔ دیگر برحسب نمادگذاری بردارهای یکه بنویسید.

ب) بزرگی سرعت‌های متوسط را پیدا کرده و از بیشترین تا کمترین مقدار، به ترتیب بنویسید.



شکل ۳۷

تمرین ۱ـ۳

پاسخ : بردار مکان ذره عبارت است از

$$\vec{r} = (۱۰t)\,\vec{i} + (-۵t^۲)\,\vec{j}$$

در $t_۱ = ۰$ داریم :

$$\vec{r}_۱ = ۰$$

در $t_۲ = ۲s$ داریم :

$$\vec{r}_۲ = ۲۰\,\vec{i} - ۲۰\,\vec{j}$$

به این ترتیب خواهیم داشت.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱ = ۲۰\,\vec{i} - ۲۰\,\vec{j}$$

با توجه به تعریف سرعت متوسط داریم :

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{۲۰\,\vec{i} - ۲۰\,\vec{j}}{۲} = ۱۰\,\vec{i} - ۱۰\,\vec{j}$$

بزرگی سرعت متوسط برابر است با :

$$\bar{v} = \sqrt{۱۰^۲ + ۱۰^۲} = ۱۰\sqrt{۲} \simeq ۱۴\,m/s$$

$$\vec{r}_۱ = ۲\,\vec{i} + ۳\,\vec{j}$$

به همین ترتیب در $t_۲ = ۲s$:

$$x_۲ = ۴m \text{ و } y_۲ = ۴m$$

$$\vec{r}_۲ = ۴\,\vec{i} + ۴\,\vec{j}$$

ب) در بازهٔ زمانی ۱ تا ۲ ثانیه :

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = ۴ - ۲ = ۲m$$

$$\Delta y = y_۲ - y_۱ = ۴ - ۳ = ۱\,m$$

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲}{۱} = ۲m/s$$

$$\bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{۱}{۱} = ۱m/s$$

$$\vec{\bar{v}} = ۲\,\vec{i} + \vec{j}$$

$$(\bar{v})^۲ = (\bar{v}_x)^۲ + (\bar{v}_y)^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۵$$

$$\bar{v} = \sqrt{۵} \simeq ۲/۲۳m/s$$

تمرین ۱ـ۳

در فعالیت ۱ـ۳ سرعت متوسط خرگوش را در بازهٔ زمانی ۰ تا ۲ ثانیه به‌دست آورید.

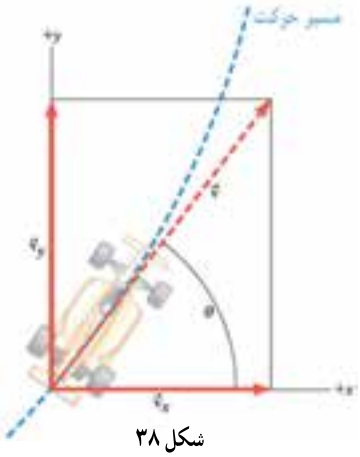
سرعت لحظه‌ای : در شکل ۱ـ۱۶نمودار حرکت جسمی روی یک مسیر خمیده در صفحهٔ xoy نشان داده شده است. مکان جسم در دو لحظهٔ t_1 و t_2، مشخص شده است. پیش‌تر گفتیم که بردار سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی معین، با بردار جابه‌جایی مربوط به آن، هم‌جهت است. همچنین می‌دانید هنگامی که بازهٔ زمانی Δt، کوچک و کوچک‌تر شود، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؛ یعنی، بردار سرعت لحظه‌ای حدّ بردار سرعت متوسط است، وقتی Δt به

۲۰

سرعت لحظه‌ای

راهنمای تدریس : در حرکت دوبعدی نیز مشابه حرکت یک‌بعدی، سرعت لحظه‌ای برابر است با حد سرعت متوسط، وقتی بازهٔ زمانی به صفر میل می‌کند و برابر است با آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان با زمان. اختلاف اساسی در آن است که در این‌جا مکان $\vec{r}$ و سرعت لحظه‌ای $\vec{v}$ ، هردو برداری‌اند.

دانش‌آموزان باید به خوبی درک کنند که وقتی Δt به صفر میل می‌کند، بردار $\Delta\vec{r}$ بر مسیر حرکت مماس می‌شود به این



شکل ۳۸