

اندازه‌گیری زاویه با وسایل ساده نقشه‌برداری

- هدف‌های رفتاری: از دانش آموز انتظار می‌رود در پایان این فصل:
- ۱- زاویه را تعریف کرده انواع زوایای مورد استفاده را در نقشه برداری، با رسم شکل توضیح دهد.
 - ۲- واحدهای اندازه‌گیری زاویه را توضیح دهد.
 - ۳- روش تبدیل واحدهای اندازه‌گیری زاویه به یکدیگر را توضیح دهد.
 - ۴- روش‌های اندازه‌گیری زاویه افقی را با متر، انجام دهد.
 - ۵- روش پیاده کردن زاویه را با متر و گونیا، انجام دهد.

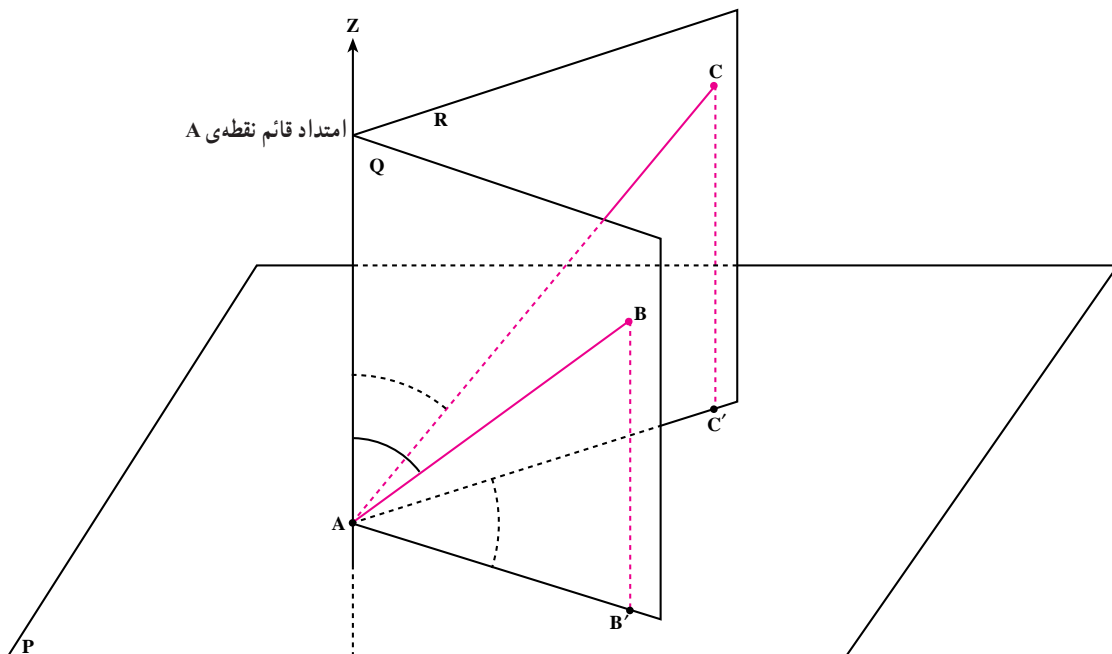
صفحه‌ی افقی و قائم اندازه می‌گیرند در شکل ۵-۱ دو امتداد

AB و AC را در نظر بگیرید.

۵-۱- تعریف زاویه

قسمتی از صفحه که بین دو امتداد غیرموازی محصور

شده باشد «زاویه» نامیده می‌شود. در نقشه‌برداری زاویه را در دو



AZ امتداد قائم (شاقولی) نقطه‌ی A، صفحه‌ی P، صفحه‌ی افقی گذرنده از نقطه‌ی A و صفحات Q و R صفحات قائم نقطه‌ی A هستند. امتداد AB روی

صفحه‌ی قائم Q و امتداد AC روی صفحه‌ی قائم R قرار دارند.

شکل ۵-۱

دقیق هر زاویه‌ی یک دقیقه را به 60° قسمت مساوی تقسیم می‌کنند و هر قسمت را یک «ثانیه» می‌نامند؛ مثلاً در نقاله‌های معمولی و نیز در شیب‌سنج دستی کوچکترین تقسیمات در حد درجه یا نیم‌درجه (30° دقیقه) می‌باشد، اما در دوربین‌های نقشه‌برداری معمولی کوچکترین تقسیمات یک دقیقه و در دوربین‌های دقیق نقشه‌برداری کوچکترین تقسیمات زاویه در حد 10° ثانیه یا 5° ثانیه است. و در وسایل پیشرفته‌ی بسیار دقیق حتی 1° ثانیه قابل قرائت است.

برای نشان دادن یک زاویه برحسب درجه و دقیقه و ثانیه از علائم مخصوصی استفاده می‌نمایند؛ مثلاً صد و پنجاه و هشت درجه و چهار و سه دقیقه و پنج ثانیه را چنین می‌نویسند:

$$158^\circ 43' 45''$$

۲-۲-۵- گراد: $\frac{1}{4}$ زاویه‌ی تمام صفحه را «گراد» می‌نامند و برای اندازه‌گیری‌های دقیق‌تر یک گراد را به 100° قسمت مساوی تقسیم می‌کنند و هر قسمت را «دقیقه‌ی گرادی» یا «سانتی‌گراد» می‌نامند و برای کارهای بسیار دقیق هر دقیقه‌ی گرادی را نیز به 100° قسمت مساوی تقسیم می‌کنند و به آن «ثانیه‌ی گرادی» یا «سانتی‌گراد» می‌گویند.

پرسش: یک گراد چند ثانیه‌ی گرادی است؟

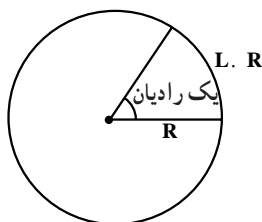
برای نشان دادن اندازه‌ی یک زاویه برحسب گراد از علائم مخصوصی استفاده می‌شود که در این مثال می‌توانید ببینید. (البته چون تقسیمات گراد اعشاری است می‌توانیم دقیقه و ثانیه‌ی آن را به صورت ممیزی نشان دهیم.)

مثال: سی و هفت گراد و پنجاه و چهار دقیقه و هشتاد و پنج ثانیه را می‌توانیم به سه صورت نمایش دهیم:

$$37^g 54^c 85^s \text{ یا } 37^g 54^c \text{ یا } 37^g 54^c 85^s$$

نکته: معمولاً وسایل و دوربین‌های نقشه‌برداری برحسب

درجه یا گراد مدرج شده‌اند.



شکل ۲-۵

زاویه‌ی افقی: زاویه‌ی بین دو امتداد AB و AC در واقع زاویه‌ی بین دو صفحه‌ی P و Q است که روی صفحه‌ی افقی P تصویر شده است و به آن زاویه‌ی افقی می‌گویند ($\hat{C'AB'}$).

زاویه‌ی قائم: زاویه‌ی بین یک امتداد و خط شاقولی گذرنده از آن را «زاویه‌ی قائم» آن امتداد می‌گویند؛ مثلاً زاویه‌ی بین امتداد AB و امتداد قائم نقطه‌ی A را که روی صفحه‌ی قائم Q قرار دارد زاویه‌ی قائم امتداد AB می‌گویند. (شکل ۵-۱)

زاویه‌ی \hat{ZAB} و زاویه‌ی بین امتداد AC و امتداد قائم نقطه‌ی A را که روی صفحه‌ی قائم R قرار دارد زاویه‌ی قائم امتداد AC می‌گویند (شکل ۵-۱ زاویه‌ی \hat{ZAC}).

زاویه‌ی شیب: زاویه‌ی بین یک امتداد و صفحه‌ی افقی گذرنده از آن را «زاویه‌ی شیب» آن امتداد می‌گویند؛ مثلاً زاویه‌ی بین امتداد AB و صفحه‌ی افقی P که از A می‌گذرد زاویه‌ی شیب امتداد AB (شکل ۵-۱ زاویه‌ی $\hat{B'AB}$) و زاویه‌ی بین امتداد AC و صفحه‌ی افقی P که از A می‌گذرد زاویه‌ی شیب امتداد AC می‌نامند (شکل ۵-۱ زاویه‌ی $\hat{CAC'}$).

رابطه‌ی بین زاویه‌ی شیب و زاویه‌ی قائم یک امتداد: همان‌طور که در شکل ۵-۱ ملاحظه می‌کنید زاویه‌ی شیب و زاویه‌ی قائم یک امتداد متمم یکدیگر هستند:

$$90^\circ \text{ زاویه‌ی قائم زاویه‌ی شیب}$$

در نقشه‌برداری با وسایل ساده، با یک شیب‌سنج دستی مستقیماً زاویه‌ی شیب به دست می‌آید، اما دوربین‌های نقشه‌برداری معمولاً زاویه‌ی قائم یک امتداد را اندازه می‌گیرند و برای محاسبه‌ی زاویه‌ی شیب داریم:

$$\text{زاویه‌ی قائم زاویه‌ی قائمه } (90^\circ \text{ یا } 100^\circ \text{ گراد}) \text{ زاویه‌ی شیب}$$

۲-۵- واحدهای اندازه‌گیری زاویه

۱-۲-۵- درجه: $\frac{1}{360}$ زاویه‌ی تمام صفحه را «درجه» می‌گویند؛ به عبارت دیگر، اگر صفحه‌ی یک دایره را با رسم قطرهایش به 360° قسمت مساوی تبدیل کنیم هر کدام از زاویه‌های مرکزی به وجود آمده برابر یک درجه خواهند بود. برای اندازه‌گیری‌های دقیق‌تر هر زاویه‌ی یک درجه را به 60° قسمت مساوی تقسیم می‌کنند که به هر قسمت یک دقیقه می‌گویند و برای اندازه‌گیری‌های بسیار

اندازه‌ی زاویه برحسب درجه ($D=36$) را در فرمول جایگذاری می‌کنیم تا اندازه‌ی زاویه برحسب گراد (G) محاسبه شود.

$$\frac{36}{360} = \frac{G}{400} \Rightarrow G = \frac{400 \times 36}{360} = 40 \text{ گراد}$$

$$\Rightarrow \boxed{G=40 \text{ گراد}}$$

برای تبدیل درجه به رادیان داریم:

$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} \text{ و } D=36$$

با جایگذاری و حل فرمول داریم:

$$\frac{36}{360} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow R = \frac{36 \times 2\pi}{360} \Rightarrow \boxed{R = 0/2\pi}$$

نکته: در نقشه برداری معمولی معمولاً با زوایای گراد و درجه سر و کار داریم؛ پس می‌توانیم از فرمول ساده‌شده‌ای استفاده نماییم:

$$\frac{D}{9} = \frac{G}{10}$$

پرسش: چگونه این فرمول را از فرمول اصلی به دست آورده‌ایم؟

بنابراین، برای تبدیل درجه به گراد از فرمول:

$$G = \frac{10}{9} D$$

و برای تبدیل گراد به درجه از فرمول:

$$D = \frac{9}{10} G$$

استفاده می‌کنیم.

مثال: زاویه 45° را به گراد تبدیل کنید:

$$G = \frac{10}{9} \times 45 = 50 \text{ گراد}$$

مثال: زاویه 176 گراد چند درجه است؟

$$D = \frac{9}{10} \times 176 = 158.4$$

۵-۴- روش‌های اندازه‌گیری زاویه با متر

۵-۴-۱- روش اول: در این روش برای اندازه‌گیری یک زاویه روی دو ضلع زاویه از طرف رأس دو طول مساوی

پرسش: دوربین A دارای دقت یک ثانیه‌ی گرادی و دوربین B دارای دقت یک ثانیه‌ی درجه‌ای است. کدام یک از دوربین‌ها دقیق‌تر است؟

جواب: از آنجا که گراد $\frac{1}{400}$ و درجه $\frac{1}{360}$ زاویه تمام صفحه می‌باشد پس تقسیمات گراد ریزتر یعنی دوربین A دقیق‌تر است.

۳-۲-۵- رادیان: در هر دایره اندازه‌ی یک زاویه مرکزی که طول کمان مقابل آن برابر شعاع دایره باشد، یک رادیان است بنابراین، برای اندازه‌گیری یک زاویه برحسب رادیان کافی است طول قوس مقابل به آن زاویه را بر شعاع همان دایره تقسیم نماییم:

$$\boxed{\text{طول قوس مقابل به آن زاویه} = \frac{\text{شعاع دایره}}{\text{اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان}}}$$

پرسش: اندازه‌ی یک زاویه‌ی 360 درجه یا 400 گراد (تمام صفحه) برحسب رادیان چقدر است؟

پاسخ: طول قوس مقابل زاویه 360° یا 400 گراد همان محیط دایره می‌باشد؛ پس اگر شعاع دایره را r فرض کنیم، داریم:

$$\text{رادیان } 2\pi = \frac{2\pi r}{r} = \text{زاویه تمام صفحه برحسب رادیان}$$

۳-۵- تبدیل واحدهای زاویه

فرمول کلی تبدیل واحدهای زاویه عبارت است از:

$$\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi}$$

در این فرمول D معرف درجه، G معرف گراد و R معرف رادیان است. برای تبدیل هر واحد به واحد دیگر کافی است کسر مربوط به هر کدام را کنار یکدیگر نوشته تناسب حاصل را حل نماییم.

مثال: زاویه‌ی 36° چند گراد، چند رادیان است؟

برای تبدیل درجه به گراد داریم:

$$D=36 \text{ و } \frac{D}{360} = \frac{G}{400}$$

می‌دانیم مثلث OAB مثلث متساوی‌الساقین است؛ پس ارتفاع OH نیمساز زاویه α نیز می‌باشد؛ پس در مثلث OAH داریم:

$$\widehat{AOH} = \frac{\alpha}{2}$$

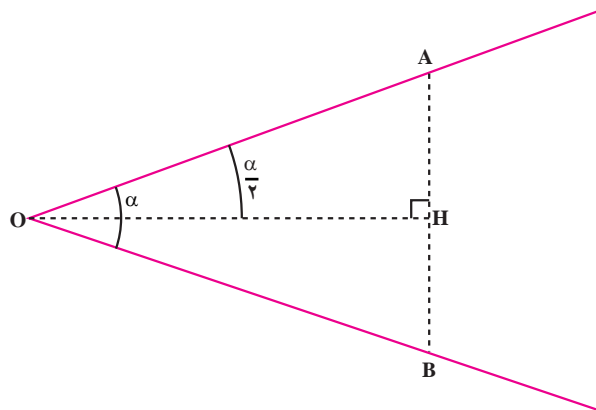
با استفاده از روابط مثلثاتی می‌نویسیم:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{OA} \text{ و } AH = \frac{AB}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{2OA} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \text{Arc sin } \frac{AB}{2OA}$$

بنابراین، کافی است اندازه‌ی AB را روی زمین با متر به‌دست آورده با معلوم بودن OA مقدار $\frac{AB}{2OA}$ را محاسبه می‌کنیم؛ سپس با کمک ماشین حساب زاویه‌ی مورد نظر ($\frac{\alpha}{2}$) را پیدا می‌کنیم و از آن‌جا می‌توانیم α را محاسبه کنیم:

$$\alpha = 2 \times \frac{\alpha}{2}$$



شکل ۵-۳

جدا می‌کنیم (شکل ۵-۳)؛ داریم: OA = OB می‌خواهیم زاویه‌ی $\widehat{AOB} = \alpha$ را محاسبه نماییم. در مثلث AOB ارتفاع وارد بر AB را رسم می‌نماییم.

مطالعه آزاد



البته از فرمول کسینوس‌ها نیز می‌توانیم استفاده نماییم. در شکل ۵-۳ داریم:

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \alpha \text{ و}$$

$$OA = OB$$

$$(AB)^2 = 2(OA)^2 - 2(OA)^2 \cdot \cos \alpha$$

$$= 2(OA)^2 (1 - \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{(AB)^2}{2(OA)^2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{(AB)^2}{2(OA)^2}$$

بنابراین، در این حالت مستقیماً اندازه‌ی $\cos \alpha$ به‌دست می‌آید و با مراجعه به ماشین حساب می‌توانیم مقدار α را پیدا کنیم.

مثال: در شکل ۵-۳ فرض کنید اندازه‌ی $OA = OB = 20 \text{ m}$ را روی دو ضلع زاویه جدا کرده‌ایم و اندازه‌ی AB را روی زمین اندازه‌گیری کرده‌ایم و داریم:

$$AB = 17 / 399$$

با جای‌گذاری در فرمول داریم:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{(AB)^2}{2(OA)^2} = \frac{(17 / 399)^2}{2(20)^2}$$

$$\cos \alpha = 1 - 0 / 378406501 = 0 / 621593498$$

با مراجعه به جدول به دنبال زاویه‌ای می‌گردیم که $\cos \alpha = 0 / 62159$ و نزدیکترین عدد در جدول به این صورت

$$\text{است: } \cos(51^\circ 34') = 0 / 62160 \text{ پس}$$

$$\alpha = 51^\circ 34'$$

اکنون همین مثال را با روش $\sin \frac{\alpha}{2}$ نیز حل می‌کنیم:
داریم:

$$\text{متر } 20 \text{ } OA \text{ } OB \text{ و } AB \text{ } 17/399$$

با جای گذاری در فرمول داریم:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{2 \cdot OA} = \frac{17/399}{2 \times 20} = 0 / 43497$$

با استفاده از ماشین حساب داریم:

$$\frac{\alpha}{2} = 25^\circ 47'$$

$$\alpha = 2 \times \frac{\alpha}{2} = 2 \times (25^\circ 47')$$

$$= 50^\circ 94' = 51^\circ 34'$$

با معلوم بودن $\cos \alpha$ با مراجعه به ماشین حساب، α را

پیدا می‌کنیم:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

نکته: اگر $\cos \alpha$ منفی باشد نشانگر این است که زاویه‌ی

α منفرجه است؛ یعنی از 90° بزرگتر است و می‌توانیم بنویسیم:

$\alpha = 90^\circ + x$ ، و چون جداول مثلثاتی برای زوایای 0° تا 90° درجه

تنظیم شده، پس ما باید ابتدا مقدار زاویه‌ی x را پیدا کرده و سپس

آن را با 90° جمع کنیم تا زاویه‌ی α به دست بیاید. برای این کار

به این رابطه‌ی مثلثاتی توجه کنید:

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ + x) = -\sin x$$

بنابراین، در ستون سینوس‌ها عدد $\cos \alpha$ را جستجو می‌کنیم

(بدون توجه به علامت منفی آن) و پس از به دست آوردن زاویه‌ی

x آن را با 90° جمع می‌کنیم تا α به دست بیاید.

۲-۴-۵ روش دوم: گاهی اوقات امکان جدا کردن

دو طول مساوی روی دو ضلع زاویه وجود ندارد، مانند شکل

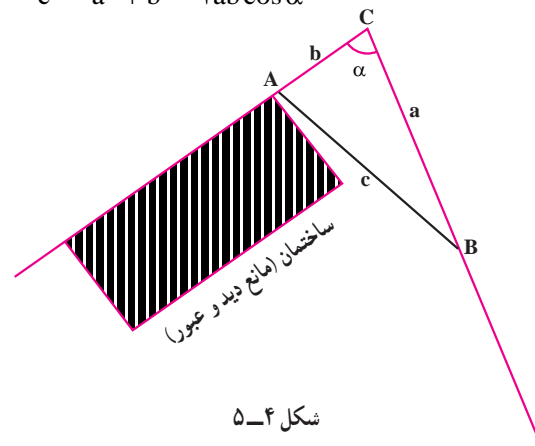
۲-۴-۵. در این حالت، دو طول دلخواه را از دو ضلع زاویه جدا

می‌کنیم تا نقاط A و B به دست بیاید؛ سپس طول AB را با متر

اندازه می‌گیریم و با استفاده از فرمول کسینوس‌ها به این صورت

عمل می‌کنیم:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$



شکل ۲-۴-۵

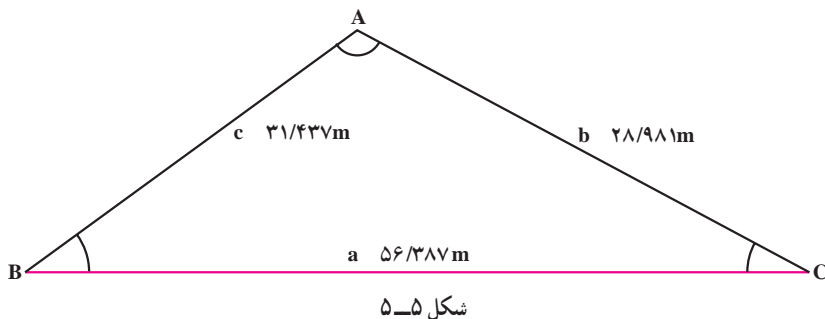
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos A = \frac{(28/981)^2 + (31/437)^2 - (56/387)^2}{2(28/981)(31/437)}$$

$$= -0.74160$$

مثال: برای به‌دست آوردن زوایای مثلثی، اضلاع آن به ترتیب، $AB = 31/437$ متر، $AC = 28/981$ متر و $BC = 56/387$ متر اندازه‌گیری شده‌اند زوایای این مثلث را محاسبه کنید (شکل ۵-۵).

برای به‌دست آوردن زاویه‌ی A داریم:



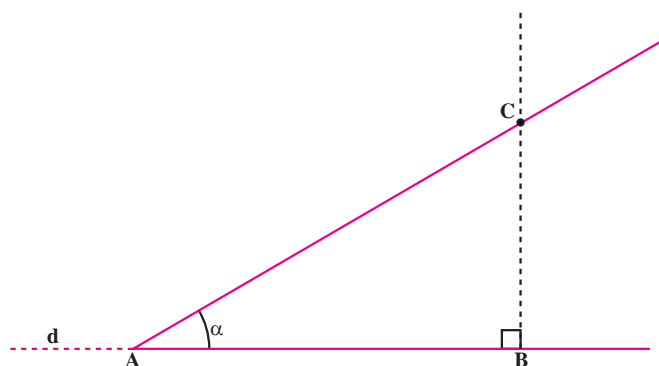
به‌دست آوردن زوایای B و C را نیز به دانش‌آموزان عزیز

می‌سپاریم.

از آن‌جا که عدد حاصل منفی است پس زاویه‌ی A منفرجه

است؛ پس باید با افزودن 90° به آن زاویه A را به‌دست بیاوریم:

$$\hat{A} = 90^\circ + (47^\circ 52') = 137^\circ 52'$$



از آن‌جا برای محاسبه BC داریم:

$$BC = AB \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

بنابراین، با جدا کردن طول BC روی خط عمود می‌توانیم

نقطه‌ی C و در نتیجه زاویه‌ی \hat{A} را پیاده نماییم.

مثال: می‌خواهیم زاویه‌ی $\alpha = \hat{CAB} = 38^\circ 41'$

روی پاره‌خط $AB = 19/17$ متر پیاده نماییم (شکل ۵-۶). ابتدا

طول، $AB = 19/17$ متر را روی زمین پیاده می‌کنیم؛ سپس از

۵-۵ پیاده کردن زوایا با متر و گونیای مساحی

می‌خواهیم روی پاره‌خط AB از نقطه‌ی A، زاویه‌ی

\hat{CAB} را جدا کنیم (شکل ۵-۶). برای این کار از نقطه‌ی B

به‌وسیله‌ی گونیای مساحی عمودی اخراج می‌کنیم؛ با معلوم بودن

AB و زاویه‌ی α با استفاده از رابطه‌ی مثلثاتی در مثلث ABC

داریم:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB}$$

نقطه‌ی B به وسیله‌ی گونیای مساحی عمودی اخراج می‌نماییم. اکنون باید طول BC را محاسبه نموده روی این خط عمود جدا نماییم:

$$BC = AB \cdot \text{tg} = 19/17 \times \text{tg}(38^\circ 41')$$

$$BC = 19/17 \times 0/80067 = 15/3488439$$

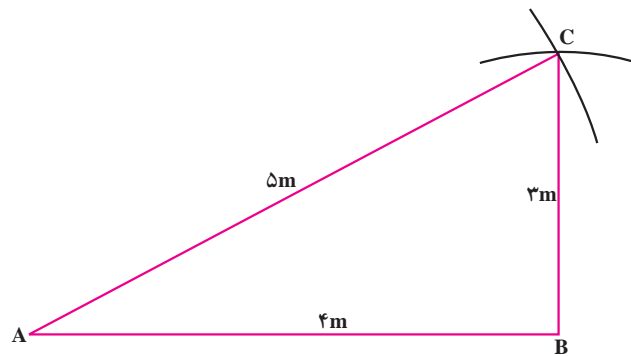
$$\Rightarrow BC \approx 15/349$$

با پیاده کردن BC روی خط عمود، نقطه‌ی C و در نتیجه زاویه‌ی \hat{CAB} مشخص می‌شود.

۵-۶ پیاده کردن زاویه توسط متر

اگر هنگام اخراج عمود از یک نقطه به گونیای مساحی دسترسی نداریم و یا به هر دلیلی می‌خواهیم زاویه را فقط با متر

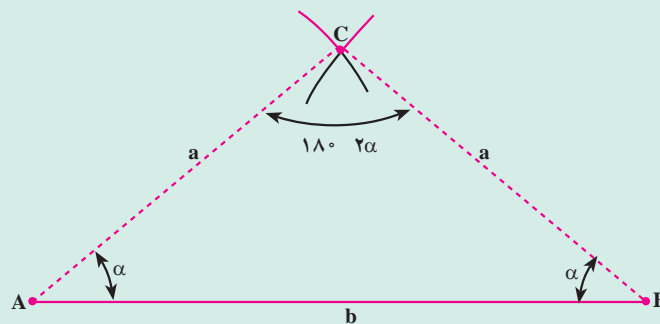
پیاده کنیم، می‌توانیم از روش تقاطع استفاده نماییم. برای زاویه‌ی قائمه از رابطه‌ی فیثاغورث می‌توانیم اضلاع مثلث را محاسبه کنیم یا از اعداد فیثاغورثی استفاده کنیم؛ مثلاً در شکل ۵-۷ ابتدا ضلع AB را به طول ۴ متر جدا کرده سپس یک بار متر را به طول ۳ متر (طول BC) باز کرده یک طرف آن را در نقطه‌ی B ثابت نگاه می‌داریم و به وسیله‌ی متر در حوالی نقطه‌ی C کمانی به طول ۳ متر پدید می‌آوریم و بار دیگر، ابتدای متر را در نقطه‌ی A قرار داده متر را به طول ۵ متر باز کرده کمانی می‌زنیم تا کمان قبلی را در نقطه‌ی C قطع کند. به این ترتیب، چون: $5^2 = 4^2 + 3^2$ برقرار است؛ پس مثلث ABC قائم‌الزاویه می‌باشد و زاویه‌ی B قائمه است. (البته می‌توانیم از مضرب‌های ۳ و ۴ و ۵ نیز مثل ۶ و ۸ و ۱۰ و غیره استفاده کنیم)



شکل ۵-۷

مطالعه آزاد

در صورتی که بخواهیم زاویه‌ی غیر قائمه‌ای را از روش تقاطع پیاده کنیم، می‌توانیم مثلث متساوی‌الساقینی مانند شکل ۵-۸ در نظر بگیریم.



شکل ۵-۸

می‌خواهیم زاویه‌ی α را روی امتداد AB پیاده نماییم. برای این کار از دو سر پاره‌خط AB کمان‌های مساوی BC و AC را می‌زنیم تا مثلث متساوی‌الساقین ABC و در نتیجه زاویه‌ی α پیاده شود. در این حالت، اندازه‌ی b AB و زاویه‌ای که می‌خواهیم پیاده نماییم (α) معلوم است و کافی است اندازه‌ی کمان (a) را محاسبه کنیم. از رابطه‌ی سینوس‌ها در مثلث داریم:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha}$$

چون $\sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$ ؛ پس داریم:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

می‌دانیم $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ؛ پس:

$$a = \frac{b}{2 \cos \alpha}$$

پس از ساده کردن $\sin \alpha$ از دو طرف تساوی داریم:

با معلوم بودن b و α می‌توانیم a را محاسبه کرده به اندازه‌ی a از دو طرف پاره‌خط AB کمانی می‌زنیم تا هم‌دیگر را در نقطه‌ی C قطع کنند و به این ترتیب، زاویه‌ی α روی زمین پیاده می‌شود.

مثال: می‌خواهیم روی پاره‌خط ۱۰m AB زاویه‌ی $48^\circ 55'$ را پیاده کنیم (شکل ۸-۵).

با استفاده از فرمول داریم:

$$a = \frac{b}{2 \cos \alpha} = \frac{10}{2 \cos(48^\circ 55')}$$

$$a = \frac{10}{2 \times 0.65715} = 7.608$$

بنابراین، به اندازه‌ی $a \approx 7.608 \text{ m}$ از دو سر پاره‌خط AB کمان‌هایی می‌زنیم تا هم‌دیگر را در نقطه‌ی C قطع کنند و به این ترتیب، زاویه‌ی α پیاده می‌شود.

به این پرسش‌ها پاسخ دهید

- ۱- زاویه را تعریف کرده، انواع زوایای مورد استفاده در نقشه برداری را با رسم شکل توضیح دهید.
- ۲- واحدهای اندازه‌گیری زاویه را توضیح دهید.
- ۳- روش تبدیل واحدهای اندازه‌گیری زوایا به یکدیگر چگونه است؟
- ۴- روش‌های اندازه‌گیری زوایای افقی را توضیح دهید.
- ۵- روش پیاده کردن زاویه با متر و گونیا چگونه است؟
- ۶- روش پیاده کردن زاویه قائمه را با متر توضیح دهید.

کار عملی

- ۱- در محیط مدرسه زوایای چند ضلعی ایجاد شده را با متر به دست آورید.
«هر زاویه را با دو روش به دست آورید.» و میانگین بگیرید.
- ۲- مجموع زوایای داخلی چندضلعی را به دست آورده با مقدار واقعی که از فرمول قائمه (4×2) به دست می‌آید مقایسه کنید. (n تعداد اضلاع می‌باشد)
- ۳- زوایا را به واحدهای دیگر تبدیل نمایید.
- ۴- زوایای مختلفی را که معلم برای شما روی کاغذ معین می‌کند روی زمین پیاده نمایید.
«از هر دو روش (متر و گونیا) استفاده کنید.»