نقطه‌ی $P(x,y)$ با جهت مثبت محور xها، زاویه‌ی θ می‌سازد. بنابر تعریف نسبت‌های مثلثاتی داریم :

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{۱} = \overline{OL}$$

ــ محور $yo'y$ را محور سینوس‌ها می‌نامند. با توجه به‌تعریف دایره‌ی مثلثاتی و تغییرات $\sin\theta$ داریم :

$$-۱ \le \sin\theta \le ۱$$

ــ $x'ox$ را محور کسینوس‌ها می‌نامند. با توجه به شعاع دایره‌ی مثلثاتی داریم :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\overline{OH}}{۱} = \overline{OH}$$

ــ تغییرات $\cos\theta$ برابر با :

$$-۱ \le \cos\theta \le ۱$$

با توجه به شکل ۴ـ۱۰ـ۲ و نسبت تشابه در مثلث‌های OAC و OPH داریم :

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{۱} \text{ و } x \ne ۰ \Rightarrow$$

$$\tan\theta = \overline{AC}$$

خط مماس بر دایره‌ی مثلثاتی در نقطه‌ی شروع (A) را محور تانژانت‌ها می‌نامند. بنابر نامحدود بودن خط داریم :

$$\tan\theta \in R$$

ــ با توجه به تعریف کتانژانت داریم :

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \text{ ، } y \ne ۰$$

ــ از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBD داریم : (شکل ۴ـ۱۰ـ۲)

$$\cot\theta = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BD}}{۱} = \overline{BD}$$

ــ چون دو مثلث OPH و OBH به حالت سه زاویه، با یکدیگر متشابه می‌باشند و داریم :

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \overline{BD} \Rightarrow \cot\theta = BD$$

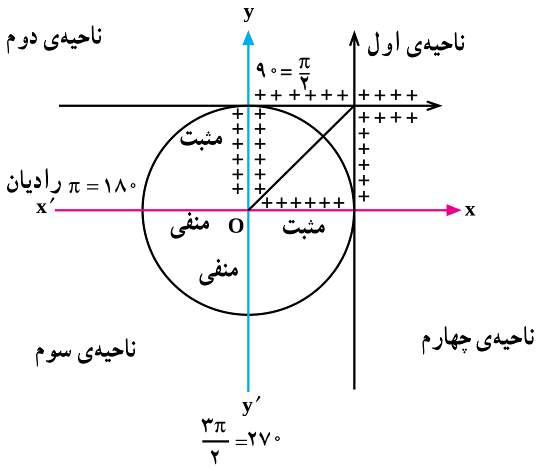
ــ بنابر نامحدود بودن، محور کتانژانت‌ها داریم :

$$\cot\theta \in IR$$

علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانه‌ی دایره مثلثاتی

فعالیت ۱۶ــ۲

۱) در شکل ۱۰۵ــ۲ دایره‌ی مثلثاتی به همراه محورهای مثلثاتی رسم شده است. سؤال‌ها و جدول‌های زیر را کامل کنید.



شکل ۱۰۵ــ۲

تغییرات علامت $\sin\alpha$ در جدول ۲۱ــ۲

۱ــ تغییرات علامت $\sin\alpha$ را در جدول ۲۱ــ۲ کامل کنید.

جدول ۲۱ــ۲

α	ناحیه‌ی اول $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	ناحیه‌ی دوم $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	ناحیه‌ی سوم $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	ناحیه‌ی چهارم $\frac{3\pi}{2}<\alpha<4\pi$
علامت $\sin\alpha$	+	□	□	□

۲ــ تغییرات علامت $\cos\alpha$ را در جدول ۲۲ــ۲ کامل کنید.

جدول ۲۲ــ۲

α	$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
علامت $\cos\alpha$	+	□	−	□

۳ــ با توجه به تغییرات علامت $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در نواحی چهارگانه علامت $\tan\alpha$ را در جدول ۲۳ــ۲ تکمیل کنید.

جدول ۲۳ــ۲

α	ناحیه‌ی اول	ناحیه‌ی دوم	ناحیه‌ی سوم	ناحیه‌ی چهارم
علامت $\tan\alpha$	□	□	□	−

۴ــ با تکمیل جدول ۲۴ــ۲ علامت $\cot\alpha$ را در نواحی چهارگانه‌ی دایره مثلثاتی مشخص کنید.

جدول ۲۴ــ۲

α	$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<0<\pi$	$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	$0<\alpha<2\pi$
علامت $\cot\alpha$	□	□	+	−

ـ از رابطه‌ی روبه‌رو می‌توان نتیجه‌ی زیر را گرفت :

$\tan\alpha.\cot\alpha=۱$

نتیجه: علامت‌های $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ همواره در ناحیه‌ی اول تا چهارم با هم برابر است.

مثال: رابطه‌ی مقابل همواره برقرار است، حدود α را مشخص کنید.

$\sin\alpha.\cos\alpha<۰$ و $\sin\alpha>۰$

حل: چون حاصل‌ضرب سینوس و کسینوس منفی است و $\sin\alpha>۰$:

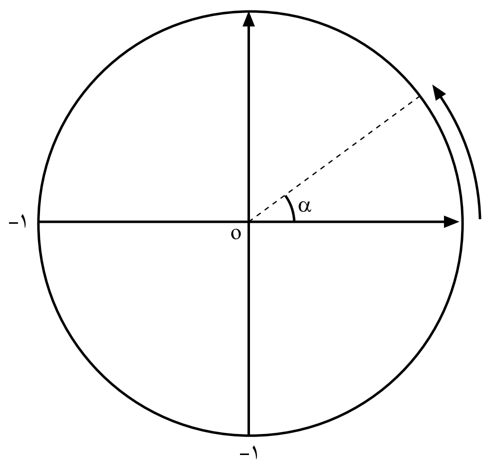
$\cos\alpha<۰$

ـ پس α در ناحیه‌ی دوم قرار دارد، یعنی :

$\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi$

فعالیت ۱۷ــ۲

در شکل ۱۰۶ــ۲ دایره‌ی مثلثاتی با محورهای سینوس و کسینوس رسم شده است.



شکل ۱۰۶ــ۲

۱ــ هر گاه $\alpha=۰$ باشد محور کسینوس‌ها چه عددی را نشان می‌دهد؟

$\cos ۰^\circ=\square$

۲ــ هرگاه α از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ و از $\frac{\pi}{۲}$ تا π تغییر کند مقدار جبری کسینوس رفته رفته کم می‌شود در نقطه‌ی $\alpha=\frac{\pi}{۲}$ ، $\alpha=\pi$ مقدار کسینوس چه اعدادی را نشان می‌دهد؟

$\cos\frac{\pi}{۲}=\square$, $\cos\pi=\square$

۳ــ هرگاه α از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ و نیز از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π تغییر کند آیا مقدار کسینوس روبه افزایش است؟

بلی $\square$ خیر $\square$

در نقاط $x=\frac{۳\pi}{۲}$ و $x=۲\pi$ مقدار کسینوس چیست؟

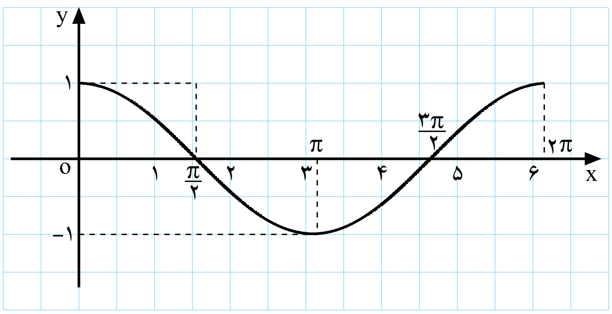
$\cos\frac{۳\pi}{۲}=\square \quad , \quad \cos ۲\pi=\square$

۴ــ جدول ۲۵ــ۲ را کامل کنید.

۵ــ با استفاده از جدول ۲۵ــ۲ و فعالیت ۱۳ــ۲ نمودار $y=\cos x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم شده است.

جدول ۲۵ــ۲

α	۰	$\frac{\pi}{۲}=۹۰$	$\pi=۱۸۰$	$\frac{۳\pi}{۲}=۲۷۰^\circ$	$۲\pi=۳۶۰^\circ$
علامت $\cos\alpha$			-۱		



نمودار ۱۰۷ــ۲

۶ ــ هرگاه $\alpha=۰$ باشد امتداد زاویه محور سینوس‌ها را در مبدأ مختصات قطع می‌کند. در این حالت سینوس صفر درجه را به‌دست آورید (جدول ۲۶ــ۲ را تکمیل کنید).

جدول ۲۶ــ۲

α	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\sin\alpha$	$\square$	$\square$	۰	-۱	$\square$

$\sin(۰^\circ)=\square$

۷ــ وقتی α از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند مقدار $\sin\alpha$ مثبت است. در $\alpha=\frac{\pi}{۲}$ مقدار سینوس **حداکثر** است. این مقدار چیست؟

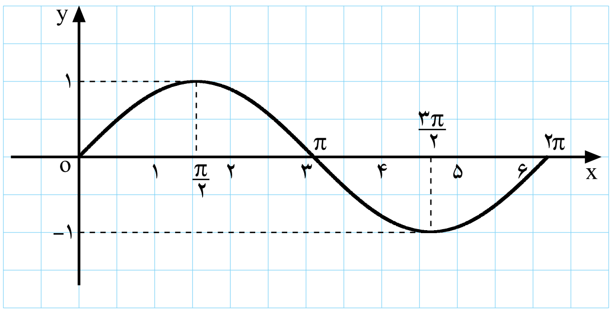
$\sin\frac{\pi}{۲}=\square$

۸ ــ در فواصل $\frac{\pi}{۲}$ تا π و π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ مقدار سینوس کاهش می‌یابد به‌طوری که در $\alpha=\frac{۳\pi}{۲}$ مقدار حداقل سینوس برابر ۱− می‌باشد. در ناحیه‌ی چهارم $(\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi)$ دوباره مقدار سینوس افزایش می‌یابد به‌طوری که در $\alpha=۲\pi$ مقدار آن صفر می‌شود.

$\sin\frac{۳\pi}{۲}=\square$

$\sin ۲\pi=۰$

ــ با توجه به مطالب بالا نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم شده است.



نمودار ۱۰۸ــ۲

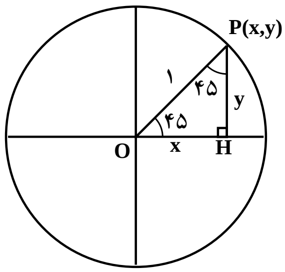
ــ با توجه به روابط روبه‌رو جدول ۲۷ــ۲ را تکمیل کنید.

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ,\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

جدول ۲۷ــ۲

α	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
$\tan\alpha$	$\frac{۰}{۱}=۰$	$\square$	$\square$	نامعین	$\square$
$\cot\alpha$	$\frac{۱}{۰}=$ نامعین	۰	$\square$	$\square$	$\square$

مثال: در دایــره‌ی مثلثاتی شــکل ۱۰۹ــ۲ مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه مفروض است. نسبت‌های مثلثاتی ۴۵ را به‌دست آورید.



شکل ۱۰۹ــ۲

حل: چون مثلث متساوی الساقین است. داریم :

$$OH=PH\Rightarrow x=y$$

ــ بنابر رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{OHP}$:

$$OP^۲=OH^۲+HP^۲\Rightarrow ۱=x^۲+x^۲\Rightarrow ۲x^۲=۱\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲}$$

ــ چون x سمت راست مبدأ است پس جواب مثبت فقط قابل قبول است.

$$\Rightarrow x=\cancel{-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}\ \text{یا}\ x=+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

سینوس‌زاویه‌ی ۴۵ = $\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی ۴۵}}{\text{وتر}}$، پس :

$$\sin(۴۵)=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱}\Rightarrow \sin ۴۵=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

کسینوس زاویه‌ی ۴۵ = $\frac{\text{ضلع مجاور به ۴۵}}{\text{وتر}}$ ، پس :

$$\cos(۴۵) = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱} \Rightarrow \cos ۴۵ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تانژانت زاویه‌ی ۴۵ = $\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه ی ۴۵}}{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی ۴۵}}$ ، پس :

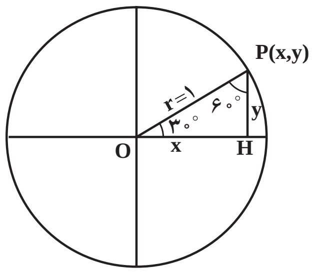
$$\tan(۴۵) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow \tan ۴۵ = ۱$$

کتانژانت ۴۵ = $\frac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی ۴۵}}{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی ۴۵}}$ ، پس :

$$\cot(۴۵) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow \cot ۴۵ = ۱$$

فعالیت ۱۸ــ۲

در شکل ۱۱۰ــ۲ مثلثی با دو زاویه‌ی ۳۰ و ۶۰ را مشاهده می‌نماییم، نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه را به‌دست آورید.



شکل ۱۱۰ــ۲

ــ می‌دانیم ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰ نصف وتر است، پس :

$$PH = y = \boxed{}$$

ــ بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم :

$$r^۲ = OH^۲ + PH^۲ \Rightarrow ۱^۲ = x^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

ــ x و y در ناحیه‌ی اول است، پس فقط مثبت مورد قبول است.

$$\Rightarrow x = \cancel{-\sqrt{\frac{۳}{۴}}} \quad , \quad x = +\sqrt{\frac{۳}{۴}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ــ چون دو زاویه‌ی ۳۰ و ۶۰ متمم یکدیگرند پس :

$$\sin(۳۰) = \cos ۶۰ = \frac{\boxed{}}{\bigcirc} = \frac{۱}{۲}$$

ــ همچنین داریم :

$$\cos(۳۰) = \frac{x}{r} = \frac{\boxed{}}{r} = \bigcirc = \sin ۶۰$$

ــ $\tan ۳۰$ برابر $\cot ۶۰$ (زیرا ۹۰ = ۶۰ + ۳۰)، پس :

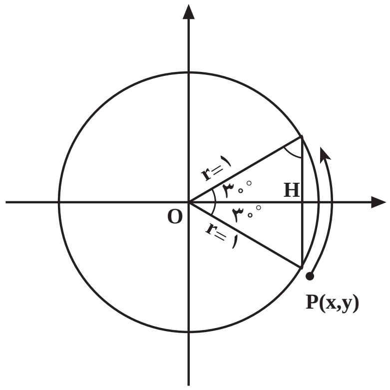
$$\tan(۳۰) = \frac{\boxed{}}{x} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\boxed{}} = \bigcirc = \cot ۶۰$$

ــ $\cot ۳۰$ برابر است با :

$$\cot(۳۰) = \frac{x}{y} = \frac{\bigcirc}{\bigcirc} = \sqrt{۳} = \tan \boxed{}$$

مثال ۱: نسبت مثلثاتی $\alpha = -۳۰$ را محاسبه کنید.

حل: در شکل ۱۱۱ـ۲ زاویه‌ی $\alpha = -۳۰$ را در جهت گردش عقربه‌های ساعت را جدا می‌کنیم.



شکل ۱۱۱ـ۲

ــ در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰ نصف وتر است.

$$\sin(۳۰) = PH = \frac{۱}{۲}$$

ــ با توجه به این که نقطه‌ی P در ناحیه‌ی چهارم واقع است. داریم :

$$y = -PH = -\frac{۱}{۲}$$

ــ بنابر قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت :

$$OP^۲ = OH^۲ + PH^۲ \Rightarrow ۱^۲ = x^۲ + \frac{۱}{۴} \Rightarrow x^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴}$$

ــ چون $\theta = ۳۰$ در ناحیه‌ی چهارم واقع است فقط مثبت قابل قبول است.

$$x^۲ = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x = \cancel{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \quad , \quad x = +\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ــ در نتیجه خواهیم داشت :

$$\sin(-۳۰) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{۱} \Rightarrow \sin(-۳۰) = \frac{-۱}{۲} = -\sin ۳۰$$

$$\cos(-۳۰) = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱} \Rightarrow \cos(-۳۰) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos ۳۰$$

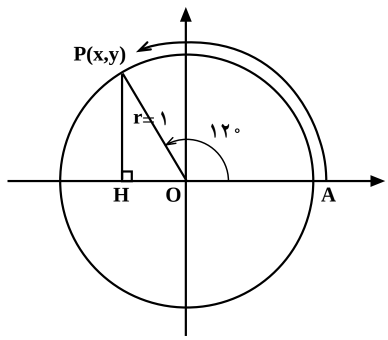
$$\tan(-۳۰) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{-۱}{\sqrt{۳}} = \frac{-\sqrt{۳}}{۳} = -\tan ۳۰$$

$$\cot(-۳۰) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} = -\sqrt{۳} = -\cot ۳۰$$

نتیجه‌ی کلی: هرگاه دو زاویه مانند α و $-\alpha$ قرینه باشند، کسینوس آن‌ها برابر است ولی سایر نسبت‌های مثلثاتی قرینه‌ی یکدیگرند.

مثال ۲: نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\alpha=۱۲۰$ را به‌دست آورید.

حل: در شکل ۱۱۲ـ۲ زاویه‌ی ۱۲۰ را روی دایره مثلثاتی جدا می‌کنیم.



شکل ۱۱۲ـ۲

ـ می‌دانیم ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰ نصف وتر است، پس:

$$OH=\frac{۱}{۲}OP=\frac{۱}{۲}(۱)\Rightarrow OH=\frac{۱}{۲}$$

ـ چون نقطه‌ی P در سمت چپ محور xها واقع است داریم:

$$x=-OH=\frac{-۱}{۲}$$

ـ بنابر قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

$$OP^{۲}=PH^{۲}+OH^{۲}\Rightarrow ۱=y^{۲}+\frac{۱}{۴}\Rightarrow y^{۲}=\frac{۳}{۴}$$

ـ چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی دوم است، پس y آن مثبت است.

$$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ \text{یا}\ \cancel{y=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

ـ $\sin ۱۲۰$ برابر با $\sin ۶۰$ است زیرا:

$$\sin(۱۲۰)=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin(۶۰)$$

ـ $\cos ۱۲۰$ برابر با $-\cos ۶۰$ است زیرا:

$$\cos(۱۲۰)=\frac{x}{r}=\frac{\frac{-۱}{۲}}{۱}=\frac{-۱}{۲}=-\cos(۶۰)$$

ـ $\tan ۱۲۰$ برابر با $-\tan ۶۰$ است زیرا:

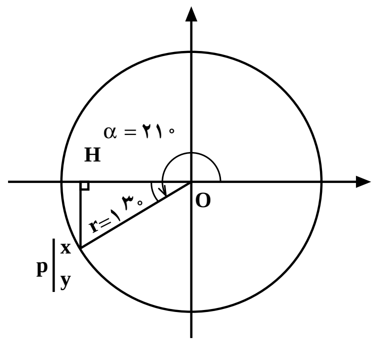
$$\tan(۱۲۰)=\frac{y}{x}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-۱}{۲}}=-\sqrt{۳}=-\tan(۶۰)$$

ـ $\cot ۱۲۰$ برابر با $-\cot ۶۰$ است زیرا:

$$\cot(۱۲۰)=\frac{x}{y}=\frac{\frac{-۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{-۱}{\sqrt{۳}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}=-\cot(۶۰)$$

مثال ۳: نسبت مثلثاتی $\alpha = ۲۱۰$ را به‌دست آورید.

حل: زاویه‌ی ۲۱۰ را در شکل **۱۱۳ـ۲** روی دایره‌ی مثلثاتی جدا می‌کنیم.



شکل ۱۱۳ـ۲

ـ ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰ نصف وتر است، پس :

$$PH = \frac{۱}{۲}(OP) = \frac{۱}{۲}$$

ـ چون نقطه‌ی p زیر محور xها واقع است y منفی است، لذا داریم :

$$y = -PH = \frac{-۱}{۲}$$

ـ بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم :

$$OP^۲ = PH^۲ + OH^۲ \Rightarrow ۱ = \frac{۱}{۴} + x^۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{۳}{۴}$$

ـ چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی سوم واقع است پس x منفی قابل قبول است، پس :

$$\cancel{x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}} \text{ و } x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ـ $\sin ۲۱۰$ برابر با $-\sin ۳۰$، زیرا :

$$\sin(۲۱۰) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{۱} = \frac{-۱}{۲} = -\sin(۳۰)$$

ـ $\cos ۲۱۰$ برابر با $-\cos ۳۰$ است، زیرا :

$$\cos(۲۱۰) = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} = -\cos(۳۰)$$

ـ $\tan ۲۱۰$ برابر با $\tan(۳۰)$، زیرا :

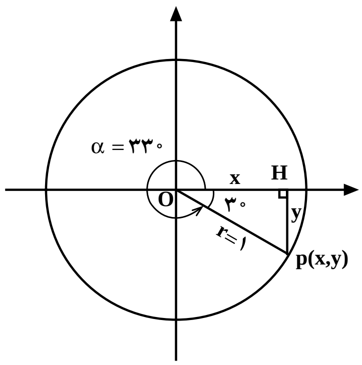
$$\tan ۲۱۰ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \tan ۳۰$$

ـ $\cot(۲۱۰)$ برابر با $\cot(۳۰)$، زیرا :

$$\cot ۲۱۰ = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} = \sqrt{۳} = \cot ۳۰$$

مثال ۴: نسبت‌های مثلثاتی $\alpha = ۳۳۰$ را بیابید.

حل: روی دایره‌ی شکل **۱۱۴ـ۲** زاویه‌ی $\alpha = ۳۳۰$ را جدا می‌کنیم.



شکل ۱۱۴ـ۲

ـ ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰ نصف وتر است، پس :

$$PH = \frac{۱}{۲}OP = \frac{۱}{۲}$$

ـ چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی چهارم است، پس :

$$y = -PH = \frac{-۱}{۲}$$

ـ بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم :

$$۱ = x^۲ + \frac{۱}{۴} \Rightarrow x^۲ = \frac{۳}{۴}$$

ـ چون p در ناحیه‌ی چهارم است، منفی مورد قبول نیست، پس :

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } \cancel{x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

ـ $\sin ۳۳۰$ برابر با $-\sin ۳۰$، زیرا :

$$\sin ۳۳۰ = \frac{y}{r} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{۱} = \frac{-۱}{۲} = -\sin ۳۰$$

ـ $\cos(۳۳۰)$ برابر با $(+\cos ۳۰)$، زیرا :

$$\cos ۳۳۰ = \frac{x}{r} = \frac{+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos ۳۰$$

ـ $\tan(۳۳۰)$ برابر با $-\tan(۳۰)$، زیرا :

$$\tan ۳۳۰ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{+\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{-۱}{\sqrt{۳}} = \frac{-\sqrt{۳}}{۳} = -\tan ۳۰$$

ـ $\cot(۳۳۰)$ برابر با $-\cot(۳۰)$، زیرا :

$$\cot ۳۳۰ = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{۱}{۲}} = -\sqrt{۳} = -\cot ۳۰$$

تمرین

آیا می‌توانیم ادعا کنیم رابطه‌های مقابل درست است؟

بلی ☐   خیر ☐

$$\sin(۳۳۰)=\sin(۲\times۱۸۰-۳۰)=-\sin(۳۰)\ ,$$

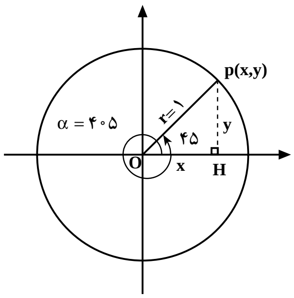
$$\cos(۳۳۰)=\cos(۲\times۱۸۰-۳۰)=\cos ۳۰$$

$$\tan ۳۳۰=\tan(۲\times۱۸۰-۳۰)=-\tan(۳۰)\ ,$$

$$\cot(۳۳۰)=(۲\times۱۸۰-۳۰)=-\cot ۳۰$$

مثال ۵: نسبت‌های مثلثاتی $\alpha=۴۰۵$ را بیابید.

حل: در شکل ۱۱۵ــ۲ زاویه‌ی $\alpha=۴۰۵$ را جدا می‌کنیم.



شکل ۱۱۵ــ۲

ــ ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۴۵ برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ وتر است،پس :

$$PH=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \text{ و } OH=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ــ نقطه‌ی p در ناحیه‌ی اول قرار دارد پس :

$$y=PH=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ــ در مثلث $\overset{\Delta}{OHP}$ با توجه به تساوی دو زاویه، داریم :

$$OH=HP\Rightarrow x=y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ــ $\sin(۴۰۵)$ برابر با $\sin(۴۵)$ ، زیرا :

$$\sin(۴۰۵)=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin(۴۵)$$

ــ $\cos(۴۰۵)$ برابر با $\cos(۴۵)$ ، زیرا :

$$\cos(۴۰۵)=\frac{x}{r}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\cos(۴۵)$$

ــ $\tan(۴۰۵)$ برابر با $\tan(۴۵)$ ، زیرا :

$$\tan(۴۰۵)=\frac{y}{x}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۱=\tan(۴۵)$$

ــ $\cot(۴۰۵)$ برابر با $\cot(۴۵)$ ، زیرا :

$$\cot(۴۰۵)=\frac{x}{y}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۱=\cot(۴۵)$$

با توجه به مثال حل شده در این قسمت می‌توانیم نتایج صفحه‌ی بعد را بیان کنیم :

نتیجه‌ی ۱: نسبت مثلثاتی $(-\alpha)$ برحسب α :

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

مثال:

$\sin(-۶۰^\circ) = -\sin(۶۰^\circ) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\cos(-۶۰^\circ) = \cos(۶۰^\circ) = \frac{۱}{۲}$

$\tan(-۶۰^\circ) = -\tan(۶۰^\circ) = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$\cot(-۶۰^\circ) = -\cot(۶۰^\circ) = -\sqrt{۳}$

نتیجه‌ی ۲: نسبت مثلثاتی $\pi - \alpha$ برحسب α :

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

مثال: $\alpha = \frac{۳\pi}{۴}$ یا $\alpha = \pi - \frac{\pi}{۴}$

$\sin(\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\cos(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\tan(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$

$\cot(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cot\frac{\pi}{۴} = -۱$

نتیجه‌ی ۳: نسبت مثلثاتی $۲\pi - \alpha$ برحسب α :

$\sin(۲\pi - \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(۲\pi - \alpha) = \cos\alpha$

$\tan(۲\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(۲\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

مثال: $\frac{۵\pi}{۳} = ۳۰۰^\circ = \alpha$ یا $\alpha = \frac{۵\pi}{۳} = ۲\pi - \frac{\pi}{۳}$

$\sin(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\cos(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$

$\tan(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$

$\cot(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\cot\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

نتیجه‌ی ۴: نسبت مثلثاتی $۲\pi+\alpha$ برحسب α :

$$\sin(۲\pi+\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cos(۲\pi+\alpha)=\cos\alpha$$

$$\tan(۲\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\cot(۲\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

مثال: $\alpha=۳۹۰=۲\times۱۸۰+۳۰=۲\pi+\frac{\pi}{۶}$

$$\sin(۲\pi+\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

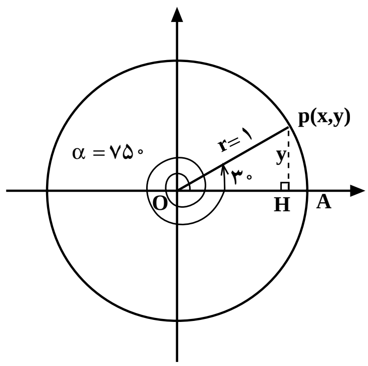
$$\cos(۲\pi+\frac{\pi}{۶})=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(۲\pi+\frac{\pi}{۶})=\tan\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot(۲\pi+\frac{\pi}{۶})=\cot\frac{\pi}{۶}=\sqrt{۳}$$

مثال ۶: زاویه‌ی ۷۵۰ را روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنید و نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۷۵۰ را به‌دست آورید.

حل: زاویه‌ی ۷۵۰ را روی شکل ۱۱۶ـ۲ جدا می‌کنیم.



شکل ۱۱۶ـ۲

ـ پس از طی دو دور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، از نقطه‌ی شروع دایره، زاویه‌ی ۳۰ درجه را طی می‌کنیم ؛ به ۷۵۰ می‌رسیم :

$۷۵۰\div۳۶۰=۲$ دور و ۳۰

$$۷۵۰=۲\times۳۶۰+۳۰$$

ـ $\sin(۷۵۰)$ برابر با $\sin(۳۰)$:

$$\sin(۷۵۰)=\sin(۲\times۳۶۰+۳۰)=\sin(۳۰)=\frac{۱}{۲}$$

ـ $\cos(۷۵۰)$ برابر با $\cos(۳۰)$:

$$\cos(۷۵۰)=\cos(۲\times۳۶۰+۳۰)=\cos(۳۰)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ـ $\tan(۷۵۰)$ برابر با $\tan(۳۰)$:

$$\tan(۷۵۰)=\tan(۲\times۳۶۰+۳۰)=\tan(۳۰)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

ـ $\cot(۷۵۰)$ برابر با $\cot(۳۰)$:

$$\cot(۷۵۰)=\cot(۲\times۳۶۰+۳۰)=\cot(۳۰)=\sqrt{۳}$$

ــ با توجه به حل مثال می‌توانیم نتیجه‌ی زیر را عنوان کنیم.

نتیجه: $\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha \;,\; k\in\mathbb{Z}$

$\cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha$

مثال: $\sin(۹۳۰)=\sin(۵\times۱۸۰+۳۰)=\sin۳۰=\frac{۱}{۲}$

$\cos(۹۳۰)=\cos(۵\times۱۸۰+۳۰)=\cos۳۰=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

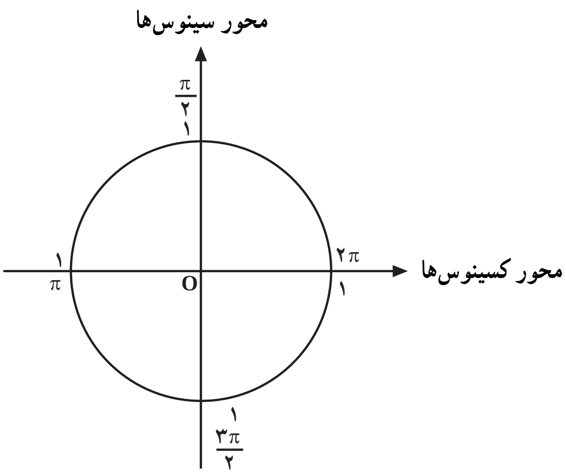
تمرین: نسبت‌های سینوس و کسینوس ۹۴۵ را بیابید.

پاسخ:

حل معادله‌های مثلثاتی

فعالیت ۱۹ــ۲

ــ دایره‌ی مثلثاتی در شکل ۱۱۷ــ۲ رسم شده است



شکل ۱۱۷ــ۲

۱ــ مقدار سینوس بین چه اعدادی قرار دارد؟

$-۱\le\sin x\le۱$

۲ــ تابع sinx به ازای چه زوایایی از x برابر یک می‌شود؟

$x=\square$

۳ــ تابع sinx به ازای چه مقدار از x برابر منفی یک می‌شود؟

$x=\square$