

## بخش سوم

# مشتق و کاربردهای آن

### هدف کلی بخش

تعیین رفتار تابع‌ها و رسم دقیق نمودار آن‌ها.

### جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل	زمان
اول	مشتق	۸ ساعت
دوم	کاربرد مشتق (۱)	۱۰ ساعت

# بخش سوم

## فصل اول

### مشتق

#### هدف کلی

درک مفهوم مشتق و به دست آوردن مشتق تابع های متداول

هدف های رفتاری: انتظار می رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

- ۱- مشتق یک تابع را در یک نقطه تعریف کند.
- ۲- به کمک تعریف حد، مشتق تابع های ساده را حساب کند.
- ۳- قضیه های مشتق و فرمول های آن را برای تعیین مشتق تابع های دیگر به کار برد.

## پیش‌آزمون (۱)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱- فرض کنید تابع با ضابطه  $f(x) = 2x + 3$  در  $\mathbb{R}$  تعریف شده باشد.

(الف)  $f(x + \Delta x)$  را حساب کنید.

(ب)  $f(x + \Delta x) - f(x)$  را به دست آورید.

(پ) عبارت  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  را تعیین کنید.

(ت)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  را حساب کنید.

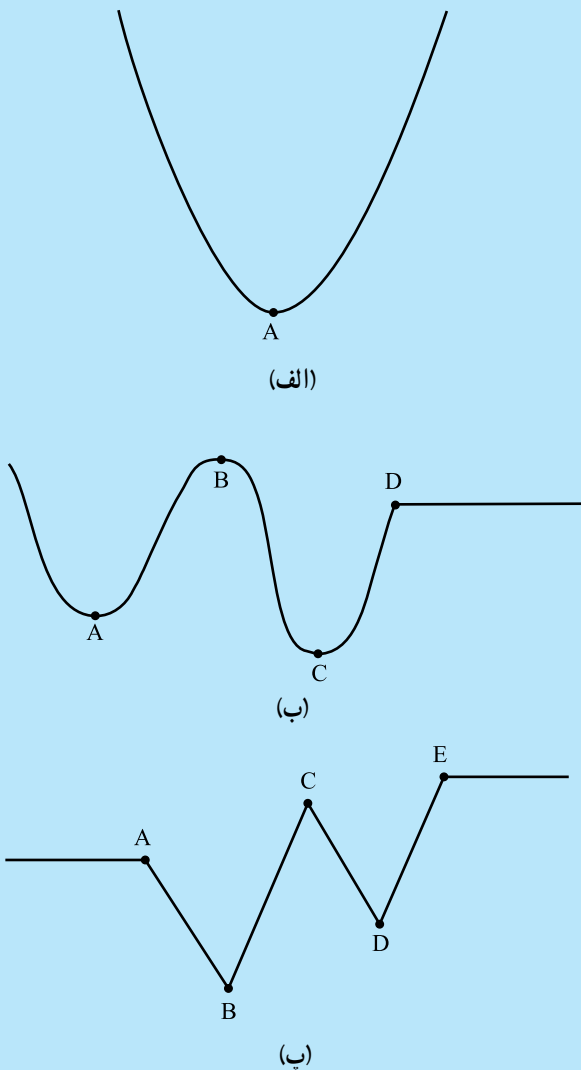
۲- تابع  $f$  با ضابطه  $y = f(x) = x^3$  در  $\mathbb{R}$  تعریف شده است.

(الف) اگر تغییر  $x$  برابر  $\Delta x$  باشد تغییر  $y$  را حساب کنید.

(ب)  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  را تعیین کنید.

(پ) مقدار  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  را به دست آورید.

۳- در هر یک از منحنی‌های (الف) تا (پ) از شکل ۳-۱ نقاطی از منحنی را که در آن‌ها مماس بر منحنی وجود ندارد مشخص کنید.

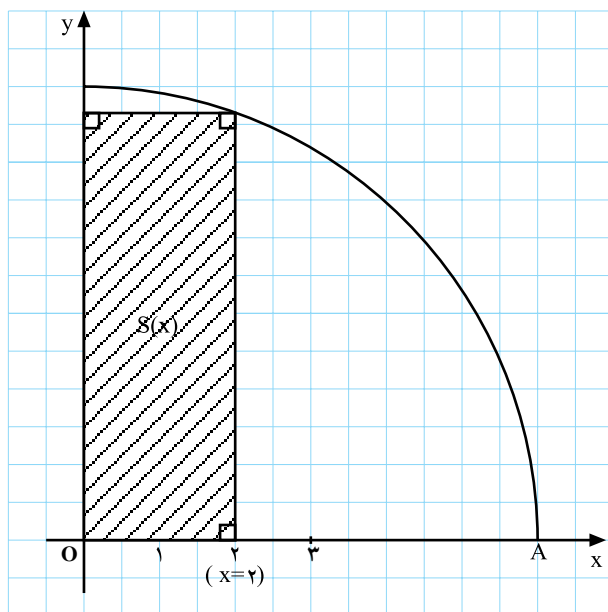


شکل ۳-۱

### ۳-۱- مشتق

جهت پرداختن به مطالب این فصل، نمونه‌ای از مسائل را که توسط مشتق حل می‌شوند بررسی می‌کنیم.

#### فعالیت ۳-۱



شکل ۳-۲

شکل ۳-۲ یک ورق فلزی ربع دایره به شعاع ۶ سانتی‌متر را نشان می‌دهد. می‌خواهیم نقطه‌ای به فاصله‌ی  $x$  از  $O$  انتخاب کنیم به طوری که مساحت مستطیل حاصل، یعنی  $S(x)$ ، بیشترین مقدار را داشته باشد.

کارهای زیر را انجام دهید شاید به نتیجه برسید!

- ۱- دو نقطه با  $x$ های ۲ و ۳ روی پاره خط  $OA$  انتخاب شده است. به کمک شکل‌های ۲-۳ و ۳-۳، مساحت مستطیل‌های ایجاد شده را حساب کنید و در جدول ۳-۱ بنویسید.
- ۲- شما نیز حداقل سه نقطه‌ی دیگر روی پاره خط  $OA$  انتخاب کنید و مساحت مستطیل‌های به دست آمده را در جدول ۳-۱ بنویسید. (می‌توانید از ماشین حساب نیز کمک بگیرید.)
- ۳- با استفاده از جدول ۳-۱ درباره‌ی تغییرات تابع  $S(x)$  چه می‌توان گفت؟ آیا به این ترتیب به جواب می‌رسید؟

جدول ۳-۱

$x$	$S(x)$
۲	
۳	

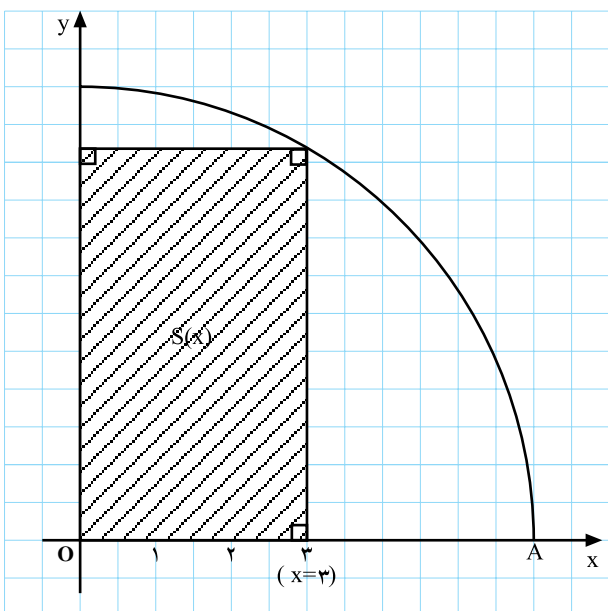
آیا مقدار  $S(x)$  با افزایش  $x$ ، افزایش می‌یابد؟  $S(x)$  (افزایشی) صعودی است؟

در چه بازه‌ای  $S(x)$  با افزایش  $x$ ، کاهش می‌یابد؟  $S(x)$  (کاهشی) نزولی است.

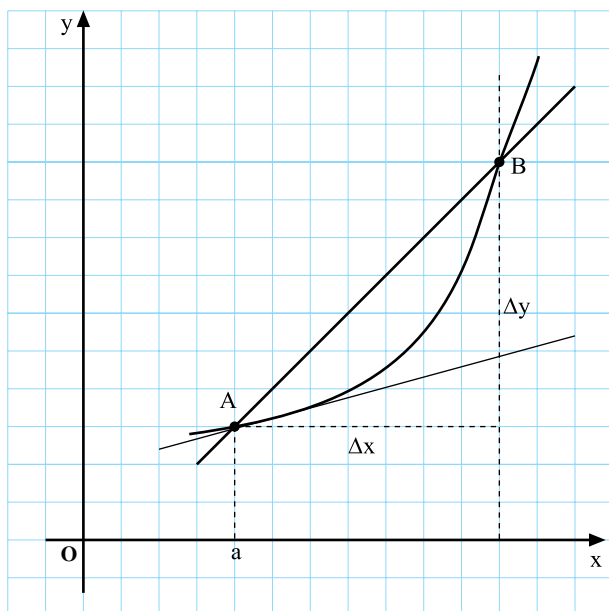
بیشترین مقدار (ماکسیمم)  $S(x)$  چقدر است؟ و به ازای چه مقداری از  $x$  حاصل می‌شود؟

در این فصل به کمک مشتق به این سؤال‌ها پاسخ خواهیم

داد.



شکل ۳-۳



شکل ۳-۴

در ابتدای بخش دوم (صفحه ۸۱) ملاحظه کردید که شیب

خط مماس بر منحنی  $y = f(x)$  در نقطه‌ی  $A|_{f(a)}$  برابر است با

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در واقع، اگر این حد وجود داشته باشد همان مشتق تابع

$f$  در  $x = a$  است (شکل ۳-۴).

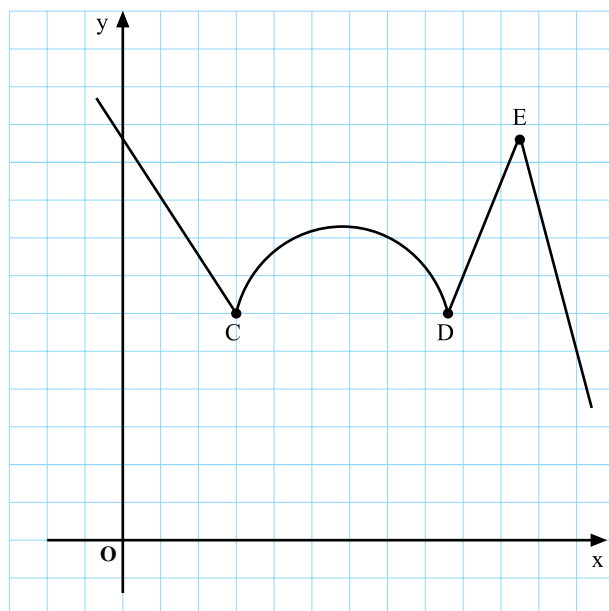
در حالت کلی تعریف زیر را داریم.

تعریف: مشتق تابع  $f$  در  $x = a$  برابر است با

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

به شرط آن که این حد وجود داشته باشد. اگر  $y = f(x)$ ،

مقدار مشتق در  $a$  را با  $y'(a)$  نیز نشان می‌دهند.



شکل ۳-۵

نکته: شکل ۳-۵ نشان می‌دهد که ممکن است مشتق در

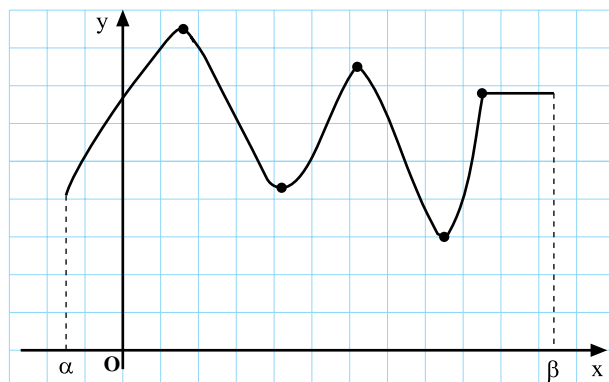
برخی از نقاط یک منحنی وجود نداشته باشد، این مطلب از عدم وجود خط مماس در این نقاط نتیجه می‌شود.

با استفاده از مفهوم مشتق می‌توان نتیجه گرفت که برای

شکل ۳-۵ مشتق در نقاط  $C$ ،  $D$  و  $E$  وجود ندارد. چرا؟

به نظر شما، در رابطه با رسم نمودار یک تابع، مشتق چه

نقشی می‌تواند داشته باشد؟



شکل ۳-۶

به کمک ویژگی‌های مشتق یک تابع می‌توان نمودار آن

تابع را با دقت بیشتری رسم کرد. به عبارت دیگر، می‌توان دقیقاً

مشخص کرد که نمودار در چه ناحیه‌هایی صعودی، نزولی یا

ثابت است و تحدب (کوژی) و تقعر (کاوی) آن به چه سمتی است

و در چه نقاطی ماکسیم یا مینیم می‌شود (شکل ۳-۶).

### مثال‌های نمونه

(کاربرد فرمول (۱))

$$y = f(x) = x^2 + 1, \quad a = 1$$

$$f(a) = f(1) = 2, \quad f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 + 1$$

$$= 2 + 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$f(1 + \Delta x) - f(1) = 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$$

(کاربرد فرمول (۲))

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 + 1] - 2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$$

(کاربرد فرمول (۳))

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1) - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

### ۱-۱-۳- محاسبه‌ی مشتق به کمک تعریف: برای

محاسبه‌ی مشتق یک تابع می‌توان از تعریف مشتق به صورت‌های مختلف استفاده کرد. در زیر به سه صورت این کار انجام شده است.

$$(۱) \quad f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

در فرمول (۱) اگر قرار دهیم  $\Delta x = h$ ، به دست می‌آوریم:

$$(۲) \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

اگر قرار دهیم  $\Delta x = x - a$  در این صورت،  $\Delta x \rightarrow 0$  معادل  $x \rightarrow a$  است و  $a + \Delta x = x$ . بنابراین، (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۳) \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

برای محاسبه‌ی مشتق، با استفاده از تعریف، از یکی از فرمول‌های بالا استفاده کنید، این فرمول‌ها روش‌های تعیین مشتق تابع  $f$  را در  $a$  نشان می‌دهند.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\ f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

**تعریف:** اگر  $f'(a)$  وجود داشته باشد گوییم  $f$  در  $a$  مشتق دارد. اگر برای هر  $x$  از دامنه‌ی  $f$ ،  $f'(x)$  وجود داشته باشد گوییم  $f$  در دامنه‌اش مشتق پذیر است.

الف) مقدار ثابت  $f(x) = c$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

مشتق تابع ثابت در هر نقطه صفر است.

ب)  $f(x) = Ax + B$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[A(x+h) + B] - (Ax + B)}{h} = A$$

اگر  $y = Ax + B$  آنگاه  $y' = A$ .

### ۲-۱-۳- برخی فرمول‌های مشتق: هدف اصلی این

فصل استفاده از مشتق برای حل مسائل مربوط به مشتق است (به برخی از این مسائل در ابتدای فصل اشاره شد). لذا، اثبات فرمول‌های مشتق مورد نظر نیست. معهذا، برای آن که تعریف مشتق به کار گرفته شود و فرمول آن، برای مواقع لازم، مورد استفاده قرار گیرد، مشتق چند تابع ساده، به کمک تعریف، در مقابل به دست آمده است.

## کار در کلاس ۳-۱

مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

$$۱) f(x) = x^2$$

$$۲) f(x) = x^3.$$

با توجه به نتایج به دست آمده می‌توان برای هر عدد طبیعی

$n$  نوشت :

$$\boxed{\text{اگر } f(x) = x^n \text{ آنگاه } f'(x) = nx^{n-1}}$$

۳-۱-۳- تعبیر هندسی مشتق: همان‌طور که قبلاً گفته

شد، در صورتی که  $f'(a)$  وجود داشته باشد ضریب زاویه‌ی

خط مماس در نقطه‌ی  $A \Big|_{f(a)}^a$  برابر  $f'(a)$  است.

بنابراین، مماس بر نمودار  $y = \alpha x + \beta$  در هر نقطه از این

خط همین خط است! چرا؟ (شکل ۳-۷).

زیرا،  $y' = \alpha$  و معادله‌ی خطی که از  $A \Big|_{y(a)}^a$  با ضریب

زاویه‌ی  $\alpha$  می‌گذرد عبارت است از :

$$y - (\alpha a + \beta) = \alpha(x - a)$$

که پس از ساده‌کردن به معادله‌ی زیر می‌رسیم :

$$y = \alpha x + \beta$$

با توجه به مطلب بالا، در نمودار شکل ۳-۸ مماس بر

نمودار در کدام نقاط وجود ندارد؟ چرا؟

نقاطی را که در آن‌ها مماس بر نمودار وجود ندارد مشخص

کنید.

دربازه‌ی  $[-2, 2]$  نمودار تابعی را رسم کنید که در هفت

نقطه مشتق نداشته باشد.

تابع  $y = |x|$  در چه نقطه‌ای مشتق ندارد؟ (شکل ۳-۹).

**قضیه:** اگر تابع  $f$  در نقطه‌ی  $x = a$  مشتق داشته باشد در

این نقطه پیوسته است.

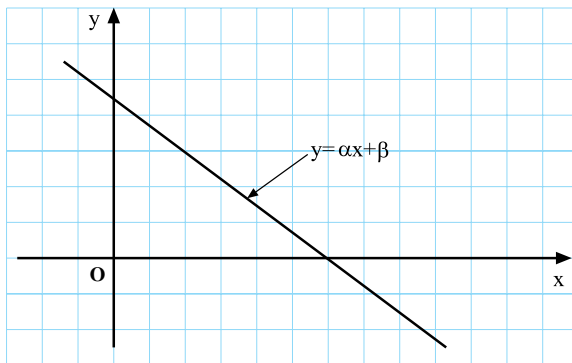
آیا این قضیه نیازی به اثبات دارد؟ توضیح دهید.

### مثال‌های نمونه

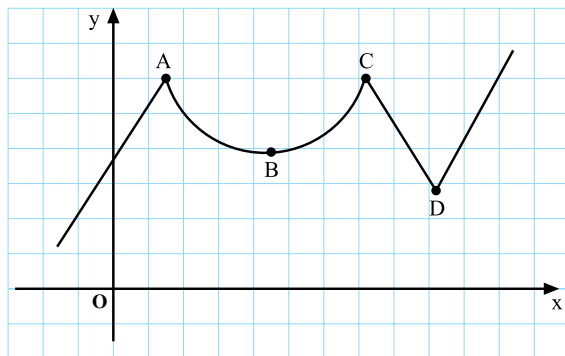
$$y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$$

$$y = x^6 \Rightarrow y' = 6x^5$$

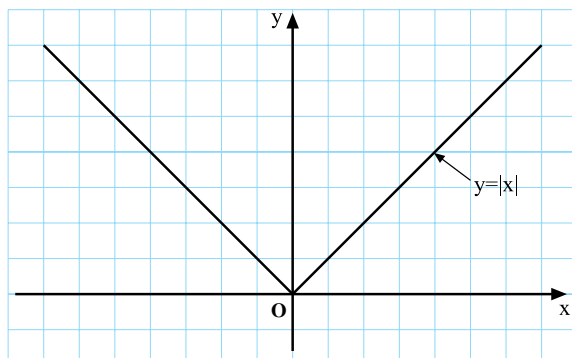
$$y = x^{100} \Rightarrow y' = 100x^{99}$$



شکل ۳-۷



شکل ۳-۸



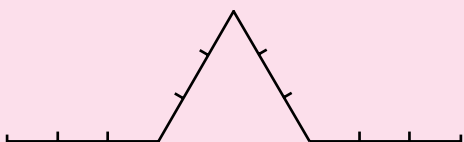
شکل ۳-۹

### بازی با مشتق

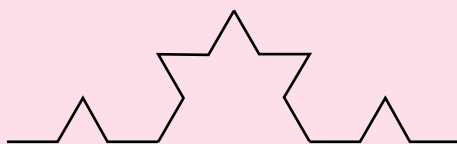
منحنی کُخ: در شکل ۳-۱۰ پاره خطی به طول ۶ سانتی‌متر رسم شده است. این پاره خط به سه قسمت متساوی تقسیم شده و  $\frac{1}{3}$  وسط آن برداشته شده و به جای آن دو پاره خط هم اندازه با آن، مطابق شکل ۳-۱۱ قرار داده شده است. این کار با چهار پاره خط شکل ۳-۱۱ تکرار شده است (شکل ۳-۱۲).



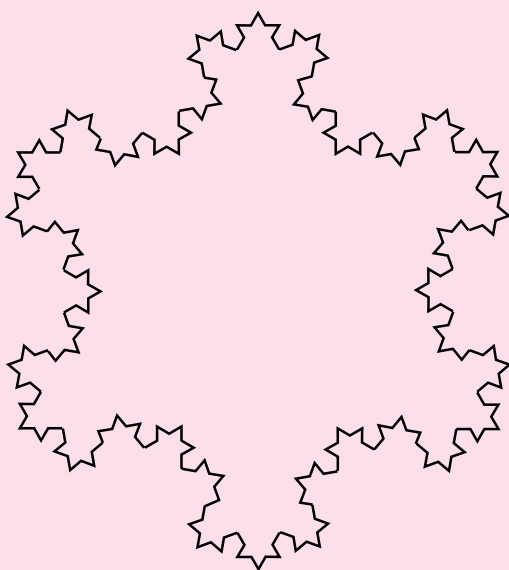
شکل ۳-۱۰



شکل ۳-۱۱



شکل ۳-۱۲



شکل ۳-۱۳

محیط شکل ۳-۱۱ چند سانتی‌متر است؟  
 شکل ۳-۱۱ در چند نقطه‌ی داخلی مشتق ندارد؟  
 شکل ۳-۱۲ از چند پاره خط تشکیل شده است؟  
 محیط شکل ۳-۱۲ چند سانتی‌متر است؟  
 شکل ۳-۱۲ در چند نقطه‌ی داخلی مشتق ندارد؟  
 روی شکل ۳-۱۲ عملی را که روی شکل‌های ۳-۱۰ و ۳-۱۱ انجام شده، انجام دهید.  
 شکل حاصل از چند پاره خط تشکیل می‌شود؟ محیط آن چند سانتی‌متر است؟  
 شکلی که به دست آورده‌اید در چند نقطه‌ی داخلی مشتق ندارد؟

اگر این عمل را مرتباً روی شکل‌های به دست آمده انجام دهید، در نهایت به منحنی کُخ می‌رسید که نوعی فِرکتال است.

هر جزء این منحنی مشابه کل آن است!

آیا منحنی کُخ پیوسته است؟

آیا منحنی کُخ در نقطه‌ای دارای مشتق است؟

آیا منحنی کُخ در سطحی محدود قرار دارد؟

آیا محیط منحنی کُخ متناهی است؟

اگر کارهای بالا را روی مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶

۶ سانتی‌متر انجام دهید در مرحله‌ی سوم به شکل ۳-۱۳ می‌رسید. این شکل در حد، برداشته‌ی کُخ نامیده می‌شود. [۱۰]



### مثال‌های نمونه

#### ۴-۱-۳- قضیه‌های مشتق: اثبات قضیه‌های زیر به

کمک تعریف مشتق ساده است ولی هدف، استفاده از این قضیه‌ها در حل مسائل است.

در مقابل، با استفاده از قضیه‌های زیر، مثال‌های نمونه‌ای

حل شده است.

#### قضیه‌ی ۱ (مشتق حاصل جمع دو تابع): اگر $f'(x)$ و

$g'(x)$  وجود داشته باشند آنگاه:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

این قضیه برای تعداد با پایان تابع مشتق‌پذیر نیز برقرار

است.

$$y = x^2 + x^3 \Rightarrow y' = 2x + 3x^2$$

$$y = x^3 - x^2 + x + 4 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2x + 1$$

#### قضیه‌ی ۲ (مشتق حاصل ضرب دو تابع): اگر $f'(x)$ و

$g'(x)$  وجود داشته باشند آنگاه:

$$(f(x) \times g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

نتیجه: اگر  $k$  عددی ثابت باشد آنگاه:

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

$$y = (x^2 + 1)(x^3 - x + 4)$$

$$y' = 2x(x^3 - x + 4) + (x^2 + 1)(3x^2 - 1)$$

$$y = 8x^2 \Rightarrow y' = 8 \times 2x = 16x$$

#### قضیه‌ی ۳ (مشتق تقسیم دو تابع): اگر $f'(x)$ و $g'(x)$

وجود داشته باشند و  $g(x) \neq 0$  آنگاه:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$y = \frac{2x - 5}{x + 1}$$

$$y' = \frac{2(x+1) - 1(2x-5)}{(x+1)^2} = \frac{7}{(x+1)^2}$$

#### قضیه‌ی ۴ (مشتق تابع‌های مثلثاتی):

الف) اگر  $y = \cos x$  آنگاه  $y' = -\sin x$

ب) اگر  $y = \sin x$  آنگاه  $y' = \cos x$

پ) اگر  $y = \tan x$  آنگاه  $y' = 1 + \tan^2 x$

ت) اگر  $y = \cot x$  آنگاه  $y' = -(1 + \cot^2 x)$

$$y = \sin x + \cos x, y' = \cos x - \sin x$$

$$y = 2\cos x - 3\sin x, y' = -2\sin x - 3\cos x$$

$$y = x^2 \sin x, y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$y = \tan x + x \cos x - \cot x,$$

$$y' = 1 + \tan^2 x + \cos x - x \sin x + 1 + \cot^2 x$$

#### قضیه‌ی ۵: فرض کنید $u$ تابعی از $x$ و $f$ تابعی از $u$ باشد

و  $u'(x)$  و  $f'(u)$  وجود داشته باشند. اگر  $y = f(u)$  آنگاه:

$$y' = u'(x)f'(u).$$

$$۱) y = f(u) = u^3, u = (x^2 + x - 1)$$

$$y'(x) = u'(x) \times f'(u) = (2x + 1) \times 3u^2$$

$$= (2x + 1) \times 3 \times (x^2 + x - 1)^2.$$

نتیجه‌ی ۱: اگر  $y = u^n$  آنگاه  $y' = nu'u^{n-1}$ .

نتیجه‌ی ۲: اگر  $y = \sqrt{u}$  آنگاه  $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ .

$$۲) y = \sin^v x$$

$$y' = v \cos x \sin^{v-1} x$$

$$۳) y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$۴) y = \sqrt{2x^2 + x - 2}$$

$$y' = \frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x-2}}$$

$$۵) y = \sqrt{2 + \sin x}$$

$$y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{2 + \sin x}}$$

$$۶) y = \sqrt[5]{x^3 + 7x - 2}$$

$$y' = \frac{3x^2 + 7}{5\sqrt[5]{(x^3 + 7x - 2)^4}}$$

$$۷) y = \sqrt[3]{(2x+1)^2} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} \times 2 \times (2x+1)^{\frac{2}{3}-1}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt[3]{2x+1}}$$

نتیجه‌ی ۳: اگر  $y = \sqrt[m]{u^n}$  آنگاه  $y' = \frac{n}{m} u' u^{\frac{n}{m}-1}$  و

$$y' = \frac{n}{m} u' u^{\frac{n}{m}-1} = \frac{nu'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}.$$

### کار در کلاس ۲-۳

با استفاده از فرمول‌های مشتق که در صفحه‌ی بعد ملاحظه

می‌کنید، مشتق تابع‌های زیر را، در سمت چپ، بنویسید.

الف)  $y = 3x^2 - \sqrt{2x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

ب)  $y = (3x-1)(x+2)$

پ)  $y = x\sqrt{x}$

ت)  $y = \cos x + x \sin x$

ث)  $y = \sqrt[5]{(2x-1)^2}$

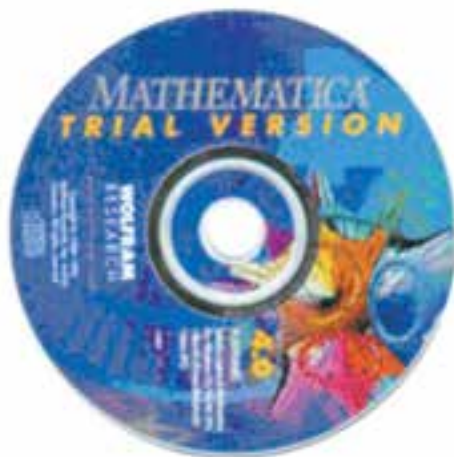
ج)  $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

چ)  $y = \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$

ح)  $y = \sin(2x+1) - \cos 3x$

خ)  $y = \frac{x + \cos x}{2 + \sin x}$

د)  $y = \cot 3x$



### ۵-۱-۳- جدول فرمول‌های مشتق: در زیر، جدول

مربوط به فرمول‌های مشتق تابع‌هایی که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند، آمده است. انتظار می‌رود با حل تمرین‌های متعدد این فرمول‌ها را به خاطر بسپارید. معه‌ذا، چون هدف اصلی کاربرد این فرمول‌ها در حل مسائل است، به دبیران محترم توصیه می‌شود که در آزمون‌های مربوط به این فصل جدول را، با مقیاس بزرگتری، در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند.

تابع	مشتق تابع	مثال
$y = c$	$y' = 0$	$y = 4 \Rightarrow y' = 0, y = 3\sqrt{2} \Rightarrow y' = 0$
$y = ax + b$	$y' = a$	$y = -6x + 7 \Rightarrow y' = -6, y = \frac{1}{2}x \Rightarrow y' = \frac{1}{2}$
$y = x^n, n \in \mathbb{R}$	$y' = nx^{n-1}$	$y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2, y = x^5 \Rightarrow y' = 5x^4$
$y = kf(x)$ و $k$ ثابت	$y' = kf'(x)$	$y = 6x^2 \Rightarrow y' = 6 \times 2x = 12x$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = x^3 + 2x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 + 4x$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + uv'$	$y = (x^2 + 1)(2x^3 - x^2 + 1)$ $y' = 2x(2x^3 - x^2 + 1) + (x^2 + 1)(6x^2 - 2x)$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = \frac{2x - 5}{x^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x(2x - 5)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 10x + 2}{(x^2 + 1)^2}$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{5x} \Rightarrow y' = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$
$y = u^n$	$y' = nu'u^{n-1}$	$y = (3x^2 - 5)^3 \Rightarrow y' = 3(6x)(3x^2 - 5)^2 = 18x(3x^2 - 5)^2$
$y = \sqrt[m]{u^n}$	$y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$	$y = \sqrt[6]{(x^2 + x + 1)^5} \Rightarrow y' = \frac{5(2x + 1)}{6\sqrt[6]{x^2 + x + 1}}$
$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$	$y = \sin 3x \Rightarrow y' = 3 \cos 3x$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \cos \frac{1}{2}x \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}x$
$y = \tan u$	$y' = u'(1 + \tan^2 u)$	$y = \tan \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}(1 + \tan^2 \frac{1}{x})$
$y = \cot u$	$y' = -u'(1 + \cot^2 u)$	$y = \cot(1 - 2x) \Rightarrow y' = 2(1 + \cot^2(1 - 2x))$

### تمرین ۳-۱

(۱) مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از جدول مشتق

بنویسید.

الف)  $y = 5x^3 - 3x^2 + 1$

ب)  $y = x(3x^4 + x)$

پ)  $y = 3 \sin x \cos x$

ت)  $y = \sqrt{3x-1}$

ث)  $y = \sqrt[5]{(x^2 + x)^3}$

ج)  $y = \frac{2 \cos x}{\sin x + 2}$

چ)  $y = \tan 3x + \sin \sqrt{x}$

ح)  $y = (x^3 - 2x + 1)^5$ .

(۲) اگر  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ، مقدار  $f'(0)$  را به دست آورید.

(۳) اگر  $u = x^2 - 1$  و  $y = 5u^3$ ، حاصل  $y'_x$  را بنویسید.

(۴) اگر  $y = 2u^2 + 5u - 1$  و  $u = \sqrt{x^2 + 4}$ ،  $y'_x$  را

به دست آورید.

(۵) مشتق تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف)  $y = 3x + 5$

ب)  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \sqrt{2}$

پ)  $y = 4(x^3 + 2x - 1)$

ت)  $y = \frac{7x^2 + 6x - 4}{9}$

ث)  $y = \frac{\sin x - \cos x}{2 \cos x + 3}$

ج)  $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

چ)  $y = \tan^{\frac{5}{2}} \frac{x}{2}$

ح)  $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$

خ)  $y = \sqrt[3]{1 + \cos^4 x}$ .

مثال‌ها:

$$\text{الف) } f(x) = 4x^3 - x^2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 12x^2 - 2x \\ f''(x) = 24x - 2 \end{cases}$$

$$\text{ب) } f(x) = \sin x \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \cos x \\ f''(x) = -\sin x \end{cases}$$

$$\text{پ) } f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ f''(x) = \frac{2}{x^3} \end{cases}$$

$$\text{ت) } f(x) = \cos x \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -\sin x \\ f''(x) = -\cos x \end{cases}$$

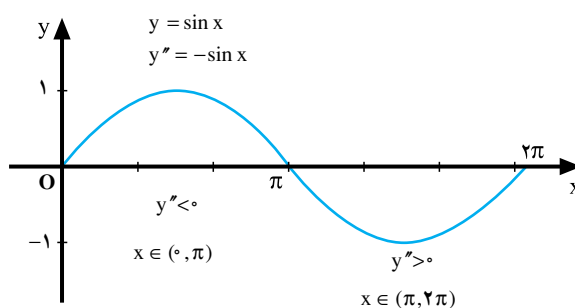
$$\text{ث) } f(x) = \tan x \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 + \tan^2 x \\ f''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x) \end{cases}$$

$$\text{ج) } f(x) = \frac{2}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \\ f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3} \end{cases}$$

## ۶-۱-۳- مشتق دوم یک تابع: همان‌طور که مشتق

یک تابع تعریف شد، می‌توان مشتقِ مشتقِ یک تابع را نیز تعریف کرد و آن را، در صورت وجود، حساب کرد. مشتق تابع  $f$  را با  $f'$  و مشتق تابع  $f'$  را با  $f''$  نمایش می‌دهیم. در مثال‌های روبه‌رو، مشتق دوم ( $f''$ ) برای چند تابع حساب شده است. مشتق دوم یک تابع در رسم دقیق نمودار تابع‌ها کاربرد دارد. در زیر مثالی می‌آوریم، این مطلب در ۱-۳-۳ بیشتر بررسی می‌شود.

مثال: در زیر نمودار تابع  $y = \sin x$  رسم شده است.



ملاحظه می‌شود که در بازه‌ی  $(0, \pi)$  گودی (تقعر) نمودار به طرف پایین است و  $y'' < 0$  و در  $(\pi, 2\pi)$  گودی نمودار به طرف بالا است و  $y'' > 0$ .

## تمرین ۲-۳

مشتق دوم هریک از تابع‌های زیر را به‌دست آورید:

الف)  $y = 2x^2 + 7x - 5$

ب)  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 4$

پ)  $y = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

ت)  $y = (x-2)^3$

ث)  $y = \sin 2x$

ج)  $y = \cos x + \sin x$

چ)  $y = \frac{x-1}{x+2}$

## آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱- تابع  $f(x) = x^2 - 1$  در  $\mathbb{R}$  تعریف شده است. مشتق این تابع را در  $x = 1$  حساب کنید.

۲- مشتق تابع  $y = 2x + 3$  را در  $x = 1$ ، به کمک تعریف مشتق، حساب کنید.

۳- تابع  $y = |x + 2|$  در چه نقطه‌ای از نمودارش دارای خط مماس نیست؟

۴- فرض کنید  $f(x) = |x|$  حساب کنید :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h}.$$

از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵- مشتق تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف)  $y = \cos x - \sin x$

ب)  $y = x\sqrt[3]{x}$

پ)  $y = \sqrt{\frac{1}{2 + \cos x}}$

ت)  $y = \sqrt[5]{(x^2 + 1)^3}$

ث)  $y = \sin^2 x + \cos^2 x.$

۶- با توجه به ضابطه‌ی  $y$  مقدار  $y''$  را حساب کنید.

الف)  $y = \sqrt{x}$

ب)  $y = \sin x$

پ)  $y = \sqrt[3]{x^2}$

ت)  $y = \cos x$

ث)  $y = \tan x.$