

بخش دوم

تابع و مفاهیم آن

هدف کلی بخش

آشنایی با ویژگی‌ها و شیوه‌های مختلف نمایش یک تابع، عملیات روی تابع‌ها و کاربردهای آن در زمینه‌های مختلف

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	محور اعداد
دوم	بازه
سوم	تابع
چهارم	دامنه‌ی توابع
پنجم	چند تابع ویژه
ششم	عملیات روی تابع‌ها
هفتم	ترکیب دو تابع

بخش دوم

فصل اول

محور اعداد

هدف کلی

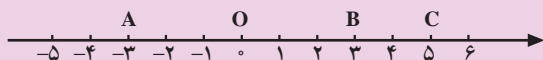
مطالبی مربوط به محور اعداد و محور مختصات

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

- ۱- محور اعداد را تعریف کند ؛
- ۲- دستگاه مختصات را رسم کند ؛
- ۳- طول پاره خط را با استفاده از مختصات محاسبه کند ؛
- ۴- قرینه‌ی یک نقطه را نسبت به محور x ها، y ها و مبدأ مختصات پیدا کند.

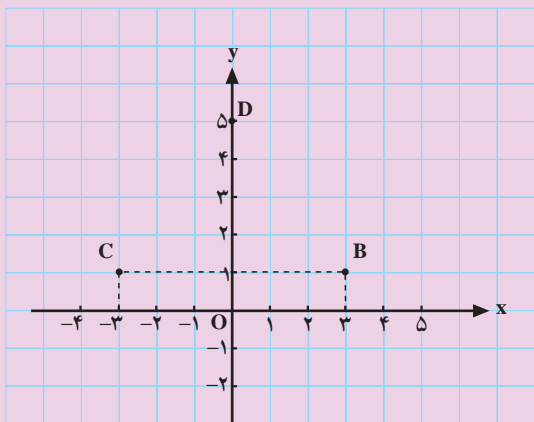
پیش‌آزمون (۱)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)



شکل ۲-۱

$$x_A = \quad x_B = \quad x_C =$$



شکل ۲-۲

۱- x نقطه‌های روی محور را تعیین کنید. (شکل ۲-۱).

۲- اگر $x_A = 5$ و $x_B = -3$ باشد، \overline{AB} و \overline{BA} را

حساب کنید و بگویید چه رابطه‌ای بین آن‌ها وجود دارد؟

۳- الف) مختصات B، C و D را مشخص کنید (شکل

۲-۲).

ب) طول پاره‌خط‌های DB، CD و CB را به دست

آورید.

ج) مساحت مثلث DBC را محاسبه کنید.

$$۴- \text{هرگاه } A \begin{vmatrix} -4 \\ 3 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} -4 \\ 0 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} -3 \\ -3 \end{vmatrix} \text{ و } D \begin{vmatrix} -4 \\ 4 \end{vmatrix},$$

الف) کدام یک از نقاط داده شده روی محور x ها و کدام

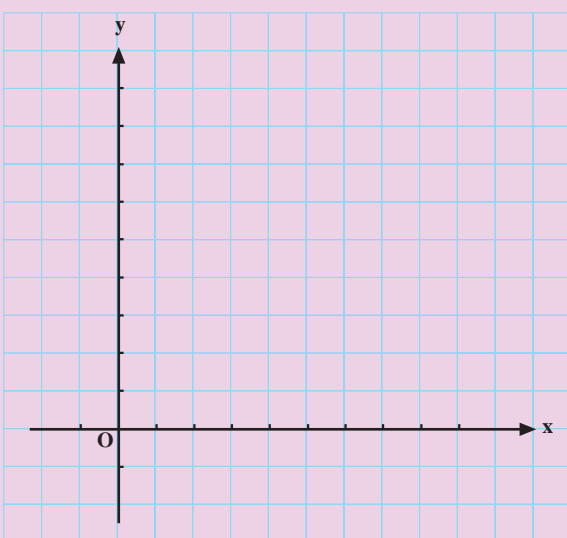
یک روی محور y ها قرار دارد؟

ب) کدام یک از نقاط روی نیمساز ربع دوم و چهارم و

کدام یک روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد؟

ج) طول پاره خط CD را حساب کنید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)



شکل ۲-۳

$A(a-b, 7)$ و $B(3, a+b)$

۵- الف) نقطه‌های $A\left(\frac{2}{8}\right)$ و $B\left(\frac{8}{4}\right)$ را روی دستگاه محورهای

مختصات (شکل ۲-۳) مشخص کنید.

ب) مختصات نقطه‌ی M ، وسط پاره خط AB را بنویسید.

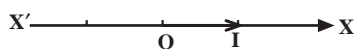
ج) طول پاره خط OM را محاسبه کنید.

۶- مختصات دو نقطه‌ی A و B در مقابل مفروض است.

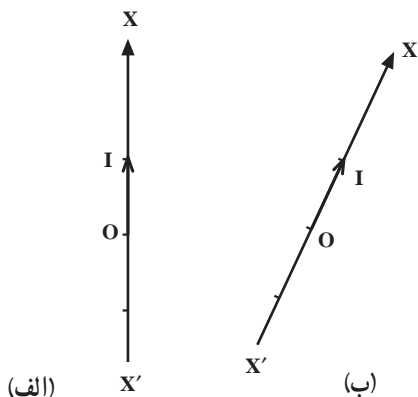
هرگاه $A = B$ مطلوب است مقدار $2a + 3b$.



شکل ۴-۲- دکارت



محور ۵-۲

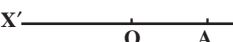


محور ۶-۲



محور ۷-۲

$$\overline{AB} = X_B - X_A \quad (*)$$

اثبات فرمول (*): 

محور ۸-۲

با توجه به شکل ۸-۲ داریم:

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

$$\overline{OB} = X_B \text{ و } \overline{OA} = X_A$$

۱-۲- محور اعداد

از سال‌های گذشته به یاد دارید که محور عبارت است از «یک خط راست جهت‌دار که روی آن نقطه‌ای به عنوان مبدأ و طولی به عنوان واحد اندازه‌گیری تعیین شده باشد». جهت محور را نسبت به مبدأ از طرف چپ به راست مثبت و از طرف راست به چپ منفی فرض می‌کنند.

هر عدد حقیقی را با یک نقطه از محور و هر نقطه از محور را با یک عدد حقیقی متناظر می‌کنیم. مثلاً مبدأ O متناظر با عدد صفر و نقطه‌ی واحد (I) متناظر با عدد یک است (شکل ۵-۲).

نکته: محور اعداد به صورت افقی، عمودی و مایل نیز می‌تواند باشد (شکل ۶-۲).

هرگاه محوری افقی باشد، در سمت راست مبدأ آن اعداد مثبت و در سمت چپ اعداد منفی است.

مثال ۱: در شکل ۷-۲ نقطه‌ی A برابر ۲ و X نقطه‌ی B برابر ۳- را مشاهده می‌کنید.

۱-۱-۲- طول پاره‌خط از یک محور: اگر X_A و X_B مختص نقاط A و B بر روی محور $X'OX$ باشد. اندازه‌ی جبری پاره‌خط \overline{AB} برابر است با:

- از طرفی مقدار OA و OB برابر است با:

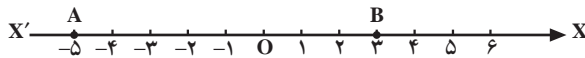
$$\overline{AB} = X_B - X_A$$

– طول پاره خط \overline{AB} از فرمول مقابل به دست می آید :

مثال ۱: اگر $X_A = -5$ و $X_B = 3$:

الف) نقاط A و B را روی محور ۹-۲ نشان دهید.

جواب الف)

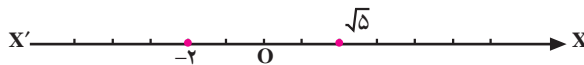


محور ۹-۲

$$\overline{AB} = X_B - X_A = 3 - (-5) = 3 + 5 \quad \text{جواب ب)}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 8$$

حل ۲:



محور ۱۰-۲

حل ۳:

$$\overline{AB} = X_B - X_A \Rightarrow 11 = X_B - 5$$

$$\Rightarrow X_B = 11 + 5 \Rightarrow X_B = 16$$

حل ۴:

$$\overline{BA} = X_A - X_B = 4 - (-7) \Rightarrow \overline{BA} = 11$$

مثال ۲: نقاط نظیر $\sqrt{5}$ و -2 را روی محور اعداد

۱-۲ نشان دهید.

حل: مقدار $\sqrt{5}$ را از سمت راست صفر و مقدار -2 را

از سمت چپ صفر روی محور جدا می کنیم.

مثال ۳: هرگاه $\overline{AB} = 11$ و $X_A = 5$ باشد مقدار X_B

را بیابید.

مثال ۴: هرگاه $X_A = 4$ و $X_B = -7$ باشد \overline{BA} چه قدر

است؟

تمرین

۱- نقاط نظیر 5 ، -7 ، 3 و $\frac{11}{3}$ و $\sqrt{7}$ را روی محور

اعداد حقیقی (۲-۱۱) نمایش دهید.

۲- هرگاه $\overline{AB} = 7$ و $X_B = 3$ باشد X_A را به دست

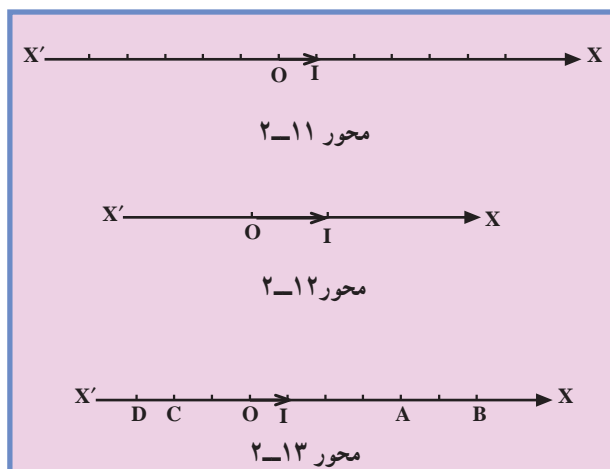
آورید و نقطه های A و B را روی محور $X'OX$ (۲-۱۲) نشان دهید.

۳- آیا محور اعداد حقیقی همواره به صورت افقی است؟

مثال بزنید.

۴- نقاط A، B، C و D روی محور $X'OX$ (۲-۱۳)

مشخص شده است. به سؤال های ذیل پاسخ دهید.





الف) X_D را به دست آورید.

ب) اندازه‌ی جبری پاره خط \overline{DA} را حساب کنید.

ج) طول پاره خط \overline{AB} و \overline{BA} را به دست آورید.

د) آیا همواره می‌توان گفت: $\overline{BA} + \overline{AB} = 0$ ؟

۲-۱-۲- محورهاى مختصات قائم: هرگاه از نقطه‌ی

O بر محور $x'Ox$ ، محور $y'Oy$ را عمود رسم کنیم این دو

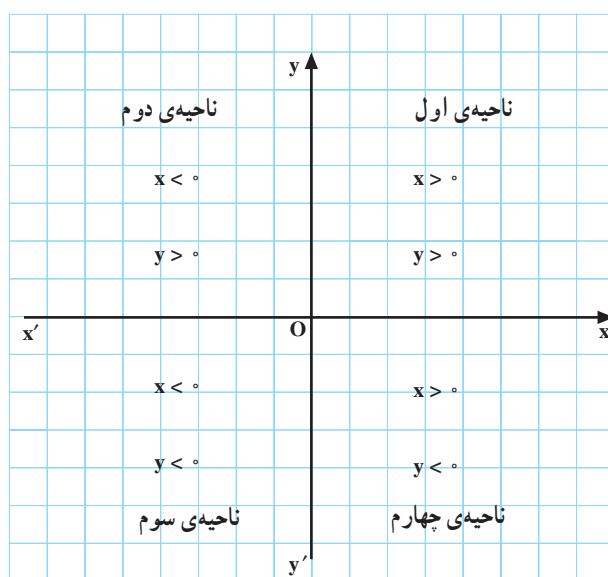
محور و نقطه‌ی O را دستگاه مختصات قائم می‌گویند

(شکل ۲-۱۴). دستگاه مختصات صفحه را به چهار ناحیه تقسیم

می‌کند (شکل ۲-۱۴).

محور $x'Ox$ را محور x ها و محور $y'Oy$ را محور y ها

می‌نامیم.



شکل ۲-۱۴



شکل ۲-۱۵

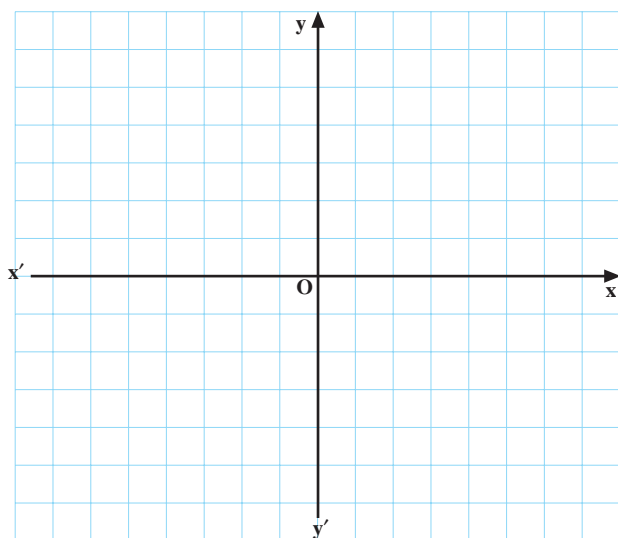
فعالیت ۲-۱

اگر $A(3, 3)$ و $B(-3, 3)$ و $C(-3, -3)$ و $D(3, -3)$ رأس‌های یک مستطیل باشند،

الف) مستطیل $ABCD$ را در دستگاه محورهای مختصات (۲-۱۶) مشخص کنید.

ب) ناحیه‌ای را که در ربع سوم قرار دارد با رنگ قرمز سایه بزنید.

ج) قرینه‌ی A نسبت به محور y ها کدام یک از رأس‌های مستطیل است؟



شکل ۲-۱۶

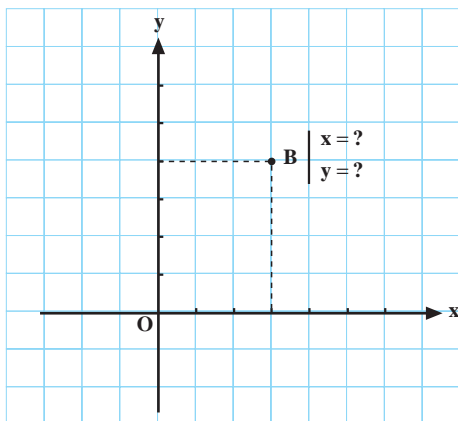
فعالیت ۲-۲

الف) مختصات نقطه‌ی B را در دستگاه مختصات ۲-۱۷ پیدا کنید.

ب) نقطه‌ی B را به O (مبدأ) وصل کرده به اندازه‌ی خود امتداد دهید. انتهای آن را نقطه‌ی B' بنامید و مختصات آن را به دست آورید.

جواب: B'

B و B' نسبت به مبدأ مختصات چه رابطه‌ای دارند؟

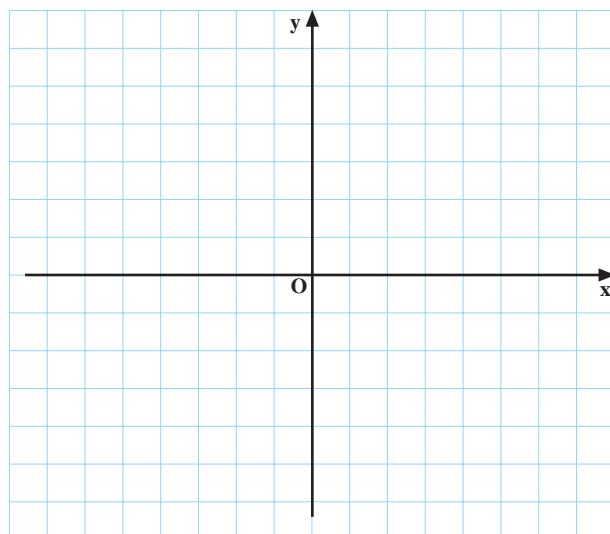


شکل ۲-۱۷

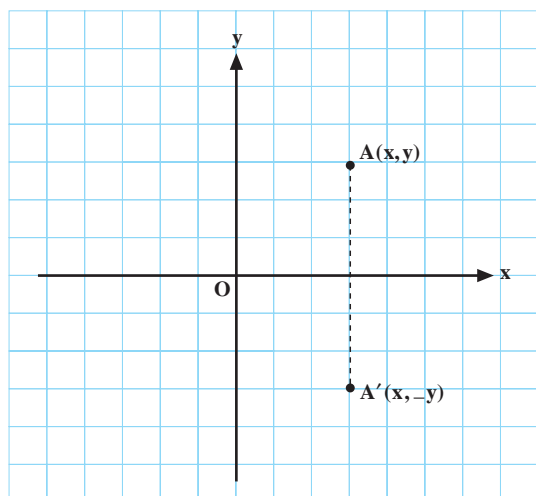
فعالیت ۲-۳



شکل ۲-۱۸



شکل ۲-۱۹



شکل ۲-۲۰

الف) نقطه‌ی $A(-2, 3)$ را روی محور مختصات ۲-۱۹

نشان دهید.

ب) قرینه‌ی A را نسبت به محور x ها روی محور مختصات

۲-۱۹ نشان دهید و آن را A' بنامید.

ج) آیا مختصات نقطه‌ی A' ، $(-2, -3)$ خواهد شد؟

☐ بلی ☐ خیر

آیا نقطه‌ی A' را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به محور x ها

می‌نامیم. ☐ بلی ☐ خیر

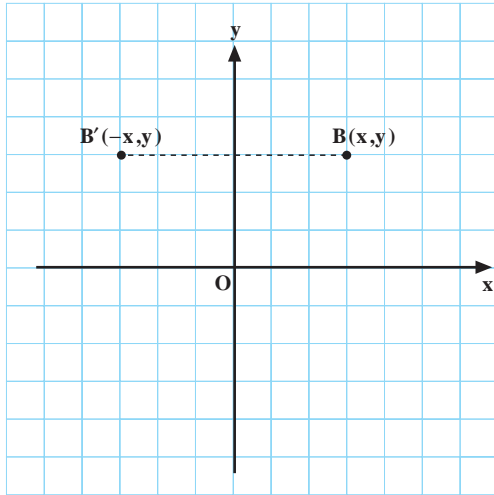
نتیجه: با توجه به سه فعالیت ۲-۱، ۲-۲، و ۲-۳ سه

نتیجه‌ی زیر را می‌گیریم.

۱- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x, y)$ نسبت به محور x ها نقطه‌ی

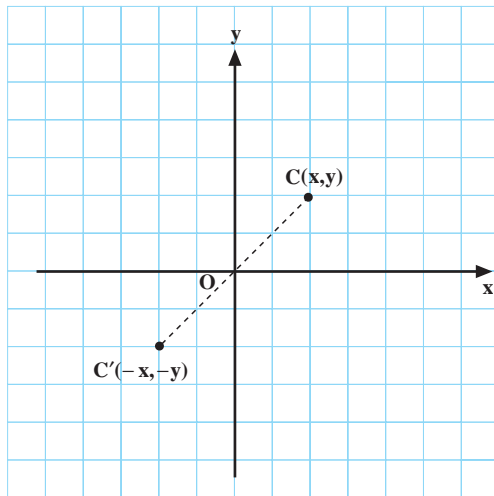
$A'(x, -y)$ است (شکل ۲-۲۰).

۲- قرینه‌ی نقطه‌ی $B(x,y)$ نسبت به محور y ها، نقطه‌ی $B'(-x,y)$ است (شکل ۲-۲۱).



شکل ۲-۲۱

۳- قرینه‌ی نقطه‌ی $C(x,y)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه‌ی $C(-x,-y)$ است (شکل ۲-۲۲).



شکل ۲-۲۲

مثال ۱: قرینه‌ی نقطه‌ی $B(7,-3)$ را نسبت به مبدأ مختصات پیدا کنید.

حل ۱:

$$B(7,-3) \xrightarrow{\text{نسبت به مبدأ}} B'(-7,3)$$

مثال ۲: الف) قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-8,-4)$ را نسبت به محور x ها پیدا کنید.

حل ۲:

$$A(-8,-4) \xrightarrow{\text{نسبت به } x \text{ ها}} A'(-8,4)$$

ب) قرینه‌ی نقطه‌ی $C(-8,-4)$ را نسبت به محور y ها پیدا کنید.

$$C(-8,-4) \xrightarrow{\text{نسبت به } y \text{ ها}} C'(8,-4)$$

مثال ۳: عدد m را چنان به دست آورید که نقطه‌ی $B(2m-3, 5)$ روی محور $y'Oy$ باشد.

حل ۳: $B(x, y) \Rightarrow x = 0$: بر محور y ها قرار دارد

$$\Rightarrow 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

مثال ۴: عدد C را چنان به دست آورید که نقطه‌ی $D(5, 2C-1)$ روی محور $x'Ox$ باشد.

حل ۴: $C(x, y) \Rightarrow y = 0$: بر محور x ها قرار دارد

$$\Rightarrow 2C - 1 = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

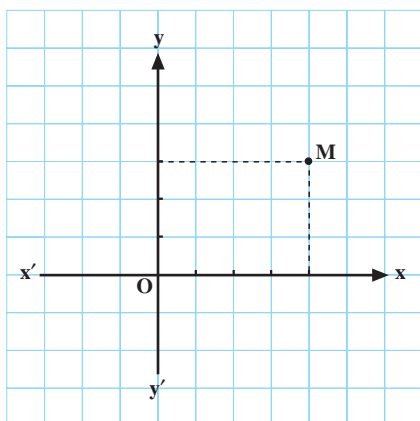
تمرین

۱- با توجه به محور مختصات شکل ۲۳-۲ کارهای زیر را انجام دهید.

الف) قرینه‌ی نقطه‌ی M نسبت به محور x ها را روی شکل نشان دهید.

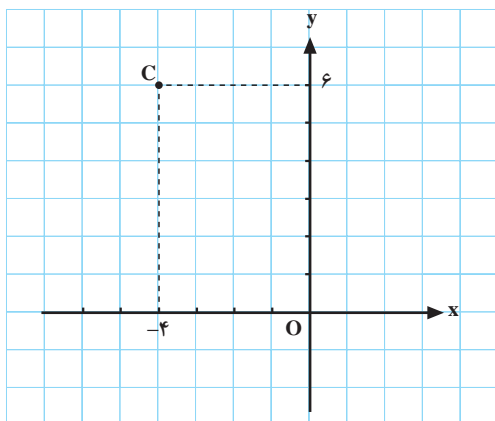
ب) قرینه‌ی نقطه‌ی M را نسبت به محور y ها روی شکل نشان دهید.

ج) قرینه‌ی نقطه‌ی M را نسبت به مبدأ مختصات روی شکل ۲۳-۲ نشان دهید.



شکل ۲۳-۲

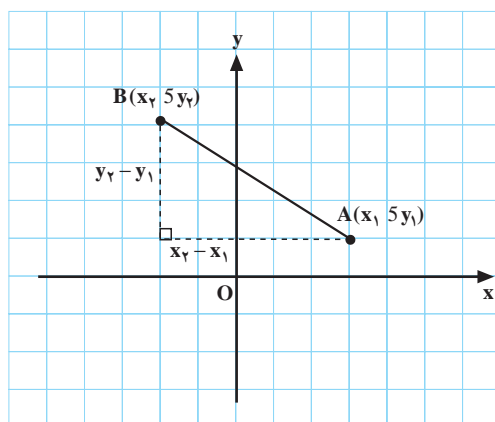
۲- با توجه به شکل ۲۴-۲، مقدار s و t را در $C(2t-3, 5s+2)$ به دست آورید.



شکل ۲۴-۲

۳-۱-۲ طول پاره خط در صفحه: اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه‌ی دلخواه باشند، طول پاره خط AB (شکل ۲۵-۲) از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



شکل ۲۵-۲

مثال ۱: نقاط A و B در مقابل مفروض است. طول

$A(3, -4)$ و $B(2, 5)$

پاره خط AB و OB را بیابید.

حل: از رابطه ی طول پاره خط داریم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(3 - 2)^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{1^2 + (-9)^2}$$

– x و y ، نقاط A و B را در رابطه قرار می دهیم:

$$\Rightarrow AB = \sqrt{1 + 81} \Rightarrow AB = \sqrt{82}$$

طول پاره خط AB برابر است با:

$$OB = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25}$$

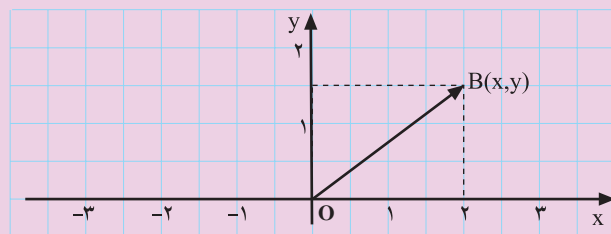
– طول پاره خط OB از رابطه ی مقابل به دست می آید.

– طول OB برابر است با:

$$\Rightarrow OB = \sqrt{29}$$

نتیجه: فاصله ی یک نقطه ی دلخواه مانند $B(x, y)$ در شکل ۲۶-۲ تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$OB = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$$



شکل ۲۶-۲

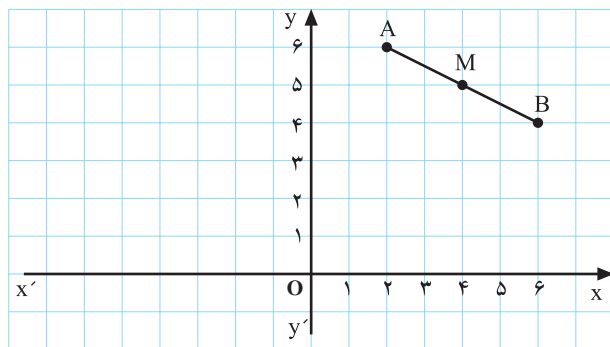
۴-۱-۲- مختصات وسط یک پاره خط در صفحه

فعالیت ۲-۴

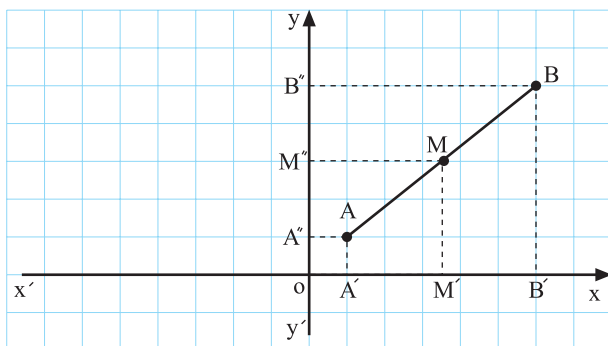
الف) مختصات نقاط A و B را پیدا کنید.

ب) هرگاه نقطه ی M وسط پاره خط AB باشد مقدار x_M

و y_M را پیدا کنید (شکل ۲۷-۲).



شکل ۲۷-۲



شکل ۲-۲۸

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

حل الف)

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + 7}{2} = 6 \\ y_M &= \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6 + (-2)}{2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M(6, 2)$$

$$\begin{aligned} OM &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{36 + 4} \Rightarrow OM = \sqrt{40} \end{aligned} \quad \text{حل ب)}$$

حل ۲)

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow 2 = \frac{2m + 8}{2} \Rightarrow 4 = 2m + 8 \\ \Rightarrow 2m &= -8 + 4 \Rightarrow 2m = -4 \Rightarrow m = -2 \\ y_M &= \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow -3 = \frac{5 + 3n - 1}{2} \Rightarrow -6 = 3n + 4 \\ \Rightarrow 3n &= -6 - 4 = -10 \Rightarrow n = \frac{-10}{3} \end{aligned}$$

ج) چه ارتباطی بین مختصات A و B با نقطه‌ی M وجود دارد؟

نتیجه: هرگاه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه در صفحه باشند مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB از دو رابطه‌ی روبه‌رو به‌دست می‌آید (شکل ۲-۲۸).

از تساوی $\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$ و $\overline{A''M''} = \overline{M''B''}$ چه نتیجه می‌گیرید؟ چرا؟

مثال ۱:

الف) اگر داشته باشیم: $A(5, 6)$ و $B(7, -2)$ ، مختصات نقطه‌ی M، وسط پاره خط AB را محاسبه کنید.

ب) فاصله‌ی وسط AB تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

مثال ۲: هرگاه داشته باشیم $A(2m, 5)$ و $B(8, 3n - 1)$

و نقطه‌ی $M(2, -3)$ وسط پاره خط AB باشد مقادیر m و n را به‌دست آورید.

مقدار m برابر است با:

مقدار n برابر است با:

تمرین

۱- هرگاه $A(-3, 6)$ و $B(3, 5)$ باشد :

(الف) طول پاره خط AB را محاسبه کنید.

(ب) فاصله ی وسط AB تا مبدأ مختصات را بیابید.

$A(4m, m)$ و $B(-m, m)$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\Rightarrow 200 = \sqrt{(4m - (-m))^2 + (m - m)^2}$$

$$\Rightarrow 200 = \sqrt{(4m + m)^2 + (0)^2} = \sqrt{(5m)^2} = |5m|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5m = 200 \Rightarrow m = 40 \\ -5m = 200 \Rightarrow m = -40 \end{cases}$$

$C(m, 2m)$ و $D(2m, 4m)$

۲- دو نقطه ی A و B به مختصات مقابل مفروض اند. اگر

طول پاره خط AB برابر 200 واحد باشد مقدار m را محاسبه کنید.

۳- دو نقطه ی C و D در مقابل مفروض است.

اگر طول پاره خط CD برابر $10\sqrt{5}$ واحد باشد مقدار m

را محاسبه کنید.

۵-۱-۲ تساوی دو زوج مرتب

دو زوج مرتب (x, y) و (z, t) با هم برابرند هرگاه مختص

اول آن ها با هم برابر باشند و نیز مختص دوم آن ها نیز مساوی باشند و برعکس.

مثال ۱: دو زوج مرتب A و B به مختصات

$(2a - b, 3a + 4)$ و $(7, 2a + 10)$ با شرط روبرو مفروض اند، a

و b را پیدا کنید.

حل: از برابر بودن مختصات A و B خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x_A = x_B \Rightarrow 2a - b = 7 \\ y_A = y_B \Rightarrow 3a + 4 = 2a + 10 \Rightarrow \end{cases}$$

$$3a - 2a = 10 - 4 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

۲- با حل معادله مقدار a به دست می آید.

$$2a - b = 7 \xrightarrow{a=6} 2 \times 6 - b = 7 \Rightarrow b = 12 - 7 = 5$$

۲- با قرار دادن a در معادله b را حساب می کنیم :

مثال ۲: مقدار a را چنان پیدا کنید که نقطه‌ی

$B(2a+1, 3a-4)$ روی نیمساز ربع اول و سوم باشد.

حل: بنابه خاصیت نیمساز ربع اول و سوم خواهیم داشت:

$$x_B = y_B \Rightarrow 2a+1 = 3a-4$$

$$3a - 2a = 1 + 4 \Rightarrow a = 5$$

— با حل معادله مقدار a برابر با:

تمرین

۱- هرگاه مختصات A و B در مقابل مفروض باشد مقدار

a و b را چنان بیابید که دو زوج مرتب A و B برابر باشند؛ سپس قرینه‌ی A را نسبت به مبدأ مختصات پیدا کنید.

۲- مقدار b را چنان بیابید که نقطه‌ی C به مختصات

روبه‌رو روی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد.

(راهنمایی: نیمساز ربع دوم و چهارم خط $y = -x$

می‌باشد)

۳- اگر C و C' نسبت به مبدأ مختصات قرینه باشند مقدار

s و t را بیابید (با توجه به شکل ۲۹-۲).

۴- هرگاه ABC یک مثلث باشد که $A(3, 5)$ و B قرینه‌ی

نقطه A نسبت به محور x ها و C قرینه‌ی A نسبت به محور y ها باشد، مثلث ABC را روی محورهای مختصات رسم کنید و سپس طول ضلع BC را محاسبه کنید.

۵- اگر $A(3, 5)$ و $B(-8, 5)$ باشند:

الف) نقاط A و B را روی دستگاه مختصات ۳۰-۲

مشخص کنید.

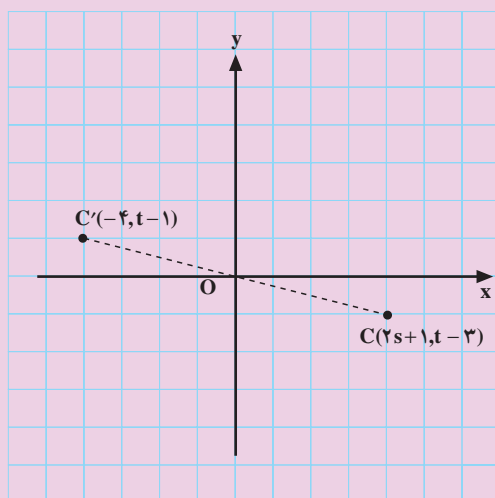
ب) مختصات وسط پاره خط AB را پیدا کنید.

پ) نقاط A و B را به مبدأ مختصات وصل کنید، سپس

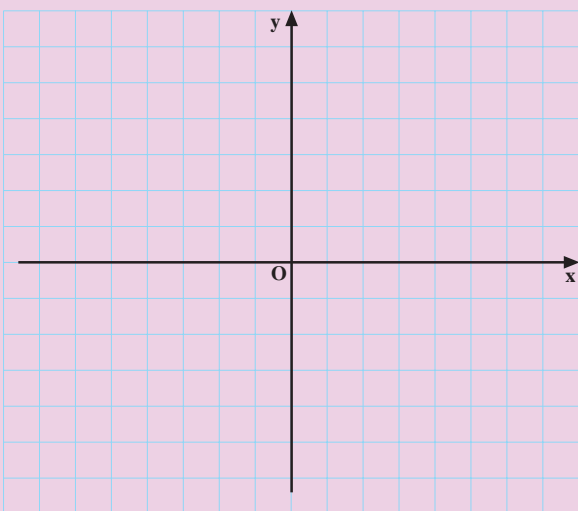
محیط مثلث OAB را محاسبه کنید.

$A(3a+b, 7)$ و $B(1, 4a-5)$

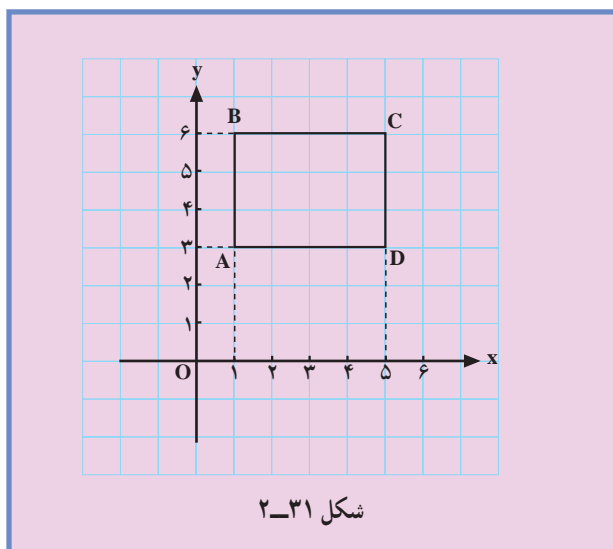
$C(3b-5, 7b+1)$



شکل ۲۹-۲



شکل ۳۰-۲



۶- الف) مختصات رأس‌های A و C ، D ، B را در شکل

۲-۳۱ بیابید.

ب) قرینه‌ی چهارضلعی $ABCD$ را نسبت به محور x ها

به‌دست آورید.

پ) قرینه‌ی چهارضلعی $ABCD$ را نسبت به محور y ها

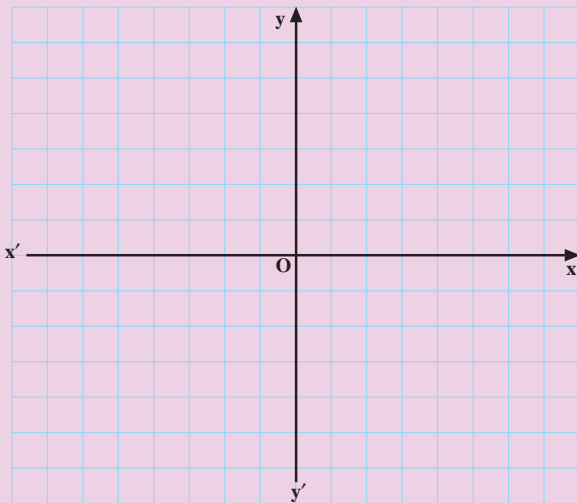
بیابید.

ت) قرینه‌ی چهارضلعی $ABCD$ را نسبت به مبدأ مختصات

به‌دست آورید.

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۱)



محور ۲-۳۲

$$A(-2a \text{ و } 2a+1)$$

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ و } B \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

۱- اگر $x_A = 5$ و $x_B = -6$ و $\overline{AB} = 2\overline{AC}$ باشد مقدار \overline{AC} را بیابید.

۲- نقاط $A \begin{vmatrix} 6 \\ 2 \end{vmatrix}$ ، $B \begin{vmatrix} -6 \\ 2 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} 0 \\ 8 \end{vmatrix}$ رأس‌های مثلث ABC می‌باشد.

الف) نقاط A، B و C را روی محور مختصات ۲-۳۲ مشخص کنید.

ب) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

۳- هرگاه نقطه‌ی A به مختصات روبه‌رو، روی خط $y = x$ واقع باشد مختصات A را بیابید.

۴- نقاط A و B به مختصات روبه‌رو مفروض است.

الف) طول پاره خط AB را محاسبه کنید.

ب) مختصات وسط پاره خط AB را بیابید.

بخش دوم

فصل دوم

بازه

هدف کلی

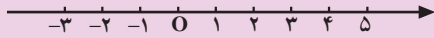
یادآوری و تکمیل مفهوم بازه و مفهوم‌های وابسته به آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

- ۱- بازه را تعریف کند ؛
- ۲- انواع بازه را به صورت مجموعه بنویسد ؛
- ۳- انواع بازه را روی محور اعداد نمایش دهد ؛
- ۴- اعمال بر روی بازه‌ها را انجام دهد.

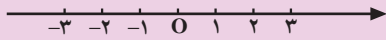
پیش‌آزمون (۲)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۲)



شکل ۲-۳۳

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ و } x > -1\} \text{ و } B = [-4, 5)$$



شکل ۲-۳۴

الف) $-3 \leq \frac{3x}{4} + 5 < 7$

ب) $(x - 5)(3x + 4) \geq 0$

۱- بازه‌های $A = [-2, 3)$ و $B = (2, +\infty)$ را روی محور ۲-۳۳ نشان دهید.

۲- بازه‌های A و B در مقابل مفروض‌اند. بازه‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $A \cap B$

ب) $A \cup B$

ج) $A - B$

د) متمم A را روی محور ۲-۳۴ نشان دهید.

۳- جواب نامعادله‌ی مقابل را به‌دست آورید و سپس آن را به صورت بازه بنویسید.

۴- جواب نامعادله‌ی مقابل را به صورت بازه نمایش دهید.

۲-۲- بازه

دمای آب در شرایط متعارف بیش‌تر از صفر و کم‌تر از 100° درجه‌ی سانتی‌گراد می‌باشد. بازه‌ی تغییرات دمای آب را می‌توان با $(0, 100)$ نمایش داد. این بازه‌ها را بازه‌ی باز $^\circ$ و 100° (صفر و صد) می‌نامند.



شکل ۲-۳۵- نمایش تغییرات دمای آب به صورت نمودار

$$\{x | x \in \mathbb{R}, 0 < x < 100\}$$

نمایش تغییرات دمای آب به صورت مجموعه (علائم ریاضی)

$$(a, b) \text{ یا }]a, b[$$



شکل ۲-۳۶- نمایش نموداری بازه‌ی (a, b)

$$\{x | x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

$$-x^2 + 4x > 0$$

$$-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$

جدول ۲-۱

x	0	4
$-x^2 + 4x > 0$	-	+
	باز	باز

$$(0, 4) = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 < x < 4\}$$



شکل ۲-۳۷

بازه‌ها جزء مهم‌ترین زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی می‌باشند و به شکل‌های زیر نمایش داده می‌شوند.

۲-۲-۱- بازه‌ی باز a و b: بازه‌ی باز a و b به‌طوری

که $a < b$ را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی بین a و b تعریف می‌نمایند که نمایش نموداری آن به صورت شکل ۲-۳۶ می‌باشد. نمایش مجموعه‌ای با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است.

مثال ۱: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کرده و جواب آن را

به صورت بازه و مجموعه بنویسید و روی محور مشخص کنید.

حل: نامعادله را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

– ریشه‌های معادله را پیدا می‌کنیم.

– معادله‌ی $-x^2 + 4x$ را تعیین علامت می‌کنیم.

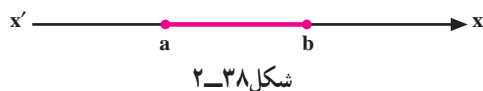
با توجه به جدول ۲-۱ جواب نامعادله برابر است با:

– نمایش نموداری بازه (شکل ۲-۳۷).

۲-۲-۲ بازه‌ی بسته‌ی a و b : اگر $a \leq b$ بازه‌ای که

علاوه بر نقاط بازه‌ی باز (a, b) شامل نقاط a و b باشد بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ نامیده می‌شود و نمایش نموداری آن شکل ۲-۳۸ است.

$[a, b]$



شکل ۲-۳۸

$$\{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

– نمایش به صورت مجموعه با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است.

$$B = [0, 3] \text{ و } A = [-1, 2]$$

مثال ۲: بازه‌های A و B در مقابل مفروض است.

حل الف



شکل ۲-۳۹

الف) نمودار دو بازه‌ی A و B را بر روی محور ۲-۳۹ رسم کنید.

ب) بازه $A \cap B$ را به دست آورید.

$$A \cap B = [0, 2]$$

(حل ب)

قسمتی که در هر دو بازه مشترک می‌باشد برابر است با:

$$A \cap B = [-1, 3]$$

(حل ج)

ج) $A \cap B$ را به دست آورید.

اجتماع دو بازه از نقطه‌ی شروع بازه‌ها یعنی عدد ۱- تا انتهای آن‌ها یعنی عدد ۳ می‌باشد.

۲-۲-۳ بازه‌ی بسته‌ی a و باز b : بازه‌ی بسته‌ی a

و باز b به شرط $(a < b)$ را مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین a و b ، به انضمام عدد a تعریف می‌کنند و نمایش نموداری آن به شکل ۲-۴۰ است.

$[a, b[$ یا $[a, b)$



شکل ۲-۴۰

$$\{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

$$-\frac{3}{x} \geq 2$$

– نمایش مجموعه‌ای بازه‌ی $[a, b)$ با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است.

مثال ۳: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کرده و مجموعه‌ی

جواب آن را به صورت بازه و مجموعه بنویسید.

حل: همه‌ی جمله‌ها را به یک طرف آورده و مخرج مشترک

می‌گیریم.

– ریشه‌های صورت و مخرج نامعادله را پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{3}{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{-3-2x}{x} \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = 0, -3-2x = 0 \Rightarrow -3 = 2x \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

– نامعادله را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۲-۲

x	$-\frac{3}{2}$	0
$-3-2x$	+	-
x	-	+
$\frac{-3-2x}{x}$	-	+

$$\left[-\frac{3}{2}, 0\right) = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, -\frac{3}{2} \leq x < 0\right\}$$

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله به صورت بازه یا مجموعه

به صورت روبه‌رو است:

$[a, b]$ یا $(a, b]$



نمودار ۲-۴۱

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

۲-۴۲ بازه‌ی باز a و بسته‌ی b : بازه‌ی باز a و

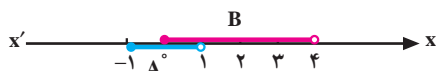
بسته‌ی b به شرط $(a < b)$ را مجموعه‌ی همه اعداد حقیقی بین a و b ، به انضمام نقطه‌ی b تعریف می‌کنند و نمایش نموداری آن به شکل ۲-۴۱ است. نمایش مجموعه‌ای آن با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است.

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 1\} \text{ و}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 4\}$$

مثال ۴: بازه‌های A و B در مقابل مفروض است. به

سؤال‌های زیر پاسخ دهید.



نمودار ۲-۴۲

– بازه‌های A و B را روی نمودار ۲-۴ مشاهده می‌کنید.

$$A = [-1, 1) \text{ و } B = [0, 4)$$

الف) $A \cap B$ را به دست آورید.

– ناحیه‌ای که در هر دو بازه مشترک است.

$$A \cap B = [0, 1)$$

ب) $A \cup B$ را به دست آورید.

– از ابتدای A یعنی ۱- تا انتهای B را شامل می شود.

$$A - B = [-1, 4)$$

(ج) $A - B$ را به دست آورید.

از بازه ی A بازه ی مشترک با B یعنی $[0, 1)$ را حذف

می کنیم، پس :

(د) $B - A$ را محاسبه کنید.

از بازه ی B بازه ی مشترک با A یعنی $[0, 1)$ را بیرون

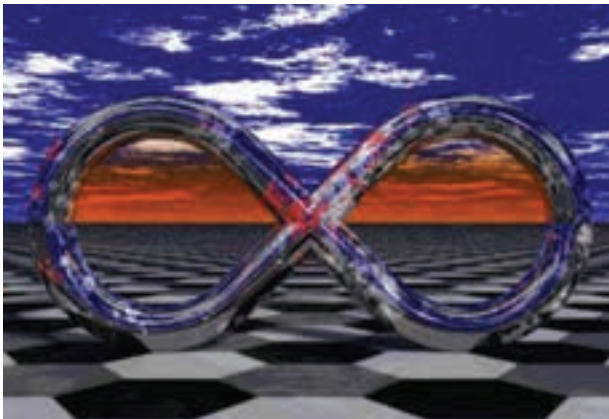
می آوریم ؛ یعنی :

معرفی بینهایت:

– تعداد ستارگان در آسمان چند عدد است؟

– در بازه ی $(2, 3)$ چند عدد حقیقی وجود دارد؟

– چند عدد طبیعی وجود دارد؟



شکل ۲-۴۳

ریاضی دان ها برای نمایش چیزی که از هر عدد حقیقی

بزرگ تر است از نماد $+\infty$ استفاده می کنند.

به طور مشابه برای نمایش چیزی که از هر عدد منفی

کوچک تر است از نماد $-\infty$ استفاده می کنیم. پس اگر x عددی

دلخواه و حقیقی باشد، داریم :

نکته : $-\infty, +\infty$ عدد نیستند.

۵-۲-۲ بازه ی باز a و $+\infty$: بازه ی باز a و $+\infty$

را مجموعه ی همه ی اعداد حقیقی بیش تر از a تعریف می کنند و

نمایش نموداری آن به شکل ۲-۴۴ می باشد.

$$(a, +\infty)$$



شکل ۲-۴۴

نمایش مجموعه ای آن با علائم ریاضی به صورت روبه رو

است :

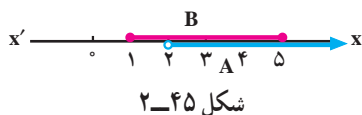
$$\{x | x \in \mathbb{R}, x > a\}$$

مثال ۵: بازه های A و B در مقابل مفروض اند. بازه های

زیر را تعیین کنید.

$$A = (2, +\infty) \text{ و } B = [1, 5]$$

$$A \cap B$$



شکل ۲-۴۵

$$A \cap B = (2, 4]$$

$$A \cap B = [1, +\infty)$$

حل ۲:

$$B' = \mathbb{R} - B = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$$

$$A - B = (5, +\infty)$$

$$[a, +\infty)$$



شکل ۲-۴۶

$$\{x | x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$$

$$\text{بازه } [100, +\infty)$$

$$\{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 100\}$$



شکل ۲-۴۷

$$[2, +\infty) - (0, 4)$$

حل: بازه‌های A و B را در نمودار ۲-۴۵ مشاهده می‌کنید.

– با توجه به نمودار ۲-۴۵ اشتراک A و B برابر است با:

$$A \cap B \quad (۲)$$

(۳) B' متمم B را به دست آورید.

حل: از مجموعه \mathbb{R} (اعداد حقیقی) B را حذف می‌کنیم،

پس:

$$A - B \quad (۴)$$

– هرگاه از اعضای A، عضوهای مشترک B را بیرون

آوریم داریم:

۶-۲-۲ – بازه بسته‌ی a و باز مثبت بی‌نهایت:

بازه‌ای که علاوه بر نقاط بازه‌ی باز $(a, +\infty)$ شامل نقطه‌ی a

باشد بازه‌ی بسته‌ی $[a, +\infty)$ نامیده می‌شود که نمودار آن به

شکل ۲-۴۶ می‌باشد.

نمایش مجموعه‌ای آن با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو

است:

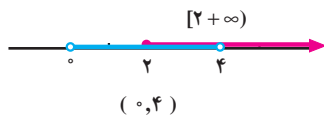
مثال ۶: می‌دانیم اگر آب در شرایط متعارف تحت دمای

۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد یا بیش‌تر قرار گیرد به بخار تبدیل

می‌شود. بازه‌ی تغییرات دمای بخار آب به صورت بازه،

مجموعه و نمودار آن به صورت روبه‌رو است.

مثال ۷: حاصل عبارت مقابل را تعیین کنید.



شکل ۲-۴۸

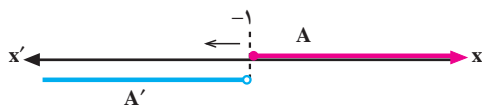
$$[2, +\infty) - (0, 4) = [4, +\infty)$$

$$]-\infty, a[\text{ یا } (-\infty, a)$$



شکل ۲-۴۹

$$\{x | x \in \mathbb{R}, x < a\}$$



شکل ۲-۵۰

$$A' = \mathbb{R} - A = (-\infty, -1)$$

$$\frac{x+1}{x} < 3$$

$$\frac{x+1}{x} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{x+1-3x}{x} < 0 \Rightarrow \frac{-2x+1}{x} < 0$$

$$-2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ و } x=0$$

جدول ۲-۳

x	$-\infty$	۰	$\frac{1}{2}$	$+$
$-2x+1$	+	+	۰	-
x	-	۰	+	+
$\frac{-2x+1}{x} < 0$	نامعین	جواب	نامعین	جواب

حل: نمایش نموداری $[2, +\infty)$ و $(0, 4)$ را در شکل

۲-۴۸ می بینیم.

اگر قسمت مشترک را از $[2, +\infty)$ حذف کنیم، داریم:

۲-۲-۷ بازه‌ی باز $-\infty$ و a : بازه‌ی باز $-\infty$ و a

را مجموعه‌ی اعداد حقیقی کم‌تر از a تعریف می‌کنیم و نمودار آن به شکل ۲-۴۹ است.

مجموعه با علائم ریاضی

مثال ۸: مجموعه‌ی A مفروض است. متمم آن را به

صورت بازه نمایش دهید.

حل: با توجه به نمودار ۲-۵۰ اگر از محور اعداد حقیقی

مجموعه‌ی A را برش دهیم داریم:

مثال ۹: مجموعه جواب نامعادله‌ی مقابل را به صورت

مجموعه و بازه نمایش دهید.

حل: همه‌ی جمله‌ها را به یک طرف انتقال می‌دهیم و

مخرج مشترک می‌گیریم.

- ریشه‌های صورت و مخرج را به دست می‌آوریم.

- طبق جدول ۲-۳ نامعادله را تعیین علامت می‌کنیم چون

نامعادله کوچک‌تر از صفر است منفی‌ها را به عنوان جواب قابل

قبول می‌پذیریم.

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\frac{x+1}{x} < 3$ به صورت

بازه و مجموعه :

$$(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

یا

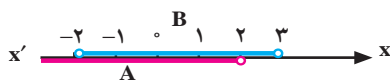
$$\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0 \text{ یا } x > \frac{1}{4}\right\}$$

مثال ۱۰: بازه‌های A، B و C در مقابل مفروض است.

حاصل عبارت روبه‌رو را به صورت بازه نمایش دهید.

$$A = (-\infty, 2), B = (-2, 3), C = [2, +\infty)$$

$$(A \cup B) \cap C$$



شکل ۵۱-۲

حل: نمودار A و B را روی محور مشخص می‌کنیم

(شکل ۵۱-۲).

– اشتراک A و B برابر است با :

$$A \cap B = (-2, 2)$$



شکل ۵۲-۲

– بازه‌ی C و A ∩ B را روی محور مشخص می‌کنیم

(شکل ۵۲-۲).

با توجه به نمودار ۵۲-۲ داریم :

$$(A \cap B) \cap C = (-2, 2) \cap [2, +\infty) = \emptyset$$

۸-۲-۲ بازه‌ی باز منفی بی‌نهایت و بسته‌ی a:

هرگاه بازه‌ی باز $-\infty$ و a، a را نیز شامل شود بازه‌ی باز $-\infty$ و

بسته‌ی a به دست می‌آید که در نمودار ۵۳-۲ نمایش داده شده است.

– نمایش مجموعه‌ای $(-\infty, a]$ به صورت روبه‌رو است.

$$(-\infty, a] \text{ یا }]-\infty, a]$$



شکل ۵۳-۲

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$$

مثال ۱۱: مجموعه‌ی مقابل را به صورت نمودار و بازه

نمایش دهید.

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 2\}$$



شکل ۵۴-۲

حل: نمایش نموداری به صورت شکل ۵۴-۲ است.

– نمایش به شکل بازه به صورت روبه‌رو است.

$$A = (-\infty, 2]$$

$$(-\infty, 2] \cup (-3, +\infty)$$

مثال ۱۲: حاصل عبارت مقابل را به صورت بازه بنویسید.



شکل ۵۵-۲

$$(-3, +\infty) \cap (-\infty, 4) = (-3, 4)$$

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$



شکل ۵۶-۲

$$\{x | x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$$

$$B = [2, +\infty)$$

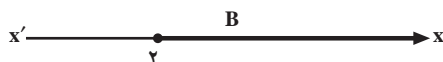
$$\mathbb{R} - B = B$$

$$\mathbb{R} - B = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} - B = (-\infty, 2)$$

$$\mathbb{R}' = \mathbb{R} - \mathbb{R} = \emptyset$$

$$B' = \mathbb{R} - B = (-\infty, 2)$$



شکل ۵۷-۲

$$-2 < 2x + 1 \leq 5$$

$$\Rightarrow -3 < 2x < 4$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < x \leq 2$$

$$+\frac{3}{2}, 2\%$$

$$5 \leq \frac{x}{4} - 1 < 7$$

$$\Rightarrow 6 \leq \frac{x}{4} < 8$$

$$\Rightarrow 24 \leq x < 32$$

$$\Rightarrow [24, 32)$$

حل: هر کدام از بازه‌ها را روی محور مشخص می‌کنیم.

با توجه به شکل ۵۵-۲ حاصل اشتراک دو بازه‌ی

$(-3, +\infty)$ و $(-\infty, 4)$ برابر با:

۹-۲-۲- مجموعه‌ی اعداد حقیقی: بازه‌ی باز $-\infty$

و $+\infty$ را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی می‌نامند و نمایش

نموداری آن به صورت شکل ۵۶-۲ و نمایش مجموعه‌ای آن به

صورت روبه‌رو است.

مثال ۱۳: با توجه به بازه‌ی B مقابل، مقادیر زیر را به دست

آورید.

الف) $\mathbb{R} - B$

ب) $\mathbb{R} - B$

ج) $\mathbb{R} - B$

د) \mathbb{R}'

هـ) B'

مثال ۱۴: مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی مقابل را

به صورت بازه بنویسید.

حل: از دو طرف عدد ۱ را کم می‌کنیم، داریم:

– دو طرف نامعادله را بر عدد ۲ تقسیم می‌کنیم.

– مجموعه‌ی جواب‌ها برابر است با:

مثال ۱۵: مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی مقابل را به

صورت بازه بنویسید.

حل: به دو طرف عدد ۱ را اضافه می‌کنیم؛

– دو طرف را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم؛

– مجموعه‌ی جواب‌ها به صورت بازه برابر است با:

تمرین

۱- هرگاه بازه‌های A ، B و C در مقابل مفروض‌اند، مقادیر

زیر را به دست آورید.

الف) $C - A$

ب) A'

ج) $A \cap B$

د) $B \cap C$

۲- جواب هریک از نامعادله‌های زیر را تعیین کنید و آن‌ها

را روی محور $x'Ox$ (محور اعداد حقیقی) نمایش دهید، سپس

به صورت بازه بنویسید.

$$۱) -3x + 5 \geq 7$$

$$۲) \frac{2x+4}{3} < \frac{3x-2}{2}$$

$$۳) 5 < \frac{x}{3} + 2 < 7$$

$$۴) x^2 < 5x - 4$$

$$۵) 2x^2 \geq 3x - 1$$

$$۶) x^2 \leq +7x - 12$$

۳- نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب را به صورت

بازه بنویسید و بر روی نمودار نمایش دهید.

$$\text{الف) } \frac{x+3}{x+2} \leq 0$$

$$\text{ب) } \frac{x+2}{2x-5} \geq 2$$

۴- هرگاه $A = (-5, 8]$ و $B = [-2, 10)$ باشد، جاهای

خالی را با عدد و نماد مناسب پُر کنید.

$$۱) B \square A = (-5, 10)$$

$$۲) A \cap B = [....,]$$

$$۳) A - B = (....,)$$

۵- هرگاه حسن بین ساعت ۹ و ۱۱، حسین بین ساعت

۱۳ و ۱۷ و محمود بین ساعت ۸ و ۱۹ در کتابخانه حضور داشته

باشند :

الف) ساعت حضور هر ۳ نفر را به صورت بازه بنویسید.

ب) کدام یک از این افراد می‌توانند در کتابخانه همدیگر

را ملاقات کنند و در چه بازه‌ی زمانی؟

$$A(-3, 5), B = (-7, 2), C[3, 7]$$

۶- بازه‌های زیر را با مجموعه نمایش دهید و نمودار آن را رسم کنید.

الف) $(-3, 7] =$

ب) $[8, 9) =$

ج) $(-\infty, 3) =$

۷- مجموعه‌های زیر را به صورت بازه بنویسید.

۱) $\{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$

۲) $\{x | x \in \mathbb{R}, x \leq -5\}$

۳) $\{x | x \in \mathbb{R}, -5 < x < 5\}$

۴) $\{x | x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq \frac{3}{5}\}$

۵) $\{x | x \in \mathbb{R}, -\sqrt{5} \leq x < 8\}$

۸- هرگاه $-2 < x \leq 5$ باشد محدوده‌ی مقادیر زیر را

بنویسید.

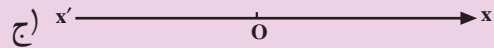
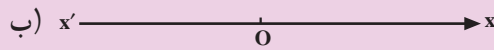
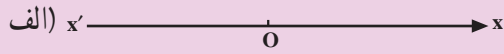
۱) $2x + 3$

۲) $-3x + 4$

۳) $4x - 7$

۹- در شکل ۵۹-۲ حدود h را چنان بیابید که مساحت

دو زنگه‌ی شکل (الف) از مساحت مربع شکل (ب) بزرگ‌تر و از مساحت مستطیل شکل (ج) کوچک‌تر باشد.



شکل ۵۸-۲

۱)

۲)

۳)

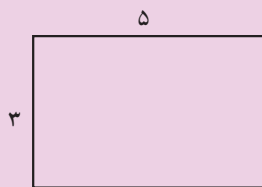
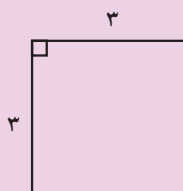
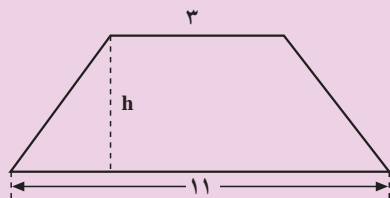
۴)

۵)

۱)

۲)

۳)



شکل ۵۹-۲

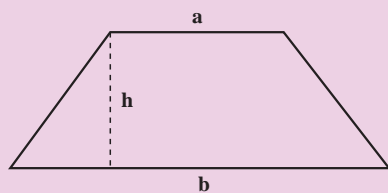
یادآوری

مساحت مربع برابر است با حاصل ضرب یک ضلع در خودش.

– مساحت مستطیل برابر است با طول \times عرض

– مساحت دوزنقه‌ای با قاعده‌های a و b و ارتفاع h ,

شکل ۶-۲، برابر است با: $S = \frac{1}{2}h(a+b)$.



شکل ۶-۲

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۲)

$$A = \left(-\infty, +\frac{1}{6} \right] \cup [1, +\infty)$$

$$B = \left(-\infty, -\frac{2}{3} \right) \cup \left[\frac{1}{7}, +\infty \right)$$

$$C = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{7} \right]$$

$$D = \left[\frac{5}{-29}, +\infty \right)$$

۱- متمم $A = [-2, 1)$ را مشخص کرده و روی محور شکل ۲-۶۱ نشان دهید.

۲- هرگاه A مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $1 < 3x + 1 \leq -2$ و B مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x^2 > 4$ باشد مقادیر زیر را به صورت بازه بنویسید.

۱) $A \cap B$

۲) $A \cup B$

۳) $A - B$

۳- کدام یک از بازه‌های A ، B ، C و D ، جواب نامعادله‌های زیر است؟

۱) $\frac{-3x+1}{2} \leq \frac{7x+5}{5}$

۲) $6x^2 \geq 7x - 1$

۳) $\frac{-7x+1}{3x+2} \geq 0$

۴) $\frac{-7x+1}{3x+2} \leq 0$