

بخش اول

فصل سوم

تابع

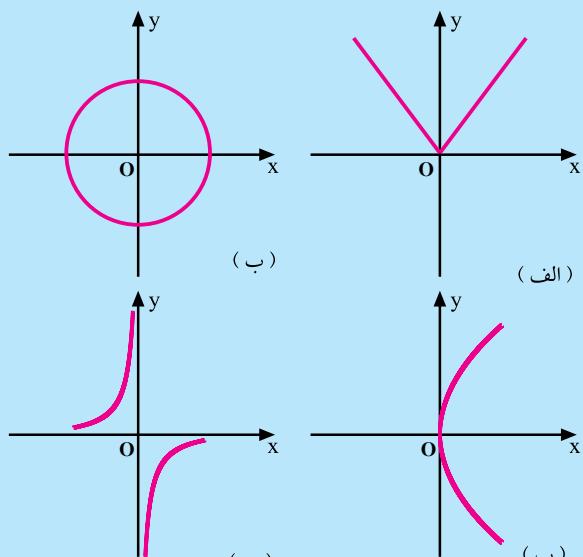
هدف کلی

تعمیق مفهوم تابع و ویژگی‌های مربوط به آن

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند:

- ۱- تابع را تعریف کند.
- ۲- تابع را با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهد.
- ۳- تابع را از روی نمودار تشخیص دهد.
- ۴- دامنه‌ی تابع را تعیین کند.
- ۵- برد تابع را از روی نمودار آن تعیین کند.
- ۶- نمودار تابع‌های مثلثاتی $\sin x$ و $\cos x$ را رسم کند.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۱-۴۸

۱- کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

الف) $f = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$

ب) $g = \{(1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$

ب) $h = \{(-1, 2), (-2, 3), (-3, 4), (5, 1)\}$

۲- کدام یک از شکل‌های رویه‌رو نمایش یک تابع است؟

(شکل ۱-۴۸).

۳- تابع f با ضابطه‌ی زیر در \mathbb{R} تعریف شده است :

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$$

الف) نمودار این تابع رارسم کنید.

ب) مقدارهای $f(-2)$, $f(3)$ و $f(0)$ را حساب کنید.

۴- اگر $f(-3) = -2$, $f(-2) = -1$, $f(-1) = 0$ و $f(0) = 1$ باشد، آن‌ها را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

۵- تابع f به صورت زیر داده شده است.

$$f = \{(-1, 0), (2, 3), (1, -1), (3, 2)\}$$

مطلوب است تعیین $f(3)$, $f(2)$ و $f(-1)$.

۶- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 + x + 1$ داده شده است.

مطلوب است محاسبه‌ی :

$$f(2), f(-x), f(3x)$$

$$f(\sqrt{x}), f(x-1)$$

۷- تابع $f(x) = 2 \sin x$ و نقطه‌ی $m\left(\frac{\pi}{6}, a+2\right)$ داده شده است.

است. مقدار a را چنان باید که این نقطه روی نمودار تابع $y = f(x)$ باشد.

۸- تابع $y = a \sin x + b \cos x$ داده شده است. مقدار a

و b را طوری تعیین کنید که نمودار این تابع از دو نقطه‌ی $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ و $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ بگذرد.

۹- کدام یک از رابطه‌های زیر ضابطه‌ی یک تابع است؟

(الف) $2x + y = 7$

(ب) $x + y^2 - 2 = 0$

(پ) $y + 2x^3 - x = 1$

۱۰- اطلاعات جدول زیر را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید. آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

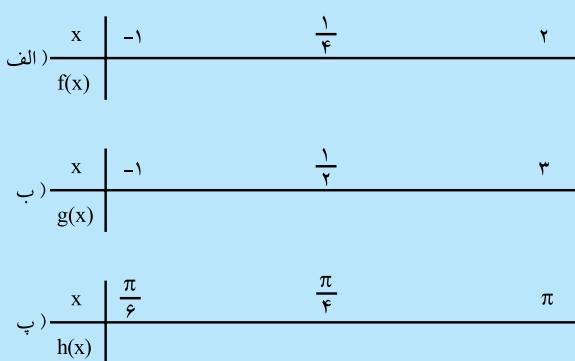
x	3	4	5	6	7
y	2	5	-1	2	2

۱۱- مقدار هریک از تابع‌های زیر را به ازای x ‌های مشخص شده تعیین کنید (شکل ۱-۴۹).

(الف) $f(x) = -2x^2 + x + 3$, $x = -1, \frac{1}{4}, 2$

(ب) $g(x) = \frac{3x}{x-2}$, $x = -1, \frac{1}{2}, 3$

(پ) $h(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$, $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \pi$.



شکل ۱-۴۹

خواندنی



گاتفرید لایب نیتز (۱۶۴۶ - ۱۷۱۶)



یوهان برنولی (۱۶۶۷ - ۱۷۴۸)



اویلر (۱۷۰۷ - ۱۷۸۳)

ظاهرًا^۱ وازه‌ی تابع^۲ را اولین بار لایب نیتز^۳، در سال ۱۶۹۴ به عنوان کمیتی وابسته به یک نمودار به کار برده است. در سال ۱۷۱۸ یوهان برنولی^۴ یک تابع را به صورت عبارت‌هایی متشکل از چند ثابت و یک متغیر در نظر گرفت. بعداً در همین قرن اویلر^۵ تابع را به عنوان معادله‌ای تشکیل یافته از ثابت‌ها و متغیرها بررسی کرد. اویلر به طور وسیعی از نماد بسیار پراهمیت $f(x)$ استفاده می‌کرد.

تعريف تابع که تا به امروز مورد استفاده قرار می‌گیرد توسط دیریکله^۶ (۱۸۰۵ - ۱۸۵۹) فرمولبندی شده است. او می‌گوید: اگر دو متغیر x و y چنان بهم مربوط باشند که برای هر مقدار x فقط یک مقدار y به دست آید آنگاه y تابعی از x نامیده می‌شود. او x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته نامید، مقادیر y به مقادیری که به x نسبت داده می‌شود وابسته است. او مقادیر x را دامنه‌ی تابع و مقادیر y متناظر با آن‌ها را برد تابع نامید. پس از بیان مفهوم مجموعه، تابع با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب^۷ نیز بیان شد. [۲]



گوستاو دیریکله (۱۸۰۵ - ۱۸۵۹)

۱) Function

۲) Leibnitz

۳) Johann Bernoulli

۴) Euler

۵) Dirichlet

۶) Ordered pairs

۱-۳- تابع

یکی از مفاهیم مهم در ریاضیات، مفهوم تابع است. در اکثر امور روزمره با تابع سرو کار داریم. در این بخش ضمن معرفی چند تابع، مشخص نمودن تابع با ضابطه، با جدول و با نمودار، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱-۳-۱- تابع با ضابطه: برای تغییر ولتاژ (اختلاف پتانسیل) از ترانسفورمر استفاده می‌شود.

ارتباط بین V_1 و V_2 با رابطه‌ی (۱) بیان می‌شود که در آن a عددی ثابت است. رابطه‌ی (۱) شان می‌دهد که ولتاژ خروجی تابع ولتاژ ورودی است. رابطه‌ی (۱) را ضابطه‌ی این تابع می‌گویند. در رابطه‌ی (۱) ثابت a به نوع ترانسفورمر بستگی دارد. با داشتن مقدار ولتاژ ورودی (V_1) و مقدار ولتاژ خروجی (V_2) می‌توان a را به دست آورد.

مثالاً، اگر $a = 0.5$ و $V_1 = 23$ ولت باشد
داریم :

$$V_2 = aV_1 \Rightarrow V_2 = 0.5 \times 23 = 11.5$$

ولت V_2 مساوی 11.5 ولت باشد آنگاه :

$$\text{ولت } 1 = 0.5 \times V_2 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{0.5} = 20$$

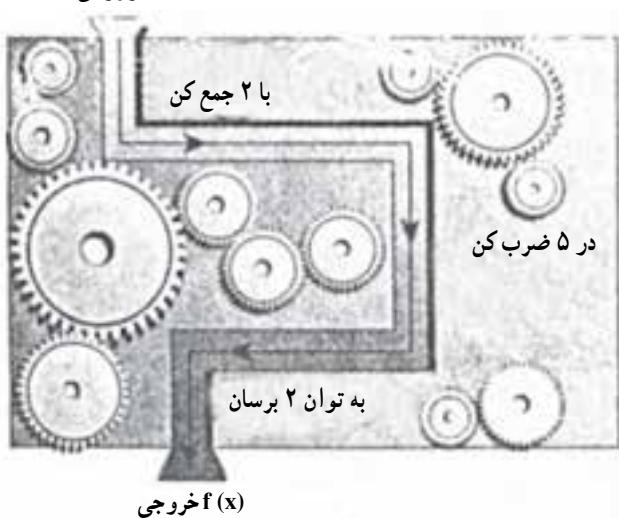
۱-۵- کار در کلاس

(۱) جدول ۱-۱ برای یک ترانسفورمر داده شده است.
الف) با استفاده از جدول، عدد ثابت a را، از رابطه‌ی (۱)، به دست آورید.

ب) با استفاده از قسمت (الف) جدول را کامل کنید.

(۲) یک سر فنری به طول 1 m متر به نقطه‌ی A بسته شده است (شکل ۱-۵۱). با آویختن وزنه‌های متفاوت به انتهای فنر، طول فنر مطابق جدول ۱-۲، تغییر کرده است. وزن وزنه را با W و طول فنر را با L نشان می‌دهیم.

x ورودی



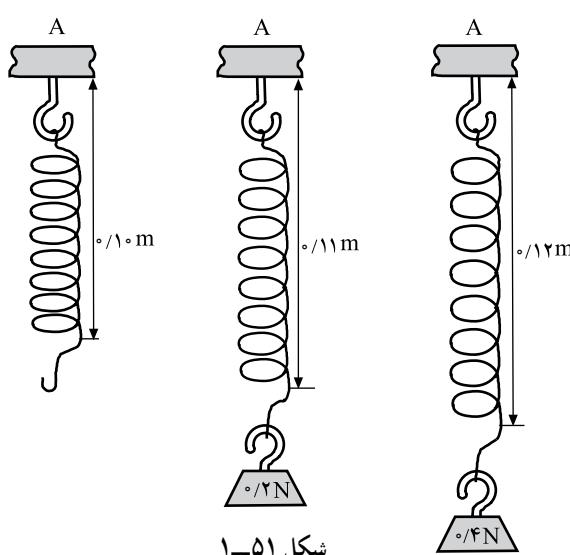
شکل ۱-۵۰

ولتاژ خروجی V_2 \Rightarrow ترانسفورمر V_1 ولتاژ ورودی

$$(1) \quad V_2 = aV_1$$

جدول ۱-۱

V_1	۱۹۰	۲۰۰	۲۲۰	۲۴۰
V_2	۱۹	۲۰	۲۳	۲۴



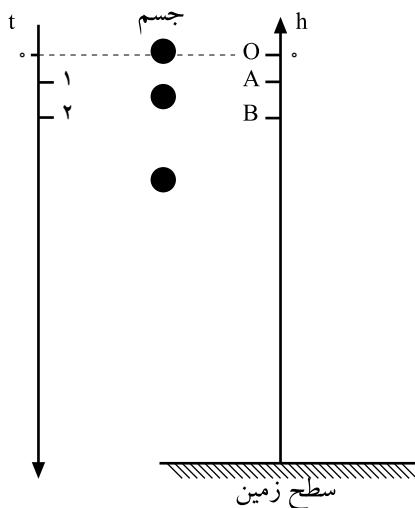
جدول ۱-۲

W	۰	$۰/۲$	$۰/۴$	$۰/۶$	$۰/۸$	$۰/۹$	۱
L	$۰/۱۰$	$۰/۱۱$	$۰/۱۲$		$۰/۱۴$	$۰/۱۵$	

$$L = ۰/۱۰ + ۰/۰۵ W$$

الف) با توجه به شکل ۱-۵۱ یا جدول ۱-۲، ملاحظه می‌کند که L تابع W است. آیا ضابطه‌ی این تابع به صورت روبرو است؟ تحقیق کنید.

ب) با توجه به این ضابطه، جدول ۱-۲ را کامل کنید.



شکل ۱-۵۲

۳) گلوله‌ای از ارتفاع ۱۲۵ متری رها می‌شود (سقوط آزاد) (شکل ۱-۵۲). می‌دانید اگر فاصله‌ی یک نقطه از سطح زمین را با h و لحظه‌ی رسیدن به آن نقطه را با t نشان دهیم، رابطه‌ی زیر بین h و t برقرار است.

$$h = -\frac{1}{2}gt^2$$

در این رابطه نقطه‌ی آغاز حرکت را مبدأً مختصات

$$\text{گرفته‌ایم} (t = ۰, h = ۰) \text{ و } g \approx ۱۰ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

جدول ۱-۳

جدول ۱-۳ مکان جسم را در لحظه‌های متفاوت نشان می‌دهد. شکل ۱-۵۲ نیز راهنمای جدول ۱-۳ است.

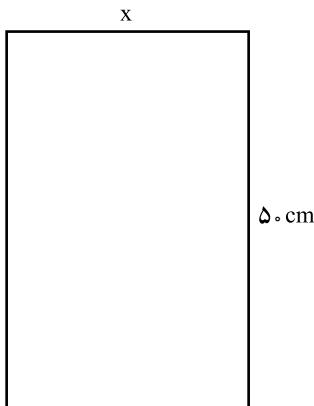
نقطه	t	h
O	۰	۰
A	۱	-۵
B	۲	-۲۰
C	۳	
D	۴	
E	۵	-۱۲۵

الف) جدول و شکل را کامل کنید.

ب) گلوله پس از چند ثانیه به سطح زمین برخورد می‌کند؟

پ) در چه لحظه‌ای فاصله‌ی گلوله از نقطه‌ی رها شده ۸۰ متر است؟

تمرین ۵ - ۱



شکل ۵۳ - ۱

۱) شکل ۵۳ - ۱ یک ورق آلمینیوم به شکل مستطیل، به طول 50° سانتی متر و عرض x سانتی متر را نشان می دهد. واضح است که مساحت و محیط این ورق تابعی از متغیر x است.

الف) اگر $S(x)$ مساحت این ورق باشد فرمول $S(x)$ را بنویسید.

ب) اگر $p(x)$ محیط این ورق باشد فرمول $p(x)$ را بنویسید.

پ) با توجه به این که x اندازه‌ی عرض یک مستطیل است، حدود

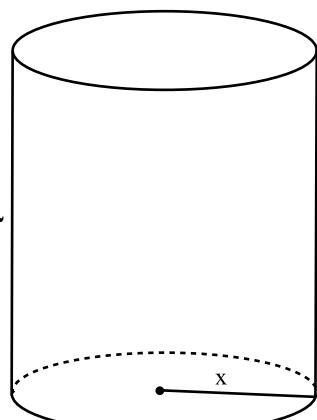
تغییرات x را تعیین کنید.

۲) نرخ کرایه‌ی نوعی اتومبیل، برای هر کیلومتر طی مسافت، 15° ریال، به اضافه‌ی ورودی ثابت $40,000$ ریال است. کرایه‌ی اتومبیل تابعی از x ، یعنی مسافت طی شده، بر حسب کیلومتر، است. ضابطه‌ی این تابع را بنویسید (شکل ۵۴ - ۱).

شکل ۵۴ - ۱



۳ متر



شکل ۵۵ - ۱

۳) می دانید که سطح جانبی و حجم استوانه به شعاع قاعده و ارتفاع آن بستگی دارد. فرض کنید ارتفاع استوانه‌ای 3 متر و شعاع قاعده‌ی آن x متر باشد (شکل ۵۵ - ۱).

الف) اگر $S(x)$ سطح جانبی این استوانه باشد ضابطه‌ی $S(x)$ را بنویسید.

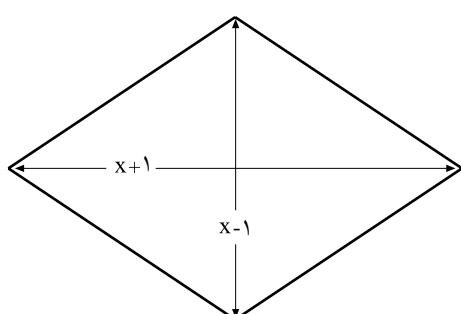
ب) اگر $V(x)$ حجم این استوانه باشد فرمول $V(x)$ را بنویسید.

۴) قطرهای یک لوزی به ترتیب $x+1$ و $x-1$ متر هستند (شکل ۵۶ - ۱).

الف) اگر $f(x)$ مساحت این لوزی باشد ضابطه‌ی $f(x)$ را بنویسید.

ب) با توجه به شکل رو به رو، حدود تغییرات x را تعیین کنید.

پ) نمودار تابع $y = f(x)$ رارسم کنید.



شکل ۵۶ - ۱

۱-۳-۲ تابع با جدول: می‌دانید که دمای بدن بیمار، با توجه به وضع روحی و جسمی او، به زمان بستگی دارد.
جدول ۱-۴ دمای بدن بیماری را در ساعت‌های معین نشان می‌دهد.

جدول ۱-۴	
t	۱۰ ۱۲ ۱۴ ۱۶ ۱۸ ۲۰ ۲۲
θ	۳۸/۵ ۳۹ ۳۹/۱ ۳۹/۴ ۳۹ ۳۹/۸ ۴۰

آیا رابطه‌ای برای بیان دمای بدن (θ) این بیمار در لحظه‌های مختلف (t) وجود دارد؟ چرا؟ به عبارت دیگر، تابعی از t است، آیا این تابع ضابطه دارد؟ این مثال، نمونه‌ای از یک تابع است که با جدول مشخص شده و ضابطه ندارد (این تابع را با مثال فتو و وزنه مقایسه کنید).
جدول ۱-۵ دمای هوای شهری را در ساعت‌های مختلف یک روز نشان می‌دهد.

الف) آیا می‌توانید بگویید دمای هوای این شهر در ساعت ۲۳ چقدر بوده است؟
ب) آیا می‌توانید رابطه‌ی بین دما و زمان را با یک فرمول بیان کنید؟ چرا؟
ج) آیا دمای این شهر در یک لحظه می‌تواند دو عدد متفاوت باشد؟

جدول ۱-۵	
t	۵ ۷ ۹ ۱۱ ۱۲ ۱۴ ۱۶ ۱۸
θ	۱۲ ۱۴ ۲۱/۵ ۲۸ ۳۰/۵ ۳۴/۵ ۳۱ ۲۷/۵

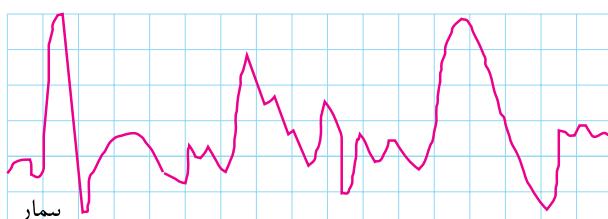
کار در کلاس ۱-۶



معلم گرامی

چنانچه به تفصیل در کتاب راهنمای معلم ریاضی (۳) پویمانی آمده است داشن آموزان را به گروه‌های چند نفری تقسیم کنید سپس با نظارت خود، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌ها را توسط گروه‌ها انجام دهید.

هر گروه با همکری اعضای خود حداقل دو تابع که با جدول قابل بیان است پیدا کند. (ممکن است گروه‌های متفاوت تابع‌های یکسان به دست آورند.) چه نتیجه‌ای از این کار گروهی عاید شد؟

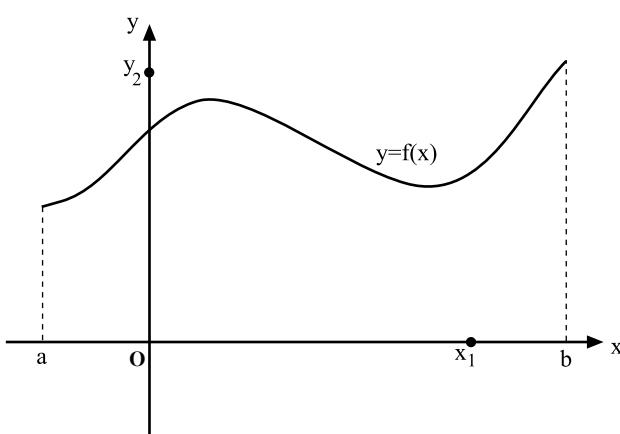


شکل ۱-۵۷

۱-۳-۳- تابع با نمودار: حتماً دیده اید که ادارات، وزارت خانه ها و نهادهای مختلف برای نشان دادن نتایج فعالیت های خود از نمودار استفاده می کنند. نمونه ای از تابع ها که با نمودار نشان داده می شوند، عبارت اند از:

نمودار مربوط به تولید گندم (برنج، سیب زمینی، نفت، گاز و ...) در مدتی معین. مثلاً، ضربان قلب تابعی از زمان است و پزشک از روی نمودار به سادگی می تواند قلب سالم و ناسالم را مشخص کند (شکل ۱-۵۷). این کار غالباً با نگاه به ضابطه ای تابع، عملی نیست!

در شکل ۱-۵۸ نمودار تابع $y = f(x)$ را ملاحظه می کنید.



شکل ۱-۵۸

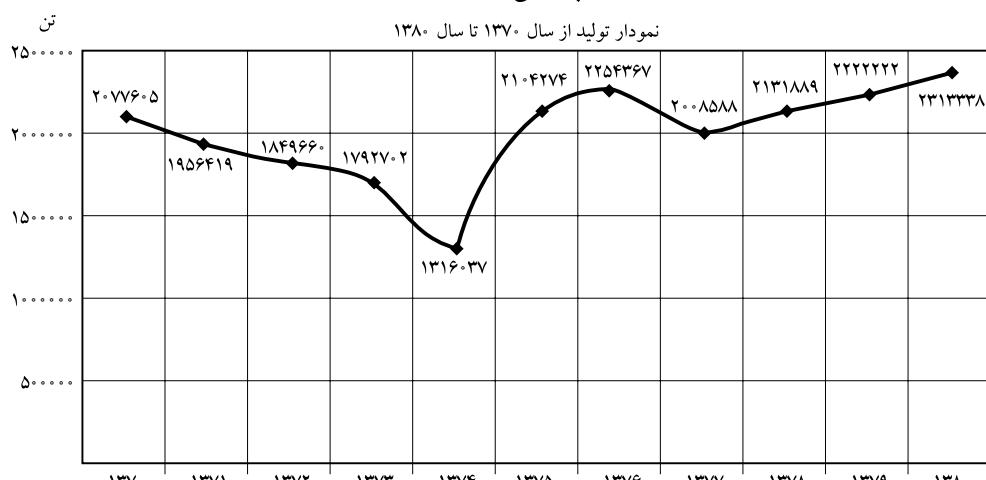
ویژگی اصلی تابع، که نمودار آن نیز باید این ویژگی را داشته باشد، آن است که به ازای هر x از دامنه تابع فقط یک y حاصل شود. یعنی، هر خط موازی محور y ها نمودار $y = f(x)$ را حداقل در یک نقطه قطع کند.

آیا در مورد نمودار شکل ۱-۵۸ این ویژگی برقرار است؟
توضیح دهید که $f(x_1)$ چگونه به دست می آید.
نحوه بدهست آوردن x_2 را، به طوری که $y_2 = f(x_2)$ شود.

شرح دهید.

کمترین و بیشترین مقدار y در چه نقاطی اتفاق می افتد؟
آیا همیشه همین طور است؟ مثال بیاورید.

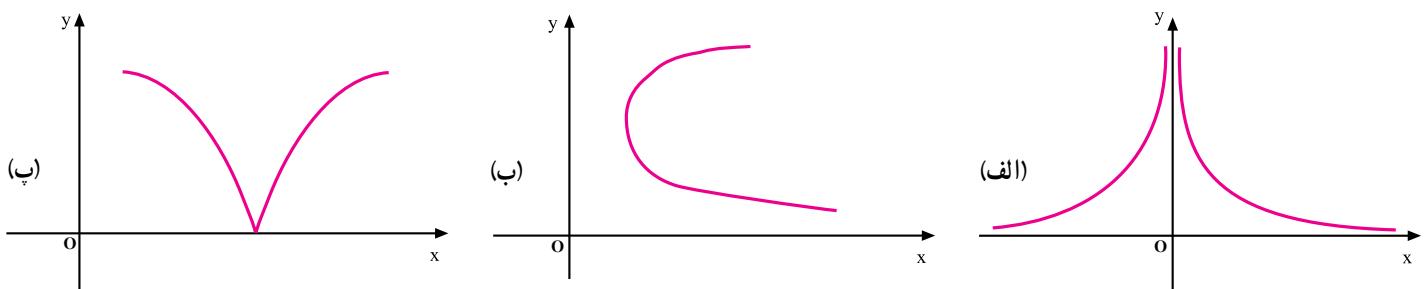
ذوب آهن اصفهان



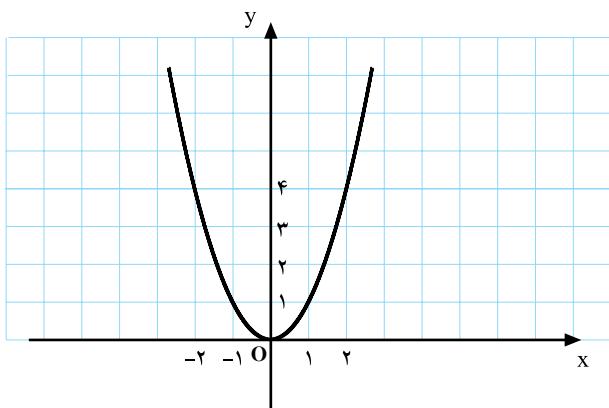
کار در کلاس ۱-۷

از نمودارهای مقابل، کدام معرف یک تابع است؟ توضیح دهید (شکل ۱-۵۹).

شما نیز چند نمودار که معرف تابع باشند رسم کنید.

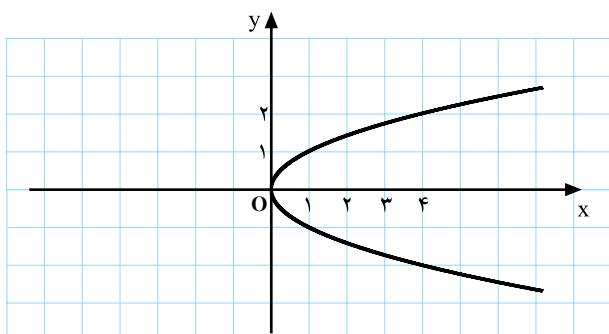


شکل ۱-۵۹

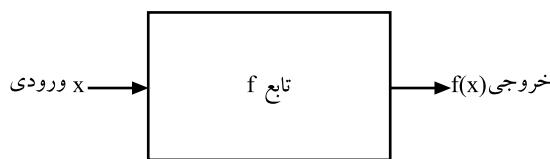


شکل ۱-۶۰—نمودار $y = x^2$. این نمودار یک تابع مشخص می‌کند.

۱-۳-۴—تعریف تابع: اگر x و y چنان به هم مربوط باشند که برای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به دست آید، y را تابع x می‌نامیم. طبق این تعریف تنها مقدار متناظر با x را با $f(x)$ نشان می‌دهند و این واستگی را چنین می‌نویسند: $y = f(x)$ (بخوانید: y مساوی اف ایکس است) و منظور آن است که « y تابعی از x است». معمولاً x را متغیر مستقل و y را تابع x می‌نامند. باید توجه داشت که $f(x)$ معمولاً یک عبارت جبری است که مقدار y را به ازای x تعیین می‌کند. $f(x)$ را فرمول یا ضابطهٔ تابع نامند. از نماد $f(x)$ معلوم می‌شود که متغیر، x و تابع، f است.



شکل ۱-۶۱—نمودار $x = y^2$. این نمودار یک تابع مشخص نمی‌کند. چرا؟

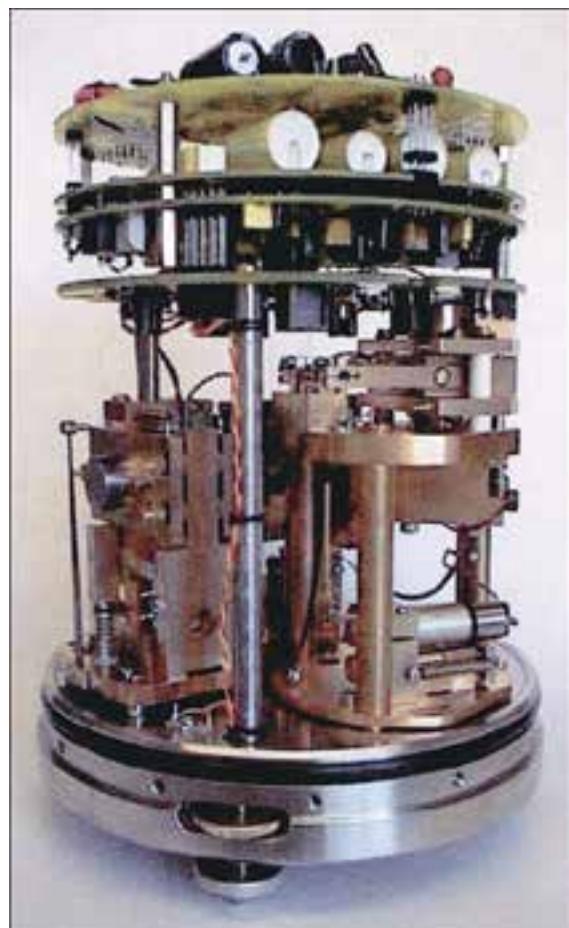


شکل ۱-۶۲

نکته‌ی ۱: در مسائل مختلف ممکن است برحسب ضرورت متغیر x یا تابع y با نمادهای دیگری بیان شود. مثلاً $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ که در آن t متغیر است و h تابع.

نکته‌ی ۲: همان‌طور که می‌دانید تابع‌های زیادی وجود دارند که دارای ضابطه نیستند. مثل تابع دمای هوا در لحظه‌های مختلف روز.

نکته‌ی ۳: همچنان می‌دانید که دستگاه‌هایی وجود دارند که با تغییر یک متغیر، نمودار تغییرات تابع را ثبت می‌کنند. برای چنین تابع‌هایی نیز ممکن است توانیم ضابطه‌ای تعیین کنیم (مثلاً دستگاه زلزله نگار) (شکل ۱-۶۳).



شکل ۱-۶۳

در تابع f مجموعه‌ی مقادیر x را
دامنه‌ی تابع f (D_f) و مجموعه‌ی مقادیر
 y را برد تابع f (R_f) می‌نامند.

در مثال فر، دامنه و برد تابع مربوط به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$D_f = \{0, 0 / 2, 0 / 4, 0 / 6, 0 / 8, 0 / 9, 1\}$$

$$R_f = \{0 / 10, 0 / 11, 0 / 12, 0 / 13, 0 / 14, 0 / 15\}$$

در حقیقت f دستگاهی است که x را به عنوان ورودی دریافت می‌کند و $f(x)$ را به عنوان خروجی تحويل می‌دهد (شکل ۱-۶۴).

به این ترتیب تابع f را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، یعنی، $(x, f(x))$ نشان داد.

در مثال فر، تابع مربوط را می‌توان با مجموعه‌ی زوج‌های مرتب زیر نمایش داد.

$$f = \{(0, 0 / 10), (0 / 2, 0 / 11), (0 / 4, 0 / 12), (0 / 6, 0 / 13), (0 / 8, 0 / 14), (0 / 9, 0 / 145), (0 / 10, 0 / 15)\}.$$

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نوشت:

$$f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\},$$

$$R_f = \{f(x) : x \in D_f\}.$$

شکل ۱-۶۴

در این کتاب با تابع‌های سروکار داریم که به ازای هر x از دامنه‌ی آن‌ها $f(x)$ عددی حقیقی است. به عبارت دیگر، $R_f \subseteq \mathbb{R}$. در این صورت تابع f را یک تابع حقیقی می‌گویند.

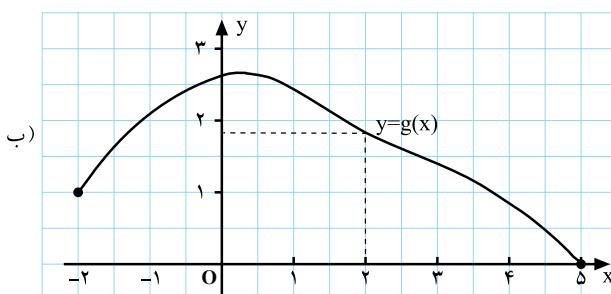
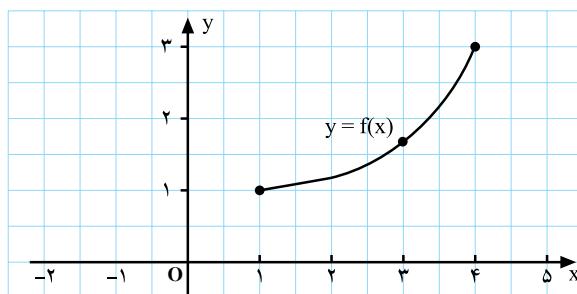
تابع‌ها را می‌توان به چهار شکل مختلف یعنی فرمول (ضابطه)، جدول، مجموعه‌ی زوج‌های مرتب و نمودار، نشان داد. در هر مورد از شکلی که مناسب‌تر است استفاده کنید و بدانید که هر چهار شکل نمایش تابع معترض است.

جدول ۶-۱

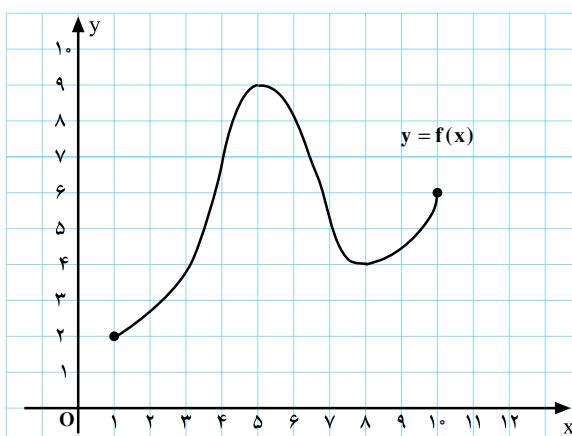
x	-1
$f(x)$	-8

$$R_f = \{-8,$$

$$f = \{(-1, -8),$$



شکل ۶۵



کار در کلاس ۸-۱

$$(1) \text{ فرض کنید، } 2 f(x) = 6x - 2 \text{ و}$$

$$\cdot D_f = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2\}$$

الف) f را با جدول مشخص کنید (جدول ۶-۱).

ب) R_f را بنویسید.

ج) f را به صورت مجموعه‌ی از زوج‌های مرتب بنویسید.

راهنمایی: $f(x)$ را به ازای x ‌های متعلق به D_f حساب

کنید.

۲) دامنه و برد تابع‌های f و g را بنویسید و مقدار تابع را

در نقطه‌ای که مشخص شده، از روی شکل ۶۵، معین کنید.

$$D_f =$$

$$R_f =$$

$$f(3) =$$

$$D_g =$$

$$R_g =$$

$$g(2) =$$

۳) تابع f با نمودار شکل ۶۶-۱ مشخص شده است.

الف) D_f و R_f را بنویسید.

ب) با توجه به نمودار (۱) و $f(5)$ را بنویسید.

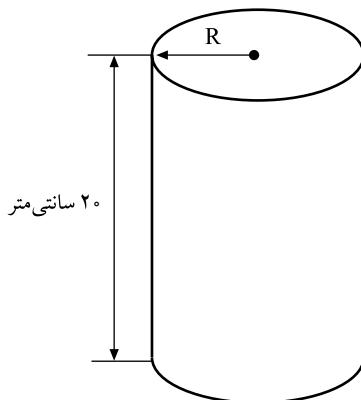
پ) اگر $f(x) = 9$ مقدار x چیست؟

ت) اگر $f(x) = 4$ مقدار x چیست؟

ث) کمترین مقدار تابع در بازه‌ی $[1, 10]$ چیست؟

ج) بیشترین مقدار تابع در بازه‌ی $[1, 10]$ چیست؟

تمرین ۱-۶



شکل ۱-۶۷

(۱) ارتفاع استوانه‌ای 20 سانتی‌متر است ($h = 20$ cm)

(شکل ۱-۶۷). می‌دانید که حجم یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعده‌ی R از رابطه‌ی $V = \pi R^2 h$ حساب می‌شود. اگر R بین 8 تا 12 سانتی‌متر تغییر کند حجم این استوانه بین چه مقادیری تغییر می‌کند؟

(۲) فرض کنید $h(x) = x^2$ و $t(x) = x$ و دامنه‌ی هر دو

تابع بازه‌ی $[1, 9]$ باشد.

(الف) نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات

رسم کنید؛ (شکل ۱-۶۸)؛

(ب) برد تابع h را تعیین کنید؛

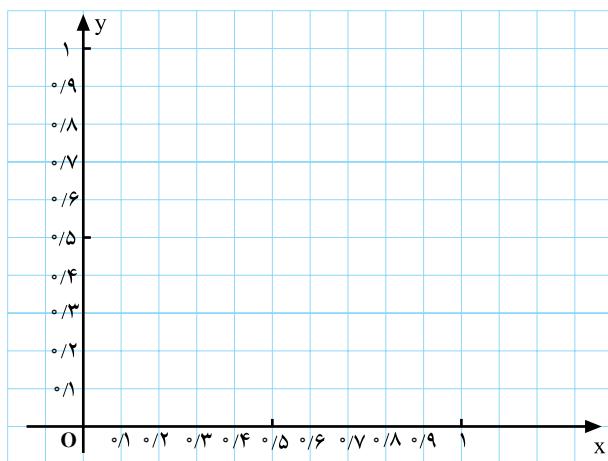
$$R_h =$$

(پ) برد تابع t چیست؟

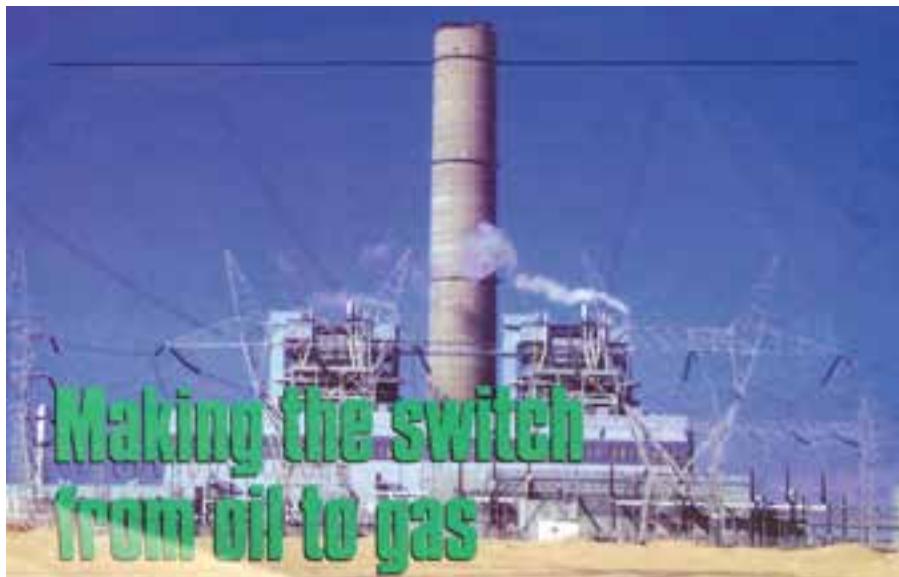
$$R_t =$$

(ت) آیا دو تابع h و t برابرند؟ چرا؟

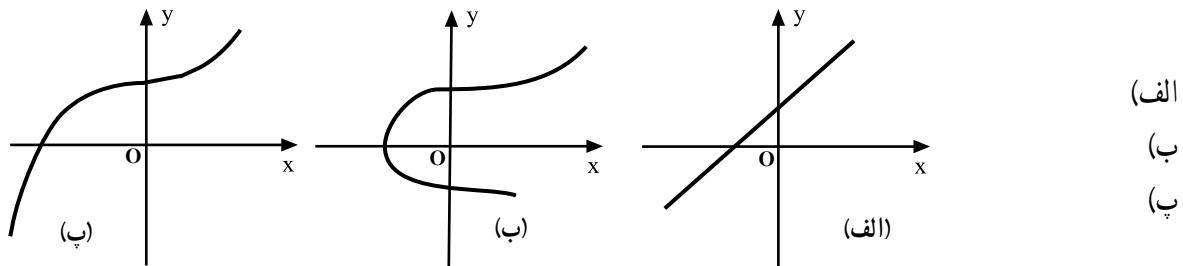
تساوی دو تابع: دو تابع وقتی با هم برابرند که دامنه‌ی یکسان داشته باشند و به ازای هر عضو از دامنه مقدار دو تابع برابر باشند.



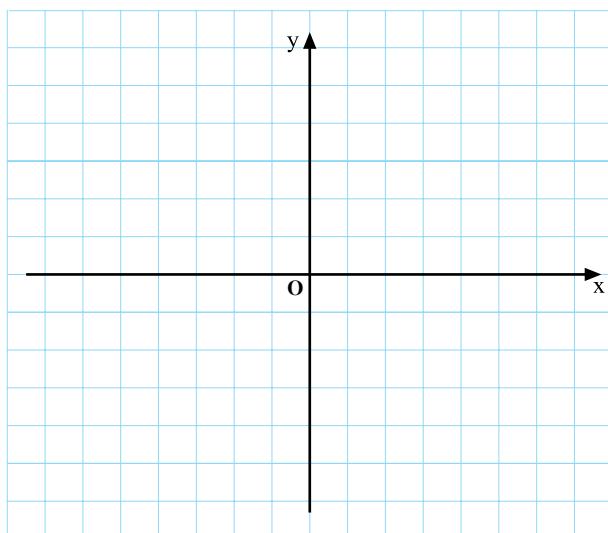
شکل ۱-۶۸



۳) کدام نمودار مربوط به یک تابع است؟ توضیح دهید.
 (شکل ۱-۶۹).



شکل ۱-۶۹



شکل ۱-۷۰

جدول ۱-۷

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)						

جدول ۱-۸

x	f(x)
-1	
0	
1	
2	
3	

۴) نشان دهید که هیچ یک از رابطه های زیر، بین x و y، یک تابع مشخص نمی کند.

(الف) $x + y^2 = 4$

(ب) $|y| = x + 1$

(پ) $y^2 = x$

۵) تابع $y = x^2 - 1$ مفروض است.

(الف) نمودار این تابع را رسم کنید (شکل ۱-۷۰).

(ب) آیا نقطه $A\left(\frac{3}{8}\right)$ روی نمودار این تابع است؟

(پ) اگر نقطه $B\left(\frac{1}{b}\right)$ روی نمودار این تابع باشد b چیست؟

(ت) عدد a را چنان تعیین کنید که نقطه $C\left(-\frac{1}{a}\right)$ روی

نمودار تابع فوق باشد.

(ث) آیا نقطه $D\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$ روی نمودار این تابع قرار دارد؟

(۶) فرض کنید $f(x) = x^2 - 2x$. جدول ۱-۷ را کامل کنید و بعد نمودار $y = f(x)$ را در دفتر خود رسم کنید.

(۷) تابع f به صورت زیر تعریف شده است. جدول ۱-۸ را کامل و سپس نمودار تابع را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

۸) در زیر چند تابع با ضابطه داده شده‌اند، مقدار آن‌ها را در نقاط مشخص شده حساب کنید.

$$f(\circ) = , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$g(-1) = , \quad g(1) =$$

$$h(-2) = , \quad h(\circ / 5) =$$

(الف) $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$, $x = \circ, \frac{\pi}{2}$

(ب) $g(x) = 3x^2 - x$, $x = -1, 1$

(پ) $h(x) = \frac{x}{x+1}$, $x = -2, \circ / 5$

$$f(3) =$$

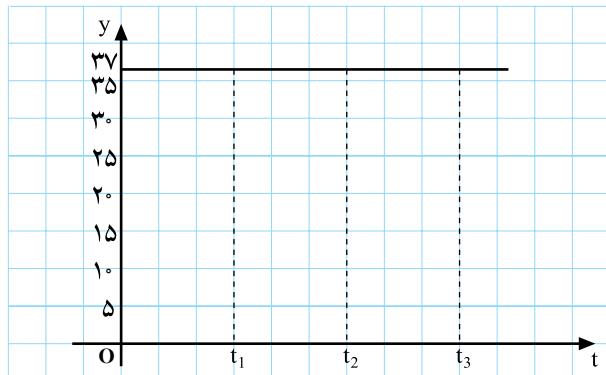
$$f(3+h) =$$

$$f(3+h) - f(3) =$$

۹) تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 - x$ تعریف شده است.

مقادیر زیر را حساب کنید. (عددی حقیقی است).

$$f(3), f(3+h), f(3+h) - f(3)$$



شکل ۱_۷۱

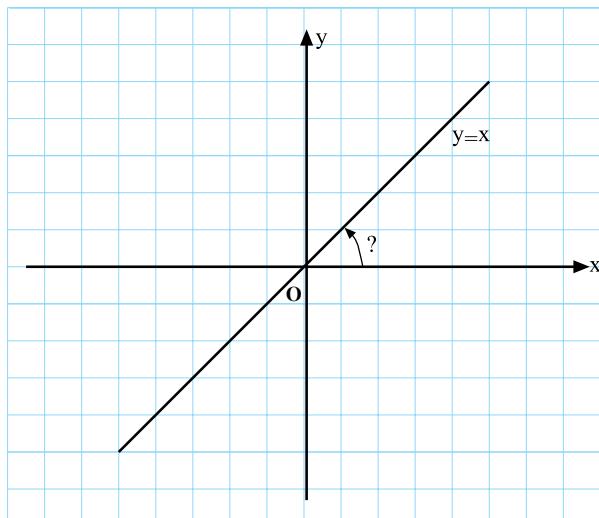
۱_۳_۵ چند تابع ویژه

— تابع ثابت: دمای بدن یک انسان سالم همواره چند درجه سلسیوس (سانتی گراد) است؛ اگر $f(t)$ دمای بدن این شخص در زمان t باشد داریم :

$$f(t) = 37,$$

این تابع که به ازای هر t دارای مقدار ثابت ۳۷ است تابع ثابت نامیده می‌شود. نمودار این تابع را در شکل ۱_۷۱ ملاحظه می‌کنید.

شما نیز چند تابع ثابت مثال بزنید و نمودار آن‌ها را رسم کنید.



شکل ۱_۷۲

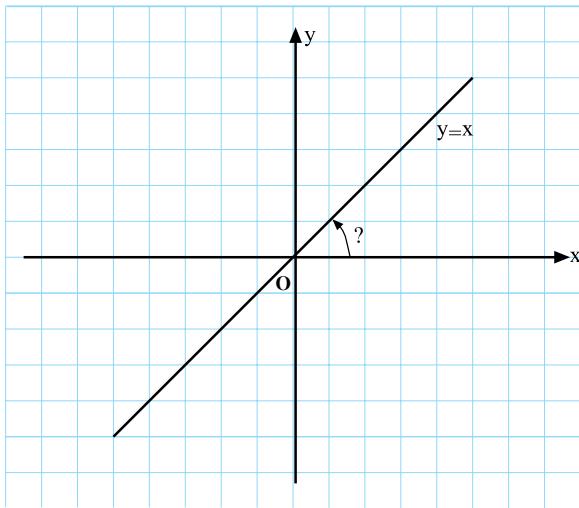
اگر به ازای هر x از دامنهٔ تابع f ، $c \in \mathbb{R}$ را تابع ثابت گویند.

— تابع همانی: یک شیء در فاصلهٔ x جلوی آینه‌ای تخت قرار دارد. فاصلهٔ تصویر این شیء تا آینهٔ چقدر است؟ (شکل ۱_۷۲). اگر $f(x)$ فاصلهٔ شیء تا آینهٔ باشد.

$$f(x) = x$$

این نمونه‌ای از یک تابع همانی است.

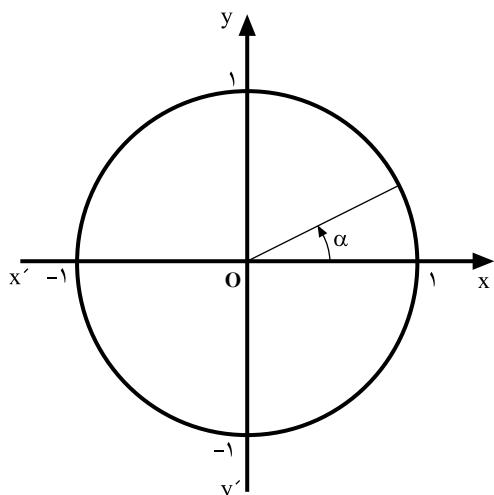
اگر به ازای هر x از دامنهٔ f ، $f(x) = x$ را تابع همانی گویند.



شکل ۱-۷۳

نمودار تابع همانی را در شکل ۱-۷۳ می‌بینید. زاویه‌ی نمودار تابع همانی با محور ox چند درجه است؟

در حالت کلی، نمودار تابع همانی نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات است.



شکل ۱-۷۴

در شکل ۱-۷۴ دایره‌ی مثلثاتی رسم شده و زاویه‌ی α مشخص شده است.

(الف) این دایره‌ی مثلثاتی چه ویژگی‌هایی دارد؟

(ب) نقطه‌های مربوط به $\pi + \alpha$ و $2\pi + \alpha$ را روی این دایره مشخص کنید.

(پ) مقدار $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را به ترتیب، روی محور y و محور x مشخص کنید.

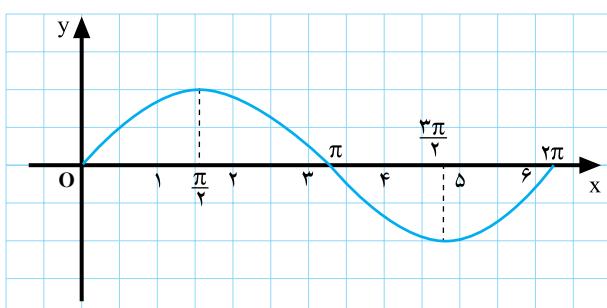
(ت) وقتی α از 0° تا $\frac{\pi}{2}$ (یعنی 90°) تغییر می‌کند چگونه تغییر می‌کند؟

(ث) وقتی α از 0° تا π (یعنی 180°) تغییر می‌کند $\sin \alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

(ج) وقتی α از 0° تا 180° تغییر می‌کند $\cos \alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

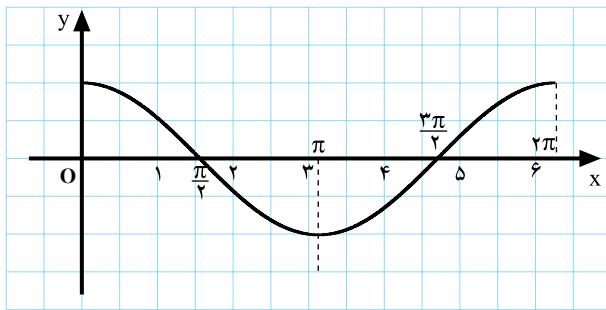
(ج) وقتی α از 0° تا $\frac{3\pi}{2}$ (یعنی 270°) تغییر می‌کند $\sin \alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

(ح) با توجه به آنچه در قسمت‌های قبل ملاحظه شد، نمودار تابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ رسم شده‌اند (شکل‌های ۱-۷۵ و ۱-۷۶).

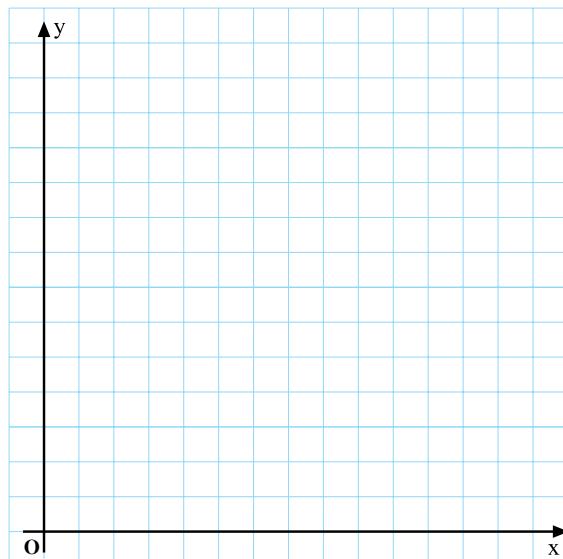


شکل ۱-۷۵ – نمودار تابع $y = \sin x$

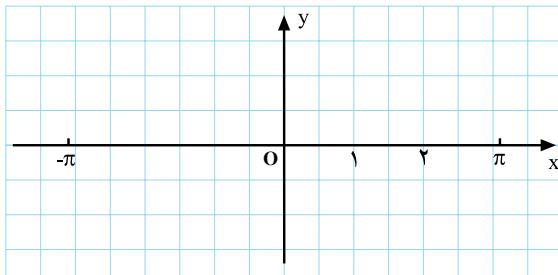
(خ) با توجه به این که برای هر α ، $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$ نمودار $y = \sin x$ را در بازه‌ی $[2\pi, 4\pi]$ رسم کنید.



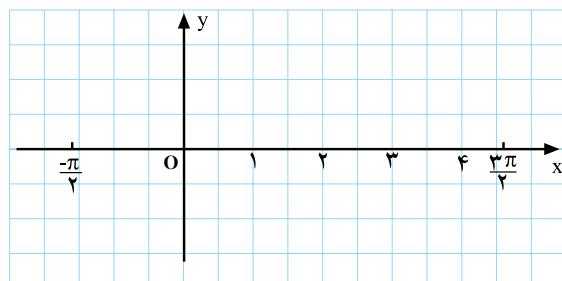
شکل ۱-۷۶—نمودار تابع $y = \cos x$



شکل ۱-۷۷



شکل ۱-۷۸



شکل ۱-۷۹

د) با توجه به این که برای هر α , $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$, α را در بازه‌ی $[2\pi, 4\pi]$ رسم کنید.

۱-۷۶

۱) تابع $y = f(x)$ چنین تعریف شده است :

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 5 \\ 2x, & 5 < x \leq 7 \\ \frac{3}{2}x, & 7 < x \leq 10 \end{cases}$$

الف) دامنه‌ی این تابع را بنویسید :

ب) نمودار این تابع را رسم کنید (شکل ۱-۷۷).

۲) نمودار تابع $y = \sin x$ را در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ رسم کنید (شکل ۱-۷۸).

۳) نمودار تابع $y = \cos x$ را در بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ رسم کنید (شکل ۱-۷۹).

آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱- تابع f با ضابطه‌ی 1 $D_f = \{0, 1, 5\}$ و $f(x) = 2x - 1$ است.

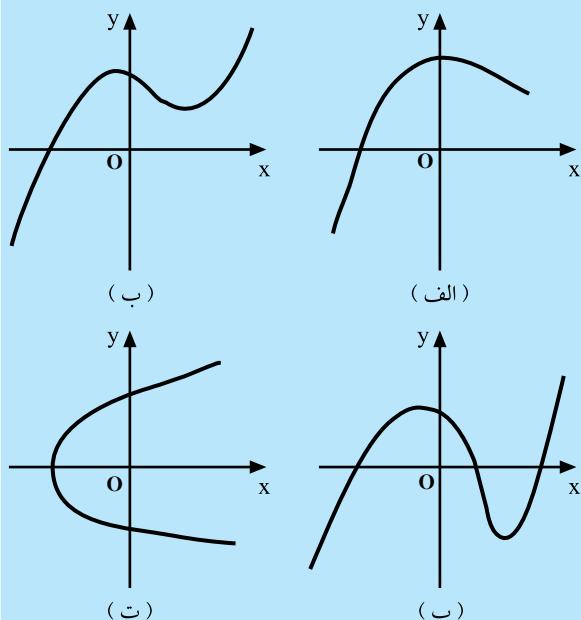
(الف) این تابع را با مجموعه زوج‌های مرتب نمایش دهید.

(ب) این تابع را با جدول نمایش دهید.

(پ) نمودار این تابع را تعیین کنید.

۲- تابع مربوط به دمای محل سکونت خود را در ساعت‌های $6, 10, 14, 18$ و 22 مشخص کنید. آیا می‌توانید برای این تابع ضابطه به دست آورید؟

۳- کدام یک از نمودارهای شکل ۱-۸۰ یک تابع را مشخص می‌کند؟



شکل ۱-۸۰