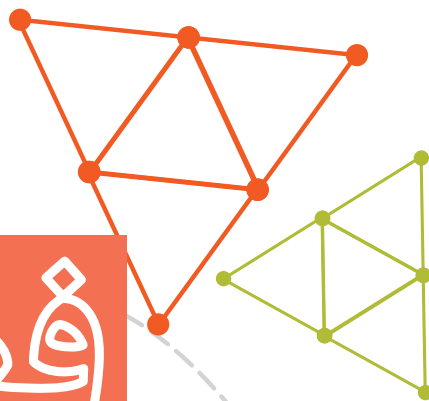


فصل ۱

ایستایی



## هدف‌های رفتاری فصل اول :

آیا می‌توانید نیروهای وارد شده به یک جسم را تجزیه و تحلیل کنید؟  
 آیا انواع تکیه‌گاه‌ها را می‌شناسید و عکس‌العمل آنها را می‌دانید؟  
 آیا می‌توانید نیروهایی که برای حفظ حالت تعادل به تکیه‌گاه‌های جسم وارد می‌شوند را محاسبه کنید؟

پس از پایان این درس از هنرجو انتظار می‌رود که :

- مفاهیم اولیه فیزیک و مکانیک را بیان کند.
- نیرو و قوانین مربوطه در سازه را توضیح دهد.
- مؤلفه نیرو و برآیند نیروها را محاسبه کند.
- گشتاور نیرو را محاسبه کند.
- قوانین تعادل ایستایی را شرح دهد.
- نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها را شرح دهد.
- نمودار جسم آزاد را ترسیم کند.
- معادلات تعادل استاتیکی را بر اساس نمودار جسم آزاد بیان کند.
- مجهول‌ها و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را محاسبه نماید.
- انواع سازه‌های فلزی را تمیز داده و کاربرد آن را شرح دهد.

مدت زمان آموزش :

● ۱۴ ساعت

## مقدمه

### مکانیک

#### بخشی از

دانش فیزیک است.

سرآغاز این رشته در تاریخ با

شروع مهندسی همزمان است و همچنان هیچ

رشته‌ای از علوم به اندازه مکانیک در محاسبات مهندسی

نقش ندارد. مکانیک را علمی تعریف کرده‌اند که شرایط سکون یا

حرکت اجسام تحت تأثیر نیروها را پیش‌بینی و توصیف می‌کند. علم مکانیک به دو

بخش ایستایی و پویایی قابل تقسیم است. ایستایی به بررسی اجسام در حالت تعادل می‌پردازد و

پویایی به بررسی اجسام در حرکت شتاب دار مربوط است. مباحث این کتاب در مورد «ایستایی» است.

## ۱- ایستایی

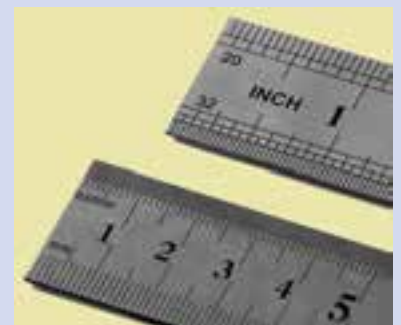
به پیرامون خود نگاه کنید درختان، ساختمان‌ها، تجهیزات و حتی قاب عکس روی دیوار همه درحالی پایدار قرار دارند و تا وقتی که تعادل خود را حفظ کنند پایدار باقی می‌مانند. ساختمانی که در مجاورتش خاکبرداری غیراصولی انجام شده باشد ممکن است تعادل خود را از دست بدهد و فرو بریزد. ایستایی به بررسی شرایط تعادل و نیروها در اجسام می‌پردازد.

### ۱-۱- مفاهیم پایه

پیش از این با بسیاری از مفاهیم علم مکانیک در درس‌های علوم، فیزیک و محاسبات فنی آشنا شده‌اید. از آنجا که این مفاهیم به طور مرتب، در این کتاب استفاده خواهند شد، درک درستی از آنها لازم است. در اینجا برای یادآوری به تعریف چند مفهوم پایه اشاره می‌شود:

● **طول:** طول اندازه یک خط در راستای مستقیم یا منحنی است. برای نمونه قطر یک دایره طول خط مستقیمی است که دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند یا محیط دایره طول پیرامون آن است. یکای اندازه‌گیری طول در دستگاه بین‌المللی یکاها متر (m) است. البته برای اندازه‌گیری طول از یکاهای دیگری مانند میلی‌متر (mm)، سانتی‌متر (cm) و اینچ (in) نیز استفاده می‌شود.

● **سطح:** سطح اندازه دو بعدی یک شکل هندسی یا رویه یک جسم است. شکل هندسی ممکن است تخت یا خمیده باشد. یکای اندازه‌گیری سطح در SI متر مربع ( $m^2$ ) است. برای اندازه‌گیری سطوح بزرگتر از یکایی مانند کیلومتر مربع ( $Km^2$ ) استفاده می‌شود و در سطوح کوچکتر از یکایی مانند سانتی‌متر مربع ( $cm^2$ ) استفاده می‌شود.



## بررسی کنید



ارتباط مفاهیم مطرح شده در این بخش با تصویر بالا را در گروه خود بررسی کنید



وزن برفی که بر روی یک ساختمان نشسته، باری است که به سقف اعمال می‌شود



جسم صلب در مقابل اعمال نیرو، تغییر شکل و اندازه نمی‌دهد

● **حجم:** اندازه سه بعدی یا فضایی که توسط یک ماده اشغال شده است حجم نامیده می‌شود. برای نمونه مقدار آبی که در یک مخزن ذخیره وجود دارد. یکای اندازه‌گیری حجم در دستگاه SI متر مکعب ( $m^3$ ) است. برای اندازه‌گیری حجم از یکاهای دیگری مانند ( $cm^3$ ) و ( $mm^3$ ) استفاده می‌شود.

● **نیرو:** به هرگونه عملی که بر روی جسمی انجام شود و در آن تمایل به جابه‌جایی یا تغییر سرعت حرکت یا تغییر شکل و اندازه را سبب شود، نیرو می‌گویند. به نیرویی که از اثر گرانش زمین بر جرم مواد ایجاد می‌شود وزن می‌گویند. وزن اجسام را با حرف W نشان می‌دهند. نیرو معمولاً به صورت کششی یا فشاری است مانند فشار دادن یک جسم با دست یا کشیدن آن با طناب. پرکاربردترین یکاهای اندازه‌گیری نیرو در SI نیوتن (N) و کیلوگرم نیرو (kgf) هستند.

● **فشار:** نیروی خارجی وارد شده بر واحد سطح، فشار نامیده می‌شود، مانند فشار آب که به دیواره سدها وارد می‌شود. یکای اندازه‌گیری فشار در دستگاه SI پاسکال (Pa) است.

● **جرم:** به مقدار ماده موجود در یک جسم، جرم می‌گویند. یکای اندازه‌گیری جرم در دستگاه SI کیلوگرم (kg) است.

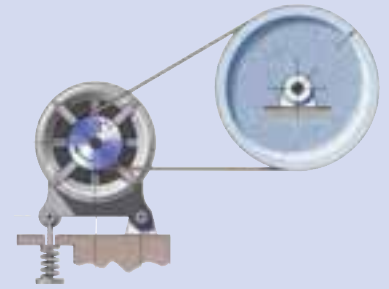
● **چگالی:** چگالی جرم واحد حجم ماده است. برای نمونه یک سانتی‌متر مکعب آهن  $7/8$  گرم وزن دارد. می‌گوییم چگالی آهن  $7/8 \frac{g}{cm^3}$  است. یکای اندازه‌گیری چگالی در دستگاه SI، کیلوگرم بر متر مکعب  $\frac{kg}{m^3}$  است.

● **جسم صلب:** وقتی در مقابل اعمال نیرو، اندازه و شکل جسم تغییر نکند، می‌گوییم جسم صلب است.

● **گشتاور:** به اثر چرخشی نیرو، حول یک نقطه معین گشتاور می‌گویند. عمل یک تسمه بر روی پولی که باعث چرخیدن آن می‌شود گشتاور است. همچنین اگر یک گچ تحریر را از دو انتها بگیرید و دستانتان را در دو جهت مخالف بپیچانید، گشتاوری به وجود می‌آید که باعث چرخیدن و احتمالاً شکستن گچ می‌شود. یکای گشتاور در دستگاه SI، نیوتن متر (N.m) می‌باشد.

● **کار:** اگر نیرویی بر جسمی وارد شود و آن را به حرکت درآورد، کار انجام شده است. وقتی کار انجام می‌شود، انرژی از نوعی به نوع دیگر تبدیل می‌شود.

● **توان:** انرژی تبدیل شده یا کار انجام شده در واحد زمان، توان نامیده می‌شود. یکای اندازه‌گیری توان، وات (W) می‌باشد. برای نمونه مقدار مشخصی انرژی برای بالابردن یک آسانسور لازم است. یک الکتروموتور با توان ۵kW می‌تواند این کار را انجام دهد اما یک الکتروموتور ۲۰kW این کار را چهار بار سریع‌تر انجام می‌دهد.



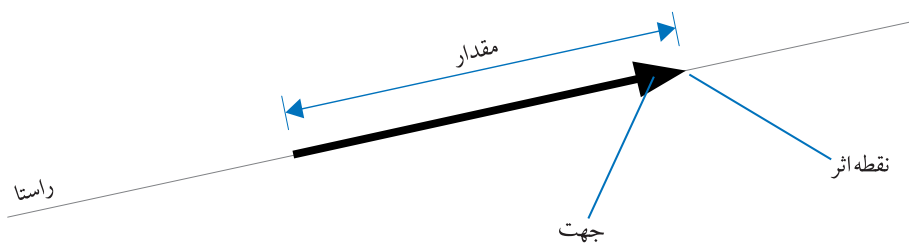
به اثر چرخشی نیرو، حول یک نقطه معین گشتاور می‌گویند



اگر نیرویی بر جسمی وارد شود و آن را به حرکت درآورد می‌گوییم کار انجام شده است

## ۲-۱- ویژگی‌های نیرو

می‌دانیم که نیرو یک کمیت برداری است. کمیت‌های برداری دارای سه ویژگی مقدار، راستا و جهت هستند. برای معرفی کامل یک نیرو، علاوه بر سه مورد فوق، نقطه اثر نیرو نیز باید مشخص شود.



شکل ۱-۱

راستا، خط راست و نامحدودی است که نیرو در امتداد آن وارد می‌شود

## کمیت‌های برداری و عددی

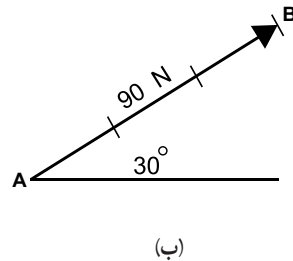
کمیت‌هایی که فقط با مقدار مشخص می‌شوند، عددی (نرده‌ای) هستند برای مثال ۱ ریال، ۵ متر، ۱۸ درجه سلیوس و ۶ وات کمیت‌های عددی هستند کمیت‌های برداری علاوه بر داشتن مقدار، راستا و جهت نیز دارند برای مثال: سرعت (مقدار  $95 \text{ km/h}$ ؛ راستا: اتوبان شیراز - اصفهان، جهت از شیراز به طرف اصفهان)

نیرو نیز یک کمیت برداری می‌باشد یک کمیت برداری با خطی که یک پیکان جهت آن را مشخص می‌کند نمایش داده می‌شود طول خط (که با مقیاس مشخص ترسیم شده است) مقدار کمیت را مشخص می‌کند خط و پیکان روی آن راستای کمیت را مشخص می‌کند

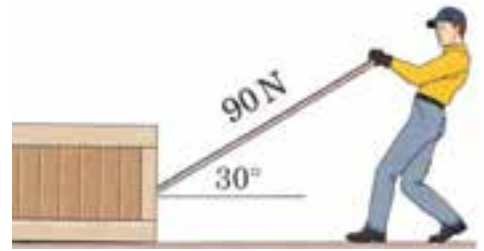
## اهمیت یکاها

در بررسی کمیت‌ها، علاوه بر دقت در مورد مقدار آنها باید به یکای کمیت نیز توجه شود برای مثال اگر طول راهی با عدد ۳ بیان شود، بی‌معنی است! آیا منظور ۳ سانتی‌متر، ۳ متر و یا ۳ کیلومتر بوده است؟ بنابراین اندازه یک کمیت باید شامل مقدار و یکا باشد

در شکل ۱-۲ الف فردی نمایش داده شده که تلاش می‌کند با ریسمان، جعبه‌ای را روی زمین بکشد. در شکل ۱-۲ ب راستای نیرو با خط  $AB$ ، جهت آن با پیکان، مقدار نیرو با طول بردار  $AB$  (متناسب با اندازه نیرو) مشخص شده‌اند.



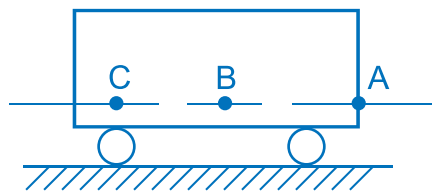
(ب)



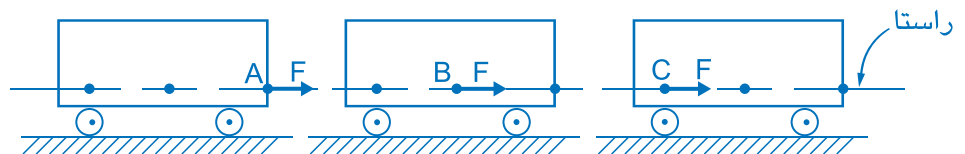
(الف)

شکل ۱-۲

**۱-۲-۱ اصل انتقال پذیری نیرو:** بنابراین انتقال پذیری نیرو، می‌توان نیروی وارد بر نقطه معلومی از یک جسم صلب را به وسیله نیروی دیگری که با نیروی اول از لحاظ مقدار، جهت و راستا برابر بوده ولی نقطه اثر آن متفاوت است جایگزین کرد. جسم نشان داده شده در شکل ۱-۳ را در نظر بگیرید. این جسم با نیروی افقی  $F$  کشیده می‌شود. نیرو به هر یک از نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  که وارد شود تأثیر یکسانی دارد. بنابراین ملاحظه می‌شود که جابجایی نیرو با حفظ راستا و جهت نیرو تأثیری در وضعیت تعادل یا حرکت جسم بوجود نمی‌آورد، به شکل ۱-۴ توجه کنید.



شکل ۱-۳ نیرو می‌تواند از سه نقطه به ارا به اعمال شود.

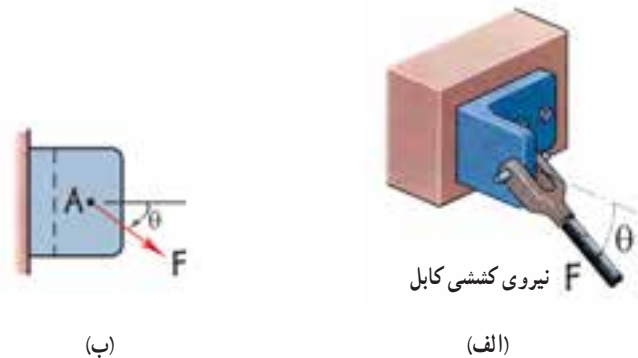


شکل ۱-۴ انتقال پذیری نیرو با حفظ راستا و جهت

### ۳-۱- مؤلفه‌های نیرو

هر نیرو را می‌توان به دو مؤلفه تجزیه نمود به نحوی که تأثیر همزمان این مؤلفه‌ها، اثر خود نیرو را داشته باشد. به طور معمول، نیرو را در دو راستای عمود بر هم  $x$  و  $y$  تجزیه می‌کنند، مؤلفه افقی را با اندیس  $x$  و مؤلفه عمودی را با اندیس  $y$  نمایش می‌دهند.

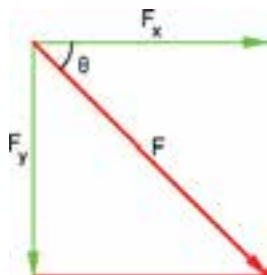
برای به دست آوردن مؤلفه‌های نیرو دو روش ترسیمی و محاسباتی بیان می‌شود. در شکل ۱-۵ الف کابل با نیروی  $F$  کشیده می‌شود. برای تعیین مؤلفه‌های نیروی  $F$  در نمای نشان داده شده در شکل ۱-۵ ب به هر دو روش به این ترتیب عمل می‌شود.



شکل ۱-۵

**الف) راه‌حل ترسیمی:** در این روش با انتخاب مقیاس مناسب، نیروی  $F$  را در راستای اصلی ترسیم نموده و با استفاده از خطوط عمود بر محورها، مؤلفه‌های افقی و عمودی نیرو را ترسیم می‌نماییم. با اندازه‌گیری طول آنها و با در نظر گرفتن مقیاس به کار رفته در ترسیم، اندازه مؤلفه‌های نیرو به دست می‌آید. در حل ترسیمی تمرین نمونه ۱-۱ مراحل محاسبه مؤلفه‌های نیرو با روش ترسیمی نشان داده شده است.

**ب) راه‌حل محاسباتی:** همانگونه که در گذشته آموخته‌اید اندازه مؤلفه‌های عمودی نیروی  $F$  که با محور  $x$  زاویه  $\theta$  را می‌سازد به کمک روابط زیر محاسبه می‌شود.



شکل ۱-۶

$$F_x = F \times \cos \theta \quad \text{رابطه ۱-۱}$$

$$F_y = F \times \sin \theta \quad \text{رابطه ۱-۲}$$

توجه داشته باشید که در روابط فوق زاویه نیرو با محور  $x$ ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این کتاب از دستگاه بین‌المللی یکاها (SI) استفاده شده است در این دستگاه یکاها عبارتند از:

نشان	یکا	کمیت
m	متر	طول
kg	کیلوگرم	جرم
s	ثانیه	زمان
N	نیوتن	نیرو

پیشوندها در سیستم SI عبارتند از:

نشان	پیشوند	ضریب
G	گیگا	$10^9$
M	مگا	$10^6$
k	کیلو	$10^3$
m	میلی	$10^{-3}$
$\mu$	میکرو	$10^{-6}$
n	نانو	$10^{-9}$

نشان یکاها همواره با حروف کوچک انگلیسی نشان داده می‌شوند، مگر آنکه یکا از نام دانشمندی گرفته شده باشد مانند: N (نیوتن) و Pa (پاسکال) و یا پیش از آن حروف کوچک، برای یکای دیگری استفاده شده باشد برای نمونه  $g$  نشانه گرم است پس گیگا را با G نشان می‌دهند



**تمرین نمونه ۱-۱:** در یک کامیون حمل بار، جک هیدرولیکی مطابق شکل زیر نیرویی برابر  $40\text{ kN}$  در امتداد خود به باری که بلند می‌کند اعمال می‌نماید. مؤلفه‌های افقی  $F_x$  و عمودی  $F_y$  این نیرو را زمانی که زاویه  $60^\circ$  است، محاسبه کنید.

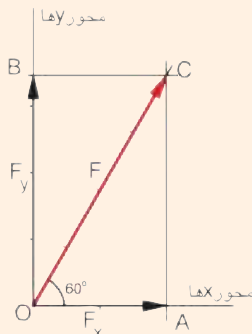


شکل ۱-۷

**راه حل روش ترسیم:** در این روش ابتدا مقیاس مناسب

را انتخاب می‌کنیم. با توجه به بزرگی نیرو مقیاس  $1\text{ mm} : 1\text{ kN}$  مناسب به نظر می‌رسد. بنابراین  $40\text{ mm} : 40\text{ kN}$  می‌باشد. حال راستای  $60^\circ$  را ترسیم نموده و سپس بر روی آن نیروی  $F$  را به اندازه  $40\text{ mm}$  جدا می‌کنیم. در محل تقاطع خطوط عمود اخراج شده از انتهای نیرو و محورهای مختصات  $x$  و  $y$ ، انتهای مؤلفه‌های  $F_x$  و  $F_y$  به دست می‌آیند. با اندازه‌گیری مقدار آنها و با در نظر گرفتن مقیاس فرض شده، بزرگی نیروها به دست می‌آید:

مقیاس ترسیم  $\frac{10\text{ kN}}{10\text{ mm}}$



شکل ۱-۸

$$\overline{OA} = 20\text{ mm} \xrightarrow{1\text{ kN}:1\text{ mm}} \boxed{F_x = 20\text{ kN}}$$

$$\overline{OB} = 34/5\text{ mm} \xrightarrow{1\text{ kN}:1\text{ mm}} \boxed{F_y = 34/5\text{ kN}}$$

**راه حل روش محاسباتی:** می‌دانیم زمانی که  $\theta$  زاویه بین نیرو و راستای افق

باشد؛ برای محاسبه مؤلفه‌های عمودی و افقی نیرو داریم:

$$F_x = F \times \cos \theta$$

$$F_y = F \times \sin \theta$$

$$F_x = 40 \times \cos 60^\circ$$

$$F_y = 40 \times \sin 60^\circ$$

داریم  $60^\circ$  پس:

$$F_x = 40 \times \frac{1}{2}$$

$$F_y = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{F_x = 20\text{ kN}}$$

$$\boxed{F_y = 34/6\text{ kN}}$$

با مقایسه پاسخ‌های دو راه حل فوق مشاهده می‌شود که از یک سو راه حل محاسباتی دقیق‌تر است و از سوی دیگر میزان دقت راه حل ترسیمی، به اندازه دقت ترسیم و مقیاس استفاده شده است.

## نکات محاسباتی

### دقت عددی

داده‌هایی که در محاسبات فنی استفاده می‌شوند از نظر دقت بسیار متفاوت هستند، لذا در حل مسائل فنی باید دقت مورد نیاز برای حل مسائل تعیین شود. امروزه با استفاده هرچه بیشتر از ماشین حساب برای انجام محاسبات ریاضی، بسیار اتفاق می‌افتد که بعد از مجموعه‌ای از ضرب و تقسیم‌ها، پاسخ مسأله بسیار دقیق‌تر از اطلاعات اولیه ارائه شده برای حل مسأله است.

برای نمونه اگر هدف تقسیم یک لوله ۱۴ متری به سه قسمت باشد، ماشین حساب عدد  $4/666667$  را نشان می‌دهد. جواب مسأله درحالی با **دقت میکرومتر** بیان شده است که اندازه اولیه لوله با **دقت متر** ارائه شده است. از سوی دیگر توجه داشته باشید که «اعشار» به تنهایی نشان دهنده دقت عدد نیست. به عنوان مثال تمام اعداد زیر با تغییر یکا اندازه‌گیری بیان‌گر یک اندازه هستند:  $3075$ ،  $307/5$ ،  $0/3075$ ،  $0/003075$ ،  $3/705 \times 10^6$

یکی از راه‌های پرهیز از بیان پاسخ‌ها با دقت بیش از نیاز، بهره‌گیری از **ارقام معنی‌دار** است. در مثال فوق چهار رقم ۳، ۰، ۷ و ۵ معنی‌دار هستند و صفرهای پیش از اولین رقم و بعد از اولین رقم، با تغییر یکا، ثابت نیستند. بنابراین دقت عدد فوق در تمامی پنج صورت گفته شده تا چهار رقم معنی‌دار است. در مثال تقسیم لوله اطلاع اولیه مسأله (عدد ۱۴)، دو رقم معنی‌دار دارد، بنابراین پاسخ  $4/7$  از دقت کافی برخوردار است. در اغلب مسائل فنی به دقتی بیشتر از **سه رقم معنی‌دار** نیاز نیست.

### گرد کردن عددها

برای تبدیل عددی با دقت صدم (تا دو رقم اعشار) به عددی با دقت دهم (تا یک رقم اعشار) چه باید کرد؟ در اینجا روش گرد کردن اعداد یادآوری می‌شود:

الف) اگر رقمی که باید حذف شود، برابر ۵ یا بزرگ‌تر از آن باشد، یک واحد به رقم پیش از آن اضافه می‌شود. برای نمونه  $36/48$  می‌شود  $36/5$

ب) اگر رقمی که باید حذف شود، کوچکتر از ۵ باشد، بدون تغییری در رقم پیش از آن، حذف می‌شود. برای نمونه  $36/42$  می‌شود  $36/4$

## ۱-۴- برآیند نیروها

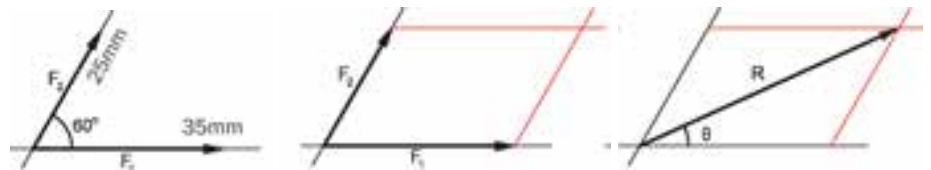
گفتیم که نیروی وارد بر یک جسم، تمایل به حرکت در راستای نیرو را به وجود می‌آورد. حال اگر به جسمی در جهت‌های مختلف نیرو وارد شود، جسم در کدام جهت تمایل به حرکت خواهد داشت؟



شکل ۱-۹

برای به دست آوردن مجموع تأثیر نیروهای مختلف بر یک جسم، برآیند نیروها را محاسبه می‌کنند. برآیند نیروها را با  $R$  یا  $\Sigma F$  نمایش می‌دهند.

**الف) روش ترسیمی (متوازی الاضلاع):** برای محاسبه برآیند دو نیرو می‌توان از روش متوازی الاضلاع استفاده کرد. در این روش ترسیمی، ابتدا بردارهای نیرو متناسب با بزرگی آنها و در راستای معین رسم می‌شوند، سپس با استفاده از دو خط کمکی، متوازی الاضلاع بر روی دو نیرو ساخته می‌شود. قطری در متوازی الاضلاع که از محل تلاقی دو نیرو می‌گذرد، بزرگی و جهت برآیند دو بردار را مشخص می‌کند. در شکل ۱-۱۰ مراحل مختلف ترسیم برآیند ( $R$ ) دو بردار  $F_1 = 25N$ ،  $F_2 = 35N$  با زاویه  $60^\circ$  نشان داده شده است.



(۱) ترسیم نیروها در راستای

صحیح و با مقیاس مناسب ۳۵mm

(۲) ترسیم متوازی الاضلاع با

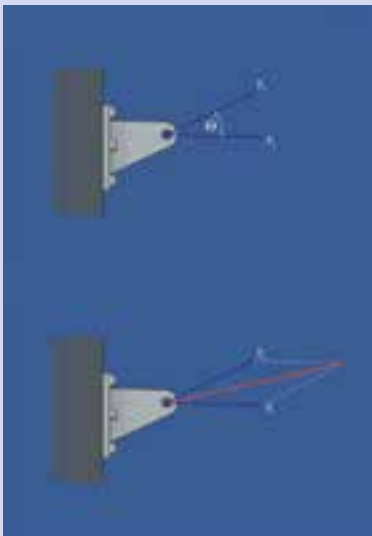
استفاده از خطوط کمکی

(۳) به دست آوردن راستا، جهت و مقدار

نیروی برآیند با ترسیم قطر گذرنده از

محل تقاطع دو نیرو

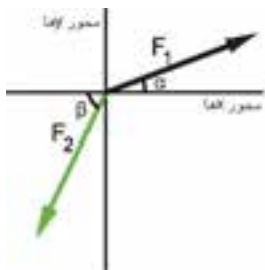
شکل ۱-۱۰



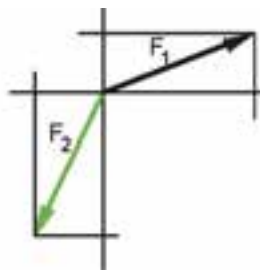
برآیند نیروهای وارد به قلاب به روش

ترسیمی به دست آمده است

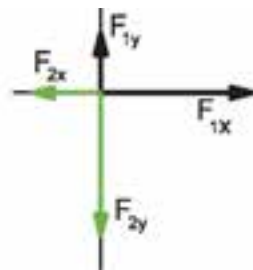
**(ب) روش تجزیه :** روش متوازی الاضلاع برای محاسبه برآیند دو نیرو مناسب است، اما زمانی که سه یا چند نیرو به جسمی وارد می‌شوند استفاده از روش تجزیه توصیه می‌شود. در این روش ابتدا نیروها از مبدأ مختصات رسم شده و مؤلفه‌های هر یک از آنها بر روی محورهای مختصات محاسبه می‌شود. سپس روی هر یک از دو محور  $x$  و  $y$  برآیند مؤلفه‌های افقی و عمودی همه نیروها محاسبه می‌شود. پس از آن با استفاده از قانون فیثاغورث برآیند کلی نیروها محاسبه می‌شود. در شکل ۱-۱۱ مراحل مختلف این روش نشان داده شده است.



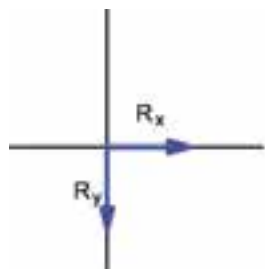
(۱) ترسیم نیروها در راستای درست و مشخص کردن جهت و بزرگی آنها با مقیاس مناسب



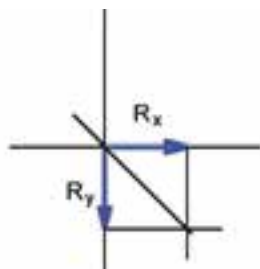
(۲) ترسیم خطوط کمکی برای به‌دست آوردن مؤلفه نیروها



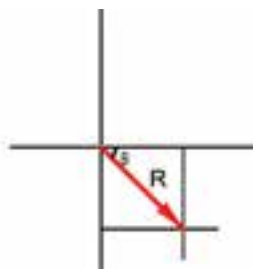
(۳) ترسیم مؤلفه‌های افقی و عمودی نیروها



(۴) ترسیم برآیند مؤلفه‌های افقی بر روی محور  $x$ ها و برآیند مؤلفه‌های عمودی بر روی محور  $y$ ها



(۵) ترسیم خطوط کمکی برای به‌دست آوردن بردار برآیند



(۶) ترسیم راستای بردار برآیند و مشخص کردن بزرگی و جهت آن

شکل ۱-۱۱



برای ترسیم اندازه دقیق بردار بر روی راستای آن می‌توانید از پرگار استفاده کنید در روش متوازی الاضلاع نیز می‌توانید از این ابزار برای ترسیم دقیق متوازی الاضلاع بهره بگیرید



به راستای بردار برآیند و زنجیر عمودی  
دقت کنید



با استفاده از ماشین حساب مهندسی به راحتی می‌توان تاثرات هر زاویه دلخواه ( $\tan \alpha$ ) را به دست آورد از سوی دیگر با داشتن مقدار  $\tan$  یک زاویه مجهول می‌توان مقدار آن زاویه را تعیین نمود

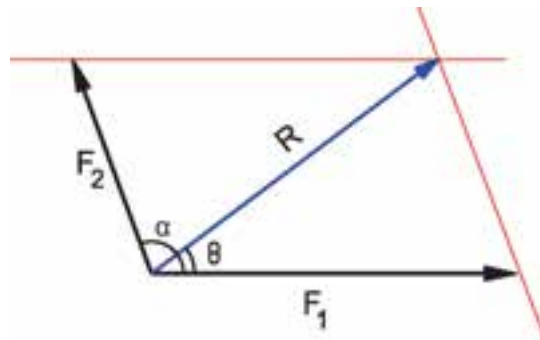
در این روش بزرگی نیروی برآیند براساس قانون فیثاغورث از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \text{رابطه ۱-۳}$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} \quad \text{رابطه ۱-۴}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

**ج) روش محاسباتی:** روش محاسبات یکی دیگر از روش‌های به دست آوردن برآیند نیروها است. برای به دست آوردن برآیند دو نیروی  $F_1$  و  $F_2$  که با یکدیگر زاویه  $\alpha$  می‌سازند از رابطه زیر استفاده می‌شود.



شکل ۱-۱۲

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad \text{رابطه ۱-۵}$$

برای تعیین زاویه بردار نیروی برآیند با یکی از دو نیروی اولیه (مثلاً  $F_1$ ) از رابطه ۱-۶ استفاده می‌شود.

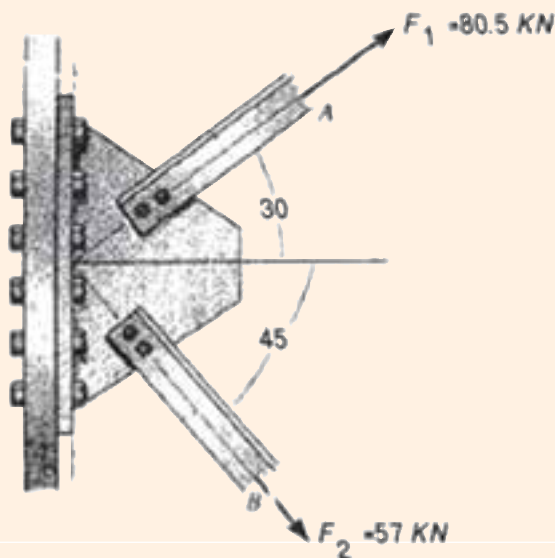
$$\sin \theta = \frac{F_2 \times \sin \alpha}{R} \quad \text{رابطه ۱-۶}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{F_2 \times \sin \alpha}{R}\right)$$

برای محاسبات توابع مثلثاتی می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید یا به پیوست (الف-۲) مراجعه نمایید.

**تمرین نمونه ۱-۲:** برآیند نیروهای وارد بر نبشی‌های پایه یک دکل نفتی در خلیج فارس را با هر دو روش ترسیمی و محاسباتی به دست آورید.

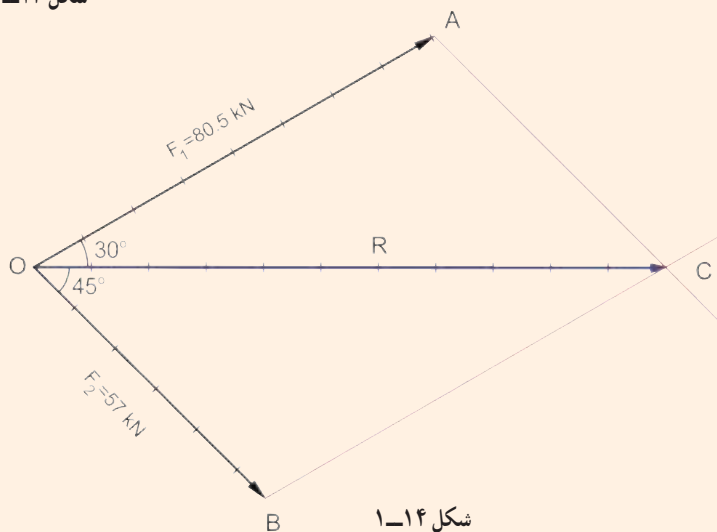
**راه حل روش ترسیمی:** با توجه به بزرگی نیروها مقیاس ۱mm : ۱kN مناسب است. با این مقیاس و راستای نشان داده شده برای آنها، بردارهای نیرو را ترسیم می‌نماییم. با استفاده از روش متوازی‌الاضلاع از انتهای هر یک از بردارها خطی موازی نیروی دیگر رسم می‌نماییم. از برخورد این خطها متوازی‌الاضلاعی تشکیل می‌شود که قطر گذرنده از محل برخورد دو نیرو، اندازه و راستای بردار برآیند را نشان می‌دهد.



$$\overline{OC} = 110 \text{ mm} \xrightarrow{1 \text{ kN} : 1 \text{ mm}} \boxed{R = 110 \text{ kN}}$$

شکل ۱-۱۳

مقیاس ترسیم :  $\frac{10 \text{ kN}}{10 \text{ mm}}$



شکل ۱-۱۴

**راه حل روش محاسباتی:** ابتدا زاویه بین دو نیرو را محاسبه می‌نماییم ( $75^\circ$ ،  $45^\circ$ ،  $3^\circ$ ،  $\alpha$ ) سپس با استفاده از رابطه ۱-۵ داریم:

$$R = \sqrt{(F_1)^2 + (F_2)^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

$$R = \sqrt{80.5^2 + 57^2 + 2 \times 80.5 \times 57 \times \cos 75} = \sqrt{12115}$$

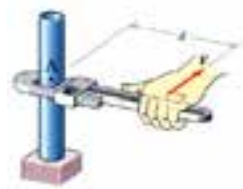
$$\boxed{R = 110 \text{ kN}}$$

– پاسخهای دو راه حل را با یکدیگر مقایسه نمایید.

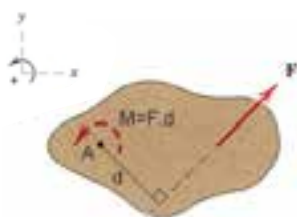
## بازوی گشتاور

براساس یکی از قدیمی‌ترین قضایای هندسی، کوتاه‌ترین فاصله یک نقطه از یک خط، فاصله عمودی است این قضیه به قضیه حمار یا الاغ معروف است

علت این نام‌گذاری آن است که اگر حیوان تشنه‌ای را در فاصله‌ای از یک رود رها کنند، برای رسیدن به رودخانه همیشه کوتاه‌ترین مسیر را که خط عمود است، انتخاب می‌کند برای محاسبه طول بازوی گشتاور، از این قضیه استفاده می‌شود بازوی گشتاور کوتاه‌ترین فاصله بین مرکز گشتاورگیری و راستای نیرو است



شکل ۱-۱۵



شکل ۱-۱۶

## ۱-۵- گشتاور نیرو

برای بررسی کامل اثر نیروهایی که بر یک جسم وارد می‌شوند لازم است تا تمایل به چرخیدنی که در جسم به وجود می‌آید نیز بررسی شود. همان‌گونه که می‌دانید گشتاور معیاری برای اثر چرخشی نیرو حول یک نقطه معین است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M = F \times d$$

رابطه ۱-۷

که در آن:

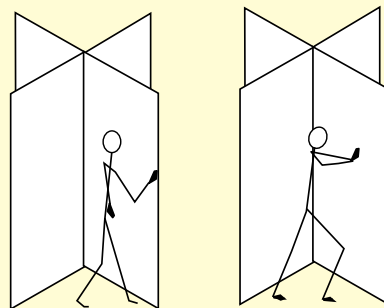
M : گشتاور نیرو با یکاهای N.m, N.cm و ...

F : نیرو با یکاهای N و ...

D : بازوی گشتاور با یکاهای cm, m و ...

گشتاور اعمال شده به یک جسم ممکن است جسم را در جهت ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد بچرخاند. در این کتاب گشتاور ساعت‌گرد با علامت منفی و گشتاور پادساعت‌گرد با علامت مثبت نشان داده شده است.

## تجربه کنید

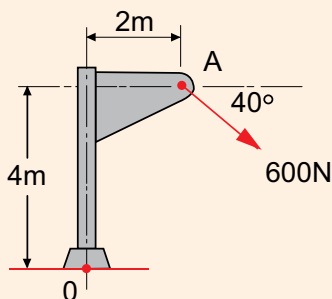


شکل ۱-۱۷

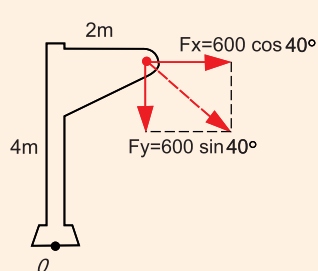
در رابطه ۱-۷ ملاحظه می‌شود که گشتاور نیرو علاوه بر مقدار نیرو، ارتباط مستقیمی با طول بازوی گشتاور دارد که با انجام یک آزمایش ساده می‌توان آن را تجربه کرد. در مقابل یک در لولایی بزرگ بایستید و با یک انگشت در نزدیکی دستگیره در، در جهت بازکردن یا بستن آن نیرو وارد کنید. در دفعات بعد به تدریج فاصله محل وارد کردن نیرو با لولای در را کم کنید. در انتها سعی کنید که با هل دادن در، در محل لولا آن را باز کنید. آیا می‌توانید اثر تغییر طول بازوی گشتاور در مقدار نیروی مورد نیاز برای بازکردن در را بیان کنید؟

تمرین نمونه ۱-۳: در سازه زیر گشتاور ناشی از نیروی ۶۰۰ N را حول نقطه O برحسب N.m محاسبه

نمایید.



شکل ۱-۱۸



شکل ۱-۱۹

راه حل اول: از رابطه‌های ۱-۱ و ۱-۲ استفاده نموده و نیروی F را با

مؤلفه‌های آن جایگزین می‌کنیم.

$$F_x = 600 \times \cos 40^\circ = 460 \text{ N}, F_y = 600 \times \sin 40^\circ = 386 \text{ N}$$

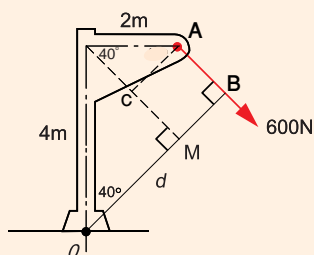
با محاسبه مجموع گشتاور این مؤلفه‌ها حول نقطه O، گشتاور نیروی F

حول این نقطه به دست می‌آید.

$$M_O = (460 \text{ N})(4 \text{ m}) + (386 \text{ N})(2 \text{ m}) = 2610 \text{ N.m}$$

توجه داشته باشید که هر دو گشتاور مؤلفه‌ها، ساعت‌گرد بوده و به این

جهت با یکدیگر جمع می‌شوند.



شکل ۱-۲۰

راه حل دوم: برای محاسبه مقدار گشتاور به اندازه بازوی گشتاور

نیاز است. بازوی گشتاور که فاصله عمودی بین مرکز گشتاورگیری تا راستای

نیرو است در شکل روبرو با d نشان داده شده است. با استفاده از قوانین

مثلثاتی اندازه d را که از دو خط MB و OM تشکیل شده است محاسبه

می‌کنیم.

با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که  $MB = CA = 2 \sin 40^\circ$  است.

پس:

$$d = OM - MB = 4 \cos 40^\circ - 2 \sin 40^\circ = 4/35 \text{ m}$$

با استفاده از رابطه ۱-۷ داریم:

$$M_O = F \cdot d = 600 \times 4/35 = 2610 \text{ N.m}$$

ساعتگرد





چرا این صخره سقوط نمی‌کند؟



بسیاری از طرح‌ها از طبیعت الگو گرفته‌اند

### قانون سوم نیوتن

برای هر کنشی، واکنشی مساوی و در جهت مخالف وجود دارد



برای ترسیم نمودار جسم آزاد از ابزار استفاده کنید. دقت در ترسیم نمودار به درک بهتر از صورت مسئله و حل آن کمک می‌کند.

## ۱-۶- تعادل اجسام صلب

در بخش‌های گذشته از روش‌های تعیین برآیند چند نیروی وارد بر یک جسم و محاسبه گشتاورها صحبت شد. وقتی برآیند تمام نیروها و گشتاورهای وارد بر جسمی صفر باشد می‌گویند جسم در حال تعادل است.

در این بخش تعادل سازه‌های دو بعدی را بررسی می‌کنیم که تحت تأثیر نیروهای واقع در صفحه خودشان قرار دارند. شرایط تعادل برای یک سازه دو بعدی با سه معادله بیان می‌شود.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{رابطه ۸-۱}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{رابطه ۹-۱}$$

$$\Sigma M = 0 \quad \text{رابطه ۱۰-۱}$$

این معادله‌ها را می‌توان برای تعیین نیروهای مجهول وارد بر جسم، یا عکس‌العمل‌هایی که تکیه‌گاه‌ها به آن اعمال می‌کنند به کار بست.

روابط ۸-۱ و ۹-۱ بیان می‌کنند که برآیند مؤلفه‌های افقی و عمودی نیروهای خارجی وارد بر جسم صفر هستند یا به عبارت دیگر مؤلفه‌های نیروهای خارجی همدیگر را خنثی می‌کنند. معادله ۱۰-۱ هم بیان می‌کند که حاصل جمع جبری گشتاور نیروهای وارد بر جسم حول هر نقطه دلخواه در صفحه سازه صفر است، یا به عبارتی گشتاورهای نیروهای خارجی حول هر نقطه دلخواه متوازن هستند.

بنابراین در حالت تعادل، نیروهای خارجی نمی‌توانند جسم را انتقال دهند یا بچرخانند. یعنی جسم صلب در حالت تعادل، نه حرکت انتقالی دارد و نه حرکت دورانی. برای نوشتن معادله‌های تعادل در مورد یک جسم صلب، ابتدا باید همه نیروهای وارد بر جسم را مشخص نموده و بعد نمودار جسم آزاد رسم شود.

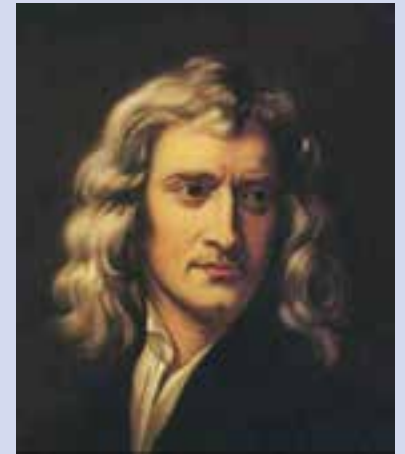
علاوه بر نیروهای وارد بر سازه، عکس‌العمل‌هایی را هم که تکیه‌گاه‌های سازه به آن وارد می‌کنند باید در نظر گرفت. در ادامه این بخش با ترسیم نمودار جسم آزاد و عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها آشنا خواهید شد.

## ۱-۷- نمودار جسم آزاد

در حل مسائل ایستایی مربوط به تعادل جسم صلب، باید تمامی نیروهایی را که به جسم وارد می‌شوند، در نظر گرفت و نیروهایی را که به طور مستقیم بر جسم اثر نمی‌کنند، کنار گذاشت. حذف یک نیرو یا افزودن یک نیرو نامربوط تعادل را از بین می‌برد. برای حل مسئله ابتدا باید



گراینگاه یا مرکز گرایش جسم را با علامت بالا یا با حرف G (مخفف Gravity) نمایش می‌دهند.



### نیوتن

(سده ۱۷ میلادی - ۱۱ و ۱۲ هجری)

فیزیکدان و ریاضیدان بزرگی که در سال درگذشت گالیله به دنیا آمد او به دلیل هوش سرشار خود در هفده سالگی به طور رایگان وارد دانشگاه کمبریج شد و به سرعت از استادان خود پیشی گرفت در سال ۱۶۶۳ به دلیل همه گیر شدن بیماری طاعون، مجبور به ترک دانشگاه شد و در مدت ۱۸ ماه که بیشتر مراکز علمی اروپا بسته بود، به خودسازی علمی خویش پرداخت او در این مدت نظریه ذره‌ای نور، قانون جاذبه عمومی و بسیاری از نظریات خود را پایه‌گذاری کرد نیوتن حاصل پژوهش‌های خود را در کتابی به نام اصول ریاضی فلسفه طبیعی نوشت این کتاب مشتمل بر قانون‌های نیوتن درباره حرکت است

برای جسم مورد نظر یک نمودار جسم آزاد رسم کرد. این نمودار، جسم یا عضو مورد نظر را به صورت جداگانه از همه اجسامی که در اتصال یا تماس با آن هستند به همراه همه نیروهای خارجی و عکس‌العمل وارد بر آن نشان می‌دهد. در این جا مراحل مختلف رسم نمودار آزاد تشریح می‌شود:

**الف)** نخست جسم آزاد به طور مشخص، تعیین می‌شود. سپس این جسم از زمین و از تمام اجسام دیگر جدا شده و بعد طرح کلی این جسم مجزا شده، رسم می‌شود.

**ب)** همه نیروهای خارجی روی نمودار جسم آزاد نشان داده می‌شود. این نیروها نماینده کنش‌های ناشی از زمین و دیگر اجسامی هستند که از آن جدا شده‌اند. آنها را باید به همان نقاط تماس جسم با زمین یا به نقطه اتصال آن به اجسام دیگر وارد کرد. وزن جسم آزاد را هم باید در میان نیروهای خارجی گنجانید، چون نشان دهنده نیروی جاذبه زمین بر روی ذره‌های تشکیل دهنده جسم آزاد است. نیروی وزن را باید در **گراینگاه** جسم ترسیم کرد.

**پ)** بزرگی و راستای نیروهای خارجی معلوم را باید به وضوح بر روی نمودار جسم آزاد نشان داد. باید دقت کرد که جهت نیروهای وارد بر جسم آزاد نشان داده شود، نه جهت نیروهایی که جسم آزاد وارد می‌کند.

**ت)** نیروهای خارجی مجهول به طور معمول عکس‌العمل‌هایی هستند، که زمین و اجسام دیگر برای مخالفت با حرکت جسم آزاد از خود نشان می‌دهند و بنابراین جسم را به باقی ماندن در همان مکان مقید می‌کنند. عکس‌العمل‌ها در نقاطی وارد می‌شوند که جسم آزاد توسط اجسام دیگر نگه داشته می‌شود یا به آنها متصل است.

**ج)** در نمودار جسم آزاد باید زاویه‌ها و ابعاد را هم وارد کرد، برای محاسبه مؤلفه‌های نیرو و گشتاور نیروها به آنها نیاز است، البته بقیه جزئیات را باید حذف کرد.

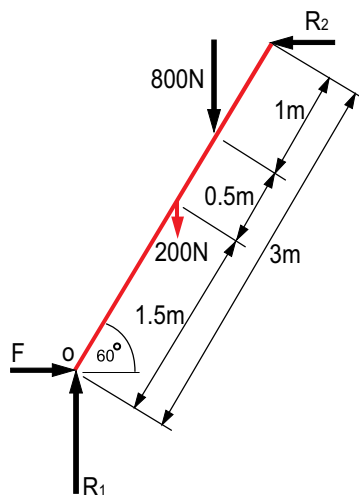
**مثال:** شکل ۱-۲۱ الف نردبانی را نشان می‌دهد که فردی بر روی آن ایستاده و فرد دیگری که بر روی یک صندلی نشسته است با پای خود از لغزیدن نردبان بر روی سطح صاف جلوگیری می‌کند. برای تحلیل این مجموعه نردبان جسم آزاد فرض می‌شود. برای ترسیم نمودار جسم آزاد نردبان به صورت خطی با طول و راستای مشخص ترسیم می‌شود. بردارهای نیرو بر روی نقاطی از نردبان که نیروهای اجسام دیگر مانند دیوار، افراد و زمین وارد می‌شوند ترسیم شده و شکل ۱-۲۱ ب به دست می‌آید.

در این نمودار وزن فرد و نردبان به سمت پایین ترسیم شده و  $R_1$  و  $R_2$  به ترتیب نیروهای واکنشی زمین و دیوار هستند.  $F$  نیرویی است که از طرف پای نفر دوم وارد می‌شود. اندازه فاصله‌ها و زاویه نردبان با زمین نیز نمایش داده شده‌اند. با کمک این نمودار تحلیل تعادل نردبان به راحتی انجام پذیر است.

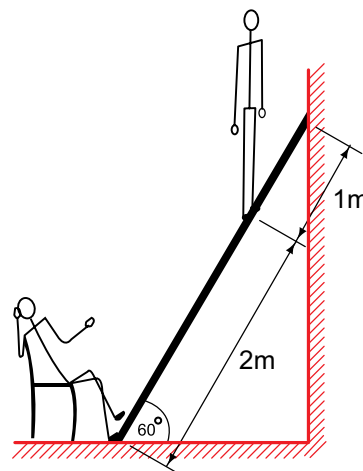
## بررسی کنید



در اتفاقی نادر، جرتقیل‌هایی که برای بیرون آوردن وسیله نقلیه سقوط کرده، مشغول به کار بودند، یکی پس از دیگری واژگون شدند با اعضای گروه خود دلیل علمی این اتفاق را بررسی کنید چگونه می‌توان از بروز چنین حوادثی پیشگیری کرد؟



ب) نمودار جسم آزاد نردبان



الف) فردی بر روی نردبان ایستاده

شکل ۲۱-۱

## ۸-۱- واکنش تکیه‌گاه‌ها

بسته به نوع تکیه‌گاه‌ها یا اتصال‌های نگهدارنده یک سازه، عکس‌العمل‌های وارد بر سازه یا جسم را به سه دسته تقسیم می‌کنند:

**الف) عکس‌العمل‌های معادل با یک نیروی با راستای معلوم (تکیه‌گاه ساده غلتکی):** تکیه‌گاه‌ها و اتصال‌هایی که این نوع عکس‌العمل را ایجاد می‌کنند عبارتند از: غلتک‌ها، گهواره‌ای‌ها و سطوح بدون اصطکاک.

هر یک از این تکیه‌گاه‌ها می‌توانند جلوی حرکت را فقط در یک جهت بگیرند. این تکیه‌گاه‌ها و عکس‌العمل آنها در ردیف ۱ و ۲ جدول ۱-۱ نشان داده شده است. این دسته از عکس‌العمل‌ها فقط شامل **یک مجهول** هستند که آن هم بزرگی نیروی عکس‌العمل است. اثر این عکس‌العمل‌ها معلوم است و در نمودار جسم آزاد ترسیم می‌شود.

جهت این عکس‌العمل را در مورد سطوح بدون اصطکاک به طرف جسم آزاد نمایش می‌دهیم. از آنجا که مفروض است تکیه‌گاه‌های غلتکی و گهواره‌ای نیروها را در دو جهت تحمل کنند عکس‌العمل آنها را می‌توان به طرف جسم آزاد یا به خارج از جسم آزاد نمایش داد.

**ب) عکس‌العمل‌های معادل با دو نیرو یا یک نیرو با راستا و بزرگی مجهول (تکیه‌گاه ساده مفصلی):** تکیه‌گاه‌ها و اتصال‌هایی که این نوع عکس‌العمل را ایجاد می‌کنند عبارتند از لولاها، بین‌های بدون اصطکاک در سوراخ‌های کپ و سطوح ناصاف. این تکیه‌گاه‌ها می‌توانند مانع حرکت جسم در تمام امتدادها شوند، اما نمی‌توانند از دوران آنها حول محل اتصال جلوگیری کنند. این دسته از عکس‌العمل‌ها **دو مجهول** دارند و معمولاً آنها را با مؤلفه‌هایشان در امتداد  $x$  و  $y$  نشان می‌دهند. در مورد سطوح ناصاف، مؤلفه عمود بر سطح را باید به طرف جسم

آزاد نشان داد. ردیف‌های ۳ و ۴ جدول ۱-۱، این نوع تکیه‌گاه‌ها و عکس‌العمل‌هایشان را نشان می‌دهد.

**پ) عکس‌العمل‌های معادل با یک نیرو و یک گشتاور (تکیه‌گاه ثابت و گیردار):**  
این عکس‌العمل‌ها توسط تکیه‌گاه‌های ثابت ایجاد می‌شوند که با هر نوع حرکت جسم آزاد مخالفت می‌کنند و آن را کاملاً مقید نگه می‌دارند.

تکیه‌گاه‌های ثابت نیروهایی بر تمام سطح تماس ایجاد می‌کنند. با این همه این نیروها را می‌شود به یک نیرو با راستا و بزرگی مجهول و یک گشتاور خلاصه کرد. این دسته از عکس‌العمل‌ها **سه مجهول** دارند که معمولاً از دو مؤلفه نیرو و گشتاور تشکیل می‌شوند. ردیف ۵ جدول ۱-۱ تکیه‌گاه ثابت و عکس‌العمل آن را نشان می‌دهد.

جدول ۱-۱- انواع تکیه‌گاه‌ها و عکس‌العمل آنها

توضیح	عکس‌العمل تکیه‌گاه	نوع تکیه‌گاه
نیروی عکس‌العمل فشاری و عمود بر سطح تماس است.		سطح بدون اصطکاک (تکیه‌گاه یک مجهولی)
تکیه‌گاه‌های غلتکی نیروی عکس‌العمل فشاری، عمود بر سطح اتکا بوجود می‌آورند.		غلتک‌ها و گهواره‌ای (تکیه‌گاه یک مجهولی)
سطح ناصاف علاوه بر عکس‌العمل عمود بر سطح، یک نیروی عکس‌العمل مماس بر راستای سطح (اصطکاک) به وجود می‌آورد.		سطح ناصاف (تکیه‌گاه دو مجهولی)
تکیه‌گاه لولایی هر نیرویی در صفحه را تحمل می‌کند. این نیروها معمولاً با دو مؤلفه $R_x$ و $R_y$ نمایش داده می‌شوند.		لولا و بین بدون اصطکاک (تکیه‌گاه دو مجهولی)
تکیه‌گاه ثابت علاوه بر نیروی محوری F و نیروی برشی V، گشتاور خمشی M را نیز تحمل می‌کند.		ثابت (تکیه‌گاه سه مجهولی)

## بسازید و تجربه کنید

هرساله مسابقه‌هایی مانند ساختن پل با ماکارونی یا چوب بستنی در ایران و جهان در سطوح مختلف دانشجویی و دانش‌آموزی برگزار می‌شود. در این مسابقات گروه‌های شرکت‌کننده تلاش می‌کنند تا با استفاده از قوانین مکانیک بیش‌ترین نیروها را به سازه‌هایی که با ساده‌ترین مصالح ساخته شده‌اند اعمال کنند.

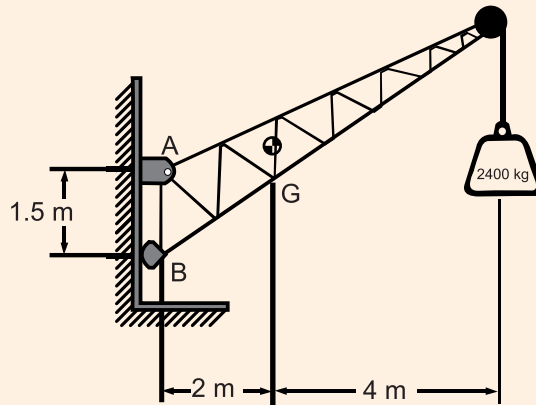
طراحی و ساخت پل خرابی تنها با استفاده از ۷۵ گرم ماکارونی (معادل یک بسته ماکارونی) انجام می‌شود. طول دهانه پل یک متر و حداکثر ارتفاع پل نیم متر می‌باشد. پل روی دو تکیه‌گاه که از یک‌دیگر یک متر فاصله دارند قرار می‌گیرد و تکیه‌گاه‌ها فقط قادر به وارد کردن عکس‌العمل عمودی می‌باشند و هیچ عکس‌العمل افقی در تکیه‌گاه‌ها بر پل وارد نمی‌شود.

رکورد کسب شده در این رشته معادل ۱۷۶ کیلوگرم است، که این رکورد تقریباً ۲۳۵ برابر وزن خود سازه می‌باشد.





**تمرین نمونه ۱-۴:** جرثقیل ثابتی به جرم  $1000 \text{ kg}$  برای بالا بردن صندوقی به جرم  $2400 \text{ kg}$  استفاده می‌شود. جرثقیل را یک پین در  $A$  و یک تکیه‌گاه گهواره‌ای در نقطه  $B$  نگه داشته‌اند. گرانیگاه جرثقیل در نقطه  $G$  واقع شده است. مؤلفه‌های عکس‌العمل‌ها در  $A$  و  $B$  را محاسبه کنید.



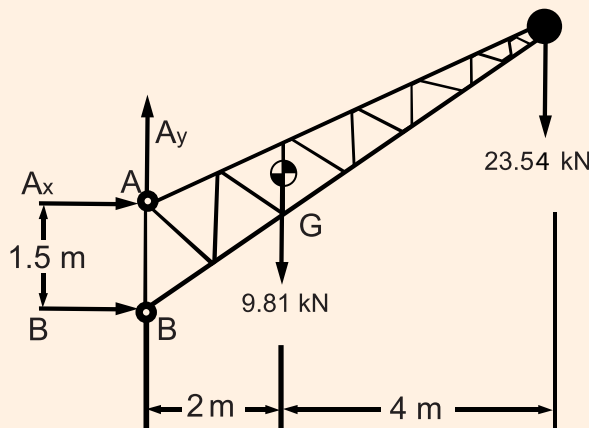
شکل ۱-۲۲

**راه حل:**

**نمودار جسم آزاد:** نمودار جسم آزاد جرثقیل را رسم می‌کنیم. با ضرب کردن جرم‌های جرثقیل و صندوق در  $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  وزن آنها را محاسبه می‌کنیم. با مراجعه به جدول ۱-۱ تکیه‌گاه‌ها را شناسایی نموده و عکس‌العمل تکیه‌گاه  $A$  را با دو مؤلفه  $A_x$  و  $A_y$  نشان می‌دهیم. عکس‌العمل در تکیه‌گاه  $B$  به سطح تماس عمود است، پس افقی است. فرض می‌کنیم که راستاهای  $A_x$ ،  $A_y$  و  $B$  مطابق نمودار جسم آزاد باشند. این سه نیروی عکس‌العمل مجهولات مسأله هستند.

**معادله‌های تعادل:**

**تعیین B:** برای محاسبه نیروی عکس‌العمل  $B$  از سومین معادله تعادل (رابطه ۱-۱) استفاده می‌کنیم. جمع گشتاورهای همه نیروهای خارجی حول نقطه  $A$  صفر است. معادله‌ای که به دست می‌آید شامل  $A_x$ ،  $A_y$  نیست، چون به دلیل عبور راستاهای این دو نیرو از نقطه  $A$  گشتاورهای  $A_x$  و  $A_y$  حول نقطه  $A$  برابر با صفر هستند.



شکل ۱-۲۳

با ضرب بزرگی هر نیرو در فاصله عمودی اش از A (بازوی گشتاور) می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \curvearrowright \Sigma M_A \quad \circ : & B(1/5m) \quad (9/81kN)(2m) \quad (23/54kN)(6m) \quad \circ \\ B & 107/24kN \end{aligned}$$

چون نتیجه مثبت است، عکس‌العمل در همان جهتی است که فرض کرده‌ایم.

$$B \quad 107/24kN \rightarrow$$

**تعیین  $A_x$ :** در اینجا از نخستین معادله تعادل (رابطه ۸-۱) استفاده می‌نماییم. جمع مؤلفه‌های افقی تمام نیروهای خارجی صفر است، پس بزرگی  $A_x$  به این طریق به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x \quad \circ : & A_x \quad B \quad \circ \\ A_x & 107/24kN \quad \circ \\ A_x & 107/24kN \end{aligned}$$

چون نتیجه منفی است، پس جهت  $A_x$  مخالف جهتی است که در ابتدا فرض کرده‌ایم.

$$A_x \quad 107/24kN$$

**تعیین  $A_y$ :** با توجه به دومین معادله تعادل (رابطه ۹-۱) می‌دانیم جمع مؤلفه‌های عمودی هم باید صفر باشد.

$$\begin{aligned} \uparrow \Sigma F_y \quad \circ : & A_y \quad 9/81kN \quad 23/54kN \quad \circ \\ A_y & 33/35kN \\ A_y & 33/35kN \uparrow \end{aligned}$$

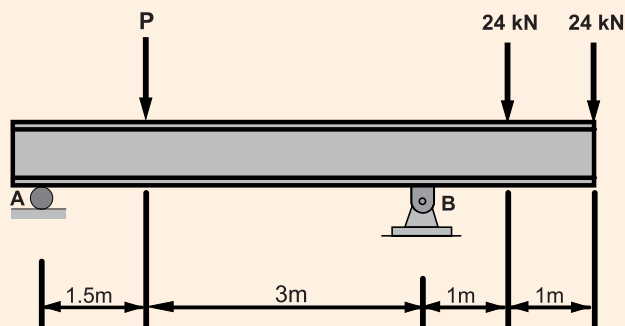
برای یافتن نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه A، برآیند مؤلفه‌های  $A_x$  و  $A_y$  را با کمک روابط ۵-۱ و ۶-۱ محاسبه

می‌کنیم.

$$A = \sqrt{(107/24kN)^2 + (33/35kN)^2} = 112/3kN$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{33/3}{107}\right) = 17/27^\circ$$

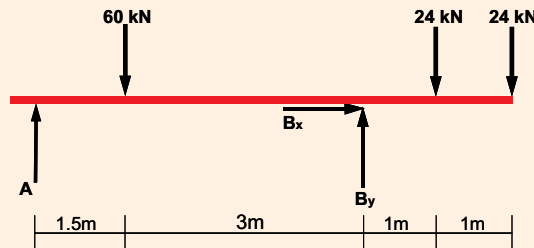
**تمرین نمونه ۵-۱:** به تیری مطابق شکل زیر سه بار وارد شده است. تیر به غلتکی در A و پینی در B تکیه دارد. اگر  $P = 60kN$  باشد، عکس‌العمل‌های A و B را محاسبه کنید. از وزن تیر صرف نظر شود.



شکل ۱-۲۴

## راه حل:

**نمودار جسم آزاد:** نمودار جسم آزاد تیر را رسم می‌کنیم. عکس‌العمل در تکیه‌گاه A عمودی است و آن را با A نشان می‌دهیم. عکس‌العمل در B را با دو مؤلفه  $B_x$  و  $B_y$  نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم مؤلفه‌ها در راستاهای نشان داده شده وارد می‌شوند.



شکل ۱-۲۵

**معادله‌های تعادل:** سه معادله تعادل را می‌نویسیم تا سه مجهول مسأله که عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌ها هستند

را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} \overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x \quad &: \quad B_x \quad \circ \\ \curvearrowright \Sigma M_A \quad &: \quad (60 \text{ kN})(1/5 \text{ m}) \quad B_y(4/5 \text{ m}) \quad (24 \text{ kN})(5/5 \text{ m}) \quad (24 \text{ kN})(6/5 \text{ m}) \quad \circ \\ &B_y \quad 84 \text{ kN} \\ &B_y \quad 84 \text{ kN} \uparrow \\ \overset{+}{\uparrow} \Sigma F_y \quad &: \quad A \quad 60 \text{ kN} \quad 84 \text{ kN} \quad 24 \text{ kN} \quad 24 \text{ kN} \quad \circ \\ &A \quad 24 \text{ kN} \\ &A \quad 24 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

درستی جواب‌ها را با نوشتن معادله گشتاور حول نقطه B بررسی می‌کنیم:

$$\curvearrowright \Sigma M_B \quad (24 \text{ kN})(4/5 \text{ m}) \quad (60 \text{ kN})(3 \text{ m}) \quad (24 \text{ kN})(1 \text{ m}) \quad (24 \text{ kN})(2 \text{ m}) \quad \circ$$

**تذکر:** در این مسأله عکس‌العمل‌های A و B هر دو عمودی هستند. در A تیر توسط یک تکیه‌گاه غلتکی

نگه‌داشته شده است، بنابراین عکس‌العمل نمی‌تواند مؤلفه افقی داشته باشد. با یک نگاه می‌توان تشخیص داد که مؤلفه افقی تکیه‌گاه B هم صفر است، زیرا هیچ یک از نیروهای وارد بر تیر، مؤلفه افقی ندارند. اما همان‌گونه که ملاحظه شد در حل مسائل، ترجیحاً معادلات تعادل را می‌نویسیم و سپس صفر بودن مؤلفه‌ها را نتیجه می‌گیریم. این امر، به پرهیز از بروز اشتباه کمک می‌کند.

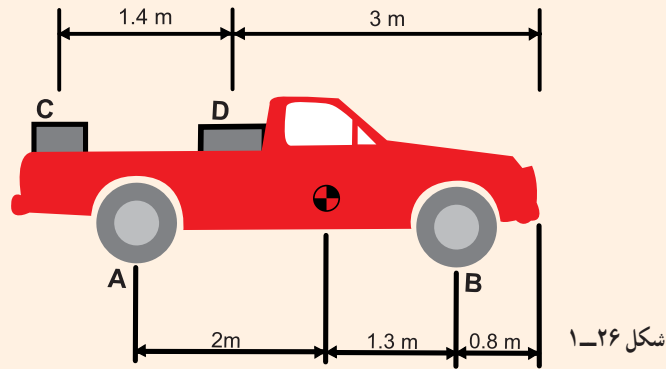
**تمرین نمونه ۱-۶:** دو صندوق به وزن ۱ kN مطابق شکل بر کف خودرو و وانت متوقفی به وزن ۱۲ kN قرار

دارد. مطلوب است محاسبه:

(الف) عکس‌العمل در هریک از دو چرخ عقب، در نقطه A

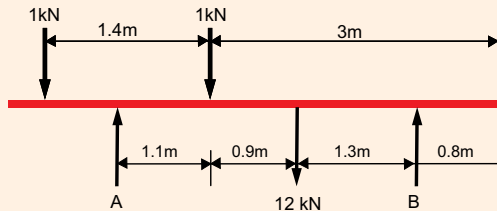
(ب) عکس‌العمل در هریک از دو چرخ جلو، در نقطه B





شکل ۱-۲۶

## راه حل:



شکل ۱-۲۷

## نمودار جسم آزاد: نمودار جسم آزاد خودرو را

رسم می‌کنیم. چرخ‌ها از نوع تکیه‌گاه دو مجهولی سطح ناصاف هستند. از آنجا که هیچ نیروی افقی به جسم آزاد وارد نمی‌شود، مؤلفه‌های افقی عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها صفر هستند و عکس‌العمل‌های عمودی آنها را با نیروهای A و B

نشان می‌دهیم. نیروی ۱۲kN وزن خودرو در محل گرانیگاه وارد می‌شود و دو بار ۱kN در فاصله‌های معین شده وارد می‌شوند. با کمک اندازه‌های نشان داده شده در شکل فاصله بین راستاهای نیرو را نیز محاسبه نموده و در نمودار جسم آزاد نمایش می‌دهیم.

## معادله‌های تعادل: از آنجا که مسأله دو مجهول دارد با نوشتن دو معادله تعادل خواهیم توانست نیروهای A و

B را محاسبه نماییم. ابتدا معادله گشتاور حول تکیه‌گاه B را می‌نویسیم که یکی از مجهولات از محاسبه حذف شود.

$$\sum M_B = 0 :$$

$$+ (1\text{kN})(1/4\text{m} + 0/9\text{m} + 1/3\text{m}) - A(1/1\text{m} + 0/9\text{m} + 1/3\text{m}) + (1\text{kN})(0/9\text{m} + 1/3\text{m}) + (12\text{kN})(1/3\text{m}) = 0$$

$$A = 6/48\text{kN}$$

پس عکس‌العمل در هر یک از چرخ‌های عقب، نصف این مقدار یعنی ۳/۲۴kN است. حالا برای به دست آوردن نیروی عکس‌العمل B یک معادله تعادل دیگر می‌نویسیم.

$$\sum F_y = 0 :$$

$$1\text{kN} - 6/48\text{kN} - 1\text{kN} - 12\text{kN} + B = 0$$

$$B = 7/52\text{kN}$$

عکس‌العمل در هر یک از چرخ‌های جلو نیز ۳/۷۶kN می‌باشد.

**بررسی درستی حل مسأله:** درستی جواب‌ها را با نوشتن معادله گشتاور حول نقطه A بررسی می‌کنیم.

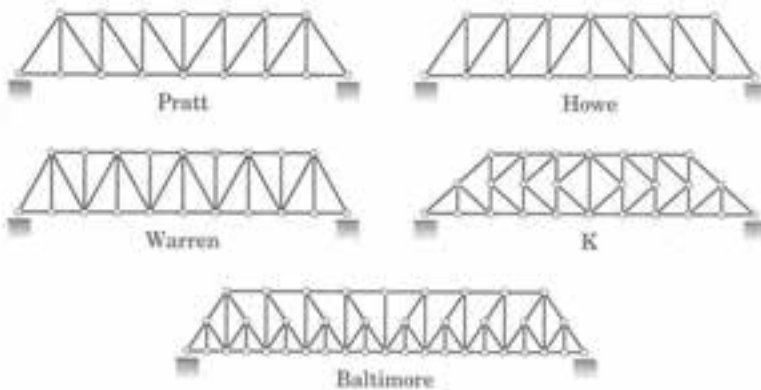
$$\sum M_A = (1\text{kN})(1/4\text{m} - 1/1\text{m}) - (1\text{kN})(1/1\text{m}) - (12\text{kN})(2\text{m}) + (7/52\text{kN})(3/3\text{m}) = 0$$

**کار در کلاس:** این مسأله را با این فرض که صندوق C بر روی صندوق D قرار گیرد، حل کنید.

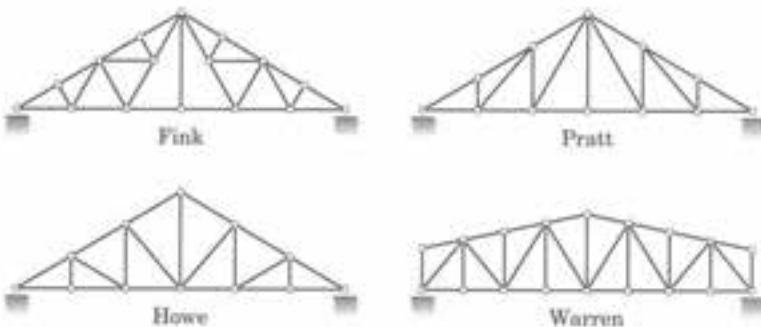
## ۹-۱- انواع سازه‌ها

در این بخش سه گروه مهم سازه مهندسی و کاربرد آنها معرفی خواهند شد.

**خرپا:** خرپا یکی از سازه‌های اصلی مهندسی است. هر خرپا شامل عضوهای مستقیمی است که در مفصل‌ها به یکدیگر متصل‌اند. اعضای خرپا معمولاً به شکل مثلث به هم متصل می‌شوند. فرم مثلثی به دلیل پایداری در مقابل تغییر شکل و نیروهای خارجی قابل توجه است. هر خرپا برای تحمل بارهایی که در صفحه آن اثر می‌کند، طراحی می‌شود و بنابراین می‌توان آن را یک سازه دوبعدی در نظر گرفت. تعدادی از خرپاهای معمول برای ساخت پل‌ها و سقف‌ها در شکل ۱-۲۸ نشان داده شده‌اند. بیشتر سازه‌های واقعی از اتصال چندین خرپا به یکدیگر ساخته می‌شوند و در مجموع یک قاب فضایی را تشکیل می‌دهند (شکل ۱-۲۹). از این سازه در ساخت ساختمان‌ها، پل‌ها، سالن‌های با عرض دهانه بزرگ و ... استفاده می‌شود.



الف) خرپاهای متداول برای ساخت پل



ب) خرپاهای متداول برای ساخت سقف

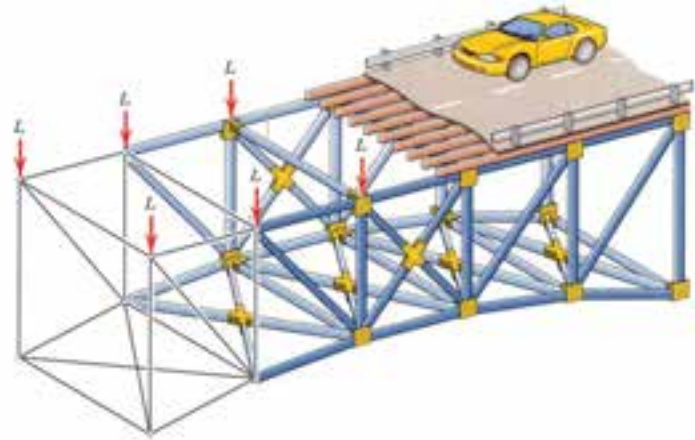
شکل ۱-۲۸



سازه‌های خرپا، بسیار سبک و مستحکم

هستند

هنگامی که طول خرپا، چه خریای پل و چه خریای سقف زیاد باشد، در یک انتهای خرپا تکیه‌گاه غلتکی به کار برده می‌شود این نوع تکیه‌گاه به خرپا اجازه می‌دهد که در اثر تغییرات، یا اعمال و حذف بارها آزادانه منبسط یا منقبض شود



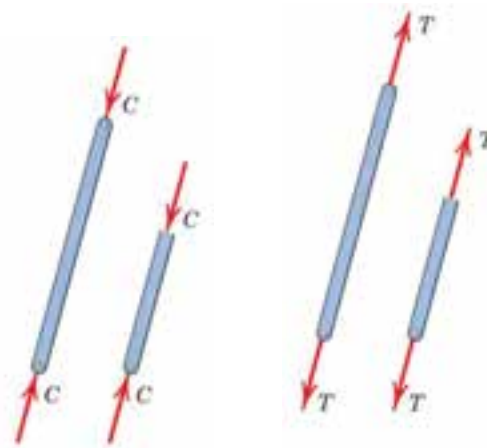
شکل ۱-۲۹

**سازه فضایی:** وقتی سرهای چند عضو مستقیم طوری به هم متصل شوند که یک پیکربندی سه بعدی تشکیل دهند، یک سازه فضایی به دست آمده است. سازه فضایی را خریای فضایی هم می‌نامند.

در شکل ۱-۳۰ ساده‌ترین سازه فضایی نمایش داده شده است. ویژگی مشترک خریای دو بعدی و سازه‌های فضایی استحکام زیاد و سبکی سازه می‌باشد. از دیگر مزایای این سازه‌ها سرعت نصب بالاست. البته باید در نظر داشت که این سازه‌ها حجم زیادی را اشغال می‌کنند.

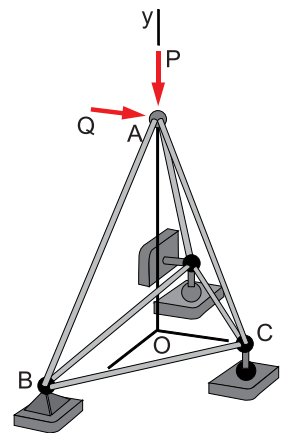


نمونه‌ای از محل اتصال اعضا (گره) در یک سازه فضایی



شکل ۱-۳۲ - فشار

شکل ۱-۳۱ - کشش



شکل ۱-۳۰

طراحی خریاها و سازه‌های فضایی با استفاده از عضوهای دوتیرویی می‌باشد. خاصیت این عضوها به شکلی است که فقط نیروی محوری در طول عضو را به شکل کششی (T) و یا فشاری (C) تحمل می‌کنند.

**قاب‌ها:** قاب‌ها نیز سازه‌هایی هستند که برای تحمل بار طراحی می‌شوند. اما در قاب، ممکن است به هر عضو بیش از دو نیرو وارد شود. اسکلت فلزی ساختمان‌های فولادی و سازه فلزی سوله‌های صنعتی نمونه‌هایی از این سازه‌های قابی هستند. قاب‌ها در ساخت ماشین‌آلات و دستگاه‌های صنعتی نیز بسیار پر کاربردند.



شکل ۳۳-۱ اسکلت‌های فلزی از نمونه‌های کاربرد قاب‌ها در صنعت هستند.



سازه فلزی یک سکوی حفاری که به محل پروژه حمل می‌شود



شکل ۳۴-۱ قاب فولادی به کار رفته در ساخت این پرس، نیروهای ناشی از عملکرد آن را تحمل می‌کند.

**فعالیت گروهی:** فهرست ۲۰ سازه فلزی در محیط هنرستان و اطراف آن را تهیه و نوع سازه‌ها را تعیین کنید. آیا نوع سازه‌ها، با توجه به کاربرد آنها درست انتخاب شده‌اند؟



## چگونه مسأله حل کنیم؟

مسائل هر چقدر هم که طولانی و پیچیده به نظر برسند با بهره‌گیری از روش درست برخورد با مسأله قابل حل خواهند بود. برای حل مسائل این فصل پیشنهاد می‌شود تا مراحل زیر را به ترتیب انجام دهید:

۱- صورت مسأله و شکل آن را به دقت مطالعه و بررسی کنید و «معلوم‌ها» و «مجهول‌ها» را شناسایی کنید.  
 ۲- نمودار جسم آزاد را به دقت و در حد امکان بزرگ ترسیم نمایید و روی آن تمام نیروهای خارجی اعم از معلوم و مجهول را نشان دهید. در این مرحله در صورت نیاز، نیروها را تجزیه کنید و مؤلفه‌های آنها را در نمودار وارد کنید. برای یک جسم صلب دوی بعدی عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها می‌توانند بسته به نوع تکیه‌گاه یک، دو یا سه مجهولی باشند. هرگز تا وقتی که از حضور همه بارها، همه عکس‌العمل‌ها و وزن جسم (در صورت لزوم) در نمودار جسم آزاد مطمئن نشده‌اید، مبادرت به حل مسأله نکنید.

وقتی نمودار جسم آزاد را رسم کردید، لازم است که جهت‌های عکس‌العمل‌های مجهول را مشخص کنید. در صورتی که پس از حل مسأله علامت جواب‌ها مثبت بود، جهت، درست فرض شده و در صورتی که علامت جواب منفی بود، جهت واقعی نیرو، عکس فرض اولیه است.

۳- می‌توانید تا سه معادله تعادل بنویسید و با کمک آنها سه مجهول را در مسأله محاسبه نمایید. همان‌گونه که می‌دانید معادلات تعادل عبارتند از:  $\sum M = 0$ ,  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ . توصیه می‌شود معادلات تعادل را به صورت یکسان مانند مسائل نمونه به کار برید. یعنی، مقدارهای معلوم و مجهول را در سمت چپ معادله و جمع آنها را مساوی صفر قرار دهید. برای ساده کردن حل مسائلی که سه مجهول دارند، استفاده از یکی از روش‌های زیر ممکن است به شما کمک کند:

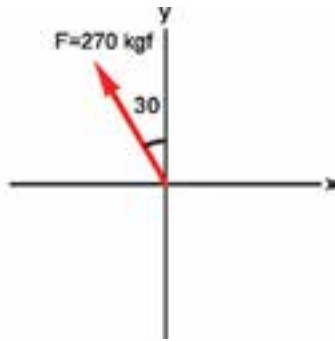
(الف) با جمع بستن گشتاورها حول محل تلاقی خط اثرهای دو نیروی مجهول، معادله‌ای به دست خواهید آورد که یک مجهولی است.

(ب) با نوشتن معادله تعادل در راستای عمود بر راستای دو نیروی مجهول، معادله‌ای به دست می‌آید که یک مجهولی است.

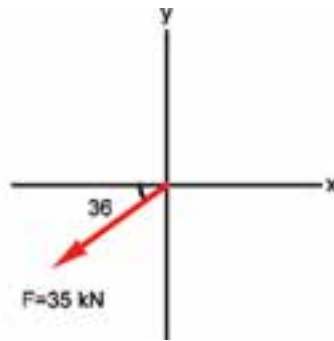
۴- یکاها را کنترل کنید و مطمئن شوید که همه مجهولات مسأله به دست آمده‌اند. در این مرحله با تحقیق در مورد پاسخ‌ها می‌توانید از درستی محاسبات انجام شده اطمینان پیدا کنید.

## تمرین‌های فصل اول

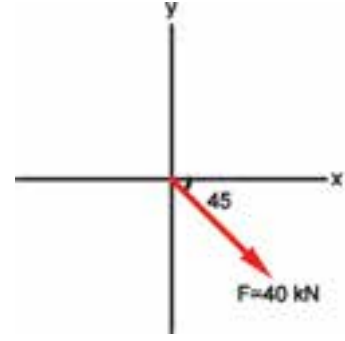
۱-۱- مؤلفه‌های عمودی و افقی نیروی  $F$  در شکل‌های زیر را به دو روش ترسیمی و محاسباتی به دست آورید.



شکل ۱-۳۷



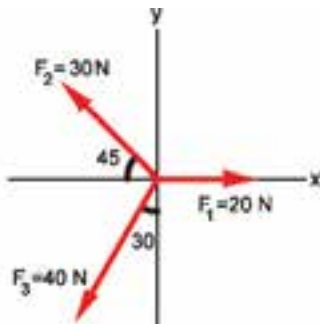
شکل ۱-۳۶



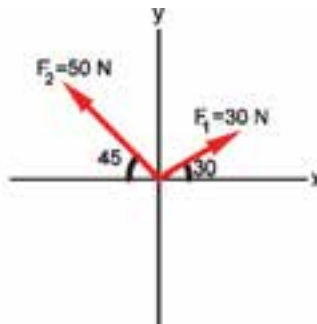
شکل ۱-۳۵

۱-۲- مؤلفه‌های عمودی و افقی نیروی  $6^\circ N$  را که با افق زاویه  $3^\circ$  درجه می‌سازد، به دو روش ترسیمی و محاسباتی تعیین کنید.

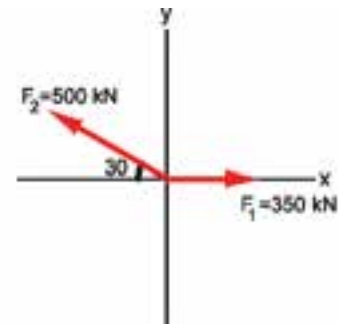
۱-۳- برآیند نیروها در شکل‌های زیر را به دو روش ترسیمی و محاسباتی تعیین کنید.



شکل ۱-۴۰



شکل ۱-۳۹

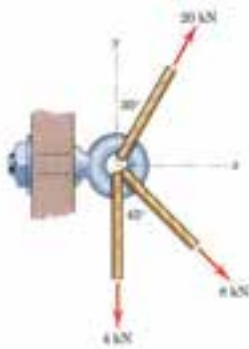


شکل ۱-۳۸

۱-۴- جسمی تحت تأثیر یک نیروی  $12 N$  عمودی رو به بالا و یک نیروی افقی  $2^\circ N$  به سمت راست قرار دارد. اندازه

و زاویه نیروی برآیند را به دو روش ترسیمی و محاسباتی محاسبه کنید.

۱-۵- اندازه و زاویه نیروی برآیند وارد بر بیج شکل ۱-۴۱ را محاسبه کنید.



شکل ۱-۴۱

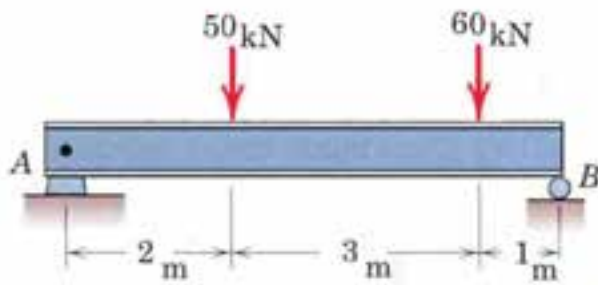
۱-۶ سه نیروی  $4^\circ N$ ،  $5^\circ N$  و  $75^\circ N$  به ترتیب زاویه‌های  $1^\circ$ ،  $3^\circ$  و  $12^\circ$  با محور xها می‌سازند. اندازه و زاویه بردار برآیند را به دو روش ترسیمی و محاسباتی تعیین کنید.

۱-۷ جسمی با دو کابل از سقف آویزان است به صورتی که هر یک از کابل‌ها با راستای عمود بر جسم زاویه  $5^\circ$  می‌سازند. اگر نیروی کشش در آنها  $65^\circ N$  باشد، جرم جسم چقدر است؟

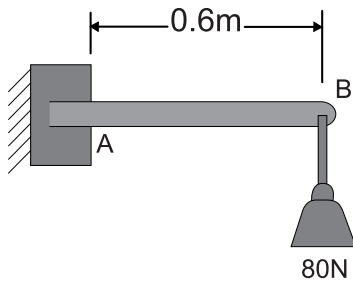
۱-۸ در ستون وسط جدول زیر سیستم‌های مکانیکی مختلفی نمایش داده شده و در ستون چپ، نمودار جسم آزاد ترسیم شده است. نمودارهای جسم آزاد را با اضافه کردن نیروهای لازم کامل کنید. از جرم اجسام صرف‌نظر کنید. برای سادگی کار اندازه‌ها و زوایا نمایش داده نشده‌اند.

جدول ۱-۳

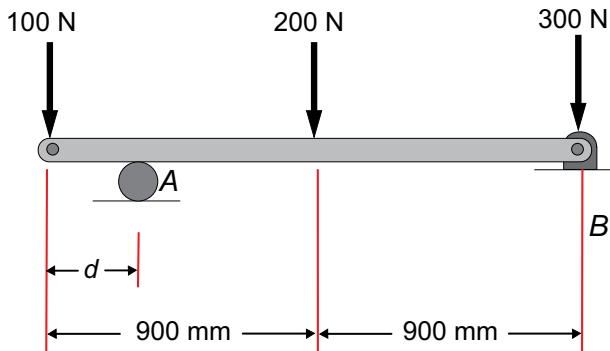
نمودار جسم آزاد نا تمام	جسم	توضیح
		<p>اهرم که در نقطه A بین شده است توسط نیروی کششی کابل، وزنه m را نگه داشته است</p>
		<p>اهرم کنترل که با نیروی کشیده می‌شود در نقطه O لولا شده است</p>
		<p>بازوی OA در نقطه O بین شده و توسط کابل در نقطه B نگه داشته شده است</p>
		<p>جعبه به جرم m بر روی سطح زبری قرار دارد و در نقطه A به دیوار بدون اصطکاک تکیه داده شده است</p>



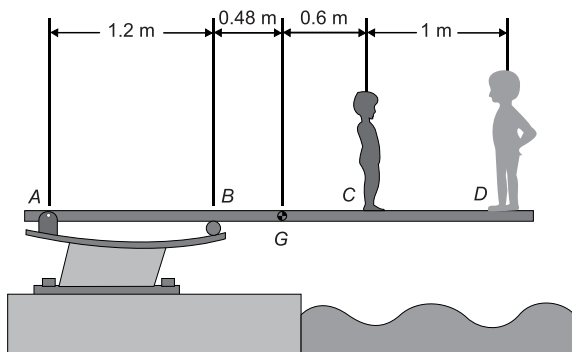
شکل ۱-۴۲



شکل ۱-۴۳



شکل ۱-۴۴



شکل ۱-۴۵

۱-۹- به تیری مطابق شکل نیروی  $F$  وارد شده است. تکیه‌گاه تیر در نقطه  $B$  غلتکی و در نقطه  $A$  لولایی است. عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها را محاسبه کنید. از وزن تیر صرف‌نظر نمایید.

۱-۱۰- اگر در مسأله فوق تیر از نوع IPB450 باشد، وزن تیر را از جدول پیوست (ب- ۳) محاسبه نموده و سپس عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها را محاسبه نمایید.

۱-۱۱- وزنه  $80\text{N}$  مطابق شکل رو به رو، از تیری که در نقطه  $A$  تکیه‌گاه ثابت دارد، آویزان شده است. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه  $A$  را محاسبه نمایید.

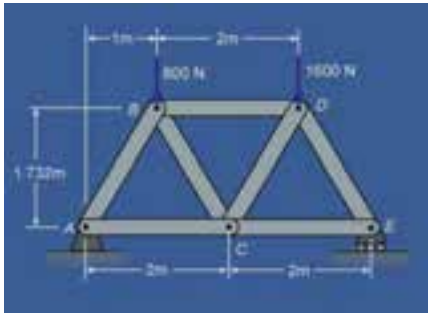
۱-۱۲- حداکثر مقدار مجاز عکس‌العمل تکیه‌گاه  $A$ ،  $360\text{N}$  است. با چشم پوشی از وزن تیر، مقدار فاصله  $d$  چقدر می‌تواند باشد تا نیروی وارد شده بر تکیه‌گاه  $A$  از مقدار مجاز تجاوز نکند.

۱-۱۳- دو پسر بچه روی یک تخته شیرجه به جرم  $65\text{kg}$  ایستاده‌اند. اگر جرم بچه‌ها در نقاط  $C$  و  $D$  به ترتیب  $25\text{kg}$  و  $40\text{kg}$  باشد، مطلوب است:

الف) نیروی عکس‌العمل در تکیه‌گاه  $A$

ب) نیروی عکس‌العمل در تکیه‌گاه  $B$





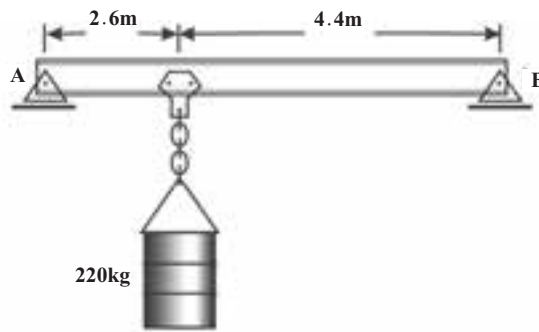
شکل ۱-۴۶

۱-۱۴- در خریای نشان داده شده عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های A و E را محاسبه کنید.

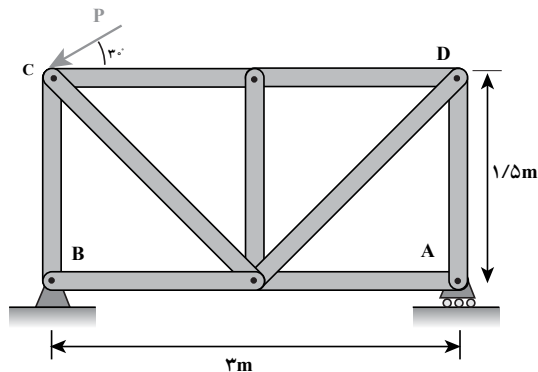
۱-۱۵- بشکه‌ای به جرم  $220 \text{ kg}$  به وسیله جرثقیل حمل می‌شود. اگر از وزن جرثقیل صرف‌نظر شود مطلوب است:

الف) نیروی عکس‌العمل در تکیه‌گاه A

ب) نیروی عکس‌العمل در تکیه‌گاه B



شکل ۱-۴۷



شکل ۱-۴۸

۱-۱۶- نیروی  $12 \text{ kN}$  در خریای روبه‌رو به نقطه C وارد شده است. عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های A و B را محاسبه کنید.

