

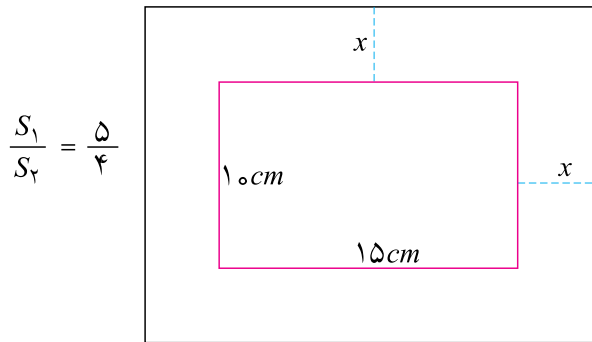
معادلات درجه دوم و حل آن‌ها



معمولاً چتربازان پس از کمی سقوط آزاد، چتر خود را باز می‌کنند. فکر می‌کنید چه مدت طول می‌کشد که یک چتر باز ۲۰ متر سقوط آزاد کند؟

معادلات درجه دوم

مریم می خواهد برای یکی از عکس های خانوادگی خود که ۱۵ سانتی متر طول و ۱۰ سانتی متر عرض دارد، یک قاب عکس تهیه کند. عکس باید از کناره های قاب فاصله های مساوی داشته باشد و می خواهیم نسبت مساحت قاب (S_1) به مساحت عکس (S_2) $\frac{5}{4}$ باشد. طول و عرض این قاب چقدر باید باشد؟



اگر عرض حاشیه ایجاد شده در قاب مورد نظر را x بنامیم، طول و عرض قاب ۲ $15 + 2x$ و ۱۰ $10 + 2x$ خواهد بود، پس $(15 + 2x)(10 + 2x)$ S_1 و 15×10 S_2 و باید داشته باشیم.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(15 + 2x)(10 + 2x)}{15 \times 10} = \frac{5}{4}$$

رابطه بالا یک معادله بر حسب x است و باید به دنبال مقداری برای x بگردیم تا تساوی بالا برقرار شود. آن مقداری از x که تساوی بالا را برقرار می کنند جواب های معادله بالا نامیده می شوند.

معادله هایی را که پس از ساده کردن، بالاترین درجه متغیر آن ۲ باشد معادله درجه دوم می نامند.

معادله مربوط به قاب عکس یک معادله درجه دوم است، زیرا پس از ساده کردن به صورت زیر درمی آید.

$$8x^2 + 100x + 75 = 0$$

مثال: یک نخ به طول یک متر در اختیار داریم و می خواهیم با آن یک مستطیل بسازیم که مساحت آن ۶۰۰ سانتی متر مربع باشد. طول و عرض این مستطیل چقدر باید باشد؟

اگر طول و عرض این مستطیل را بر حسب سانتی متر x و y بنامیم باید داشته باشیم $xy = 600$ و $2(x + y) = 100$.

از معادله اول نتیجه می‌شود $x = 50$ و با جایگذاری در معادله دوم داریم $x(50) = 600$. این نیز یک معادله درجه دوم بر حسب x است، زیرا پس از ساده کردن به شکل $x^2 - 50x - 600 = 0$ در می‌آید. مثال: اعدادی بیابید که مربع آن‌ها ۱۲ واحد بیشتر از خودشان باشد. اگر چنین عددی را x بنامیم، باید داشته باشیم $x^2 - 12x = 0$. این یک معادله درجه دوم بر حسب x است و جواب‌های این معادله همان اعداد موردنظر هستند.

آیا هر معادله درجه ۲ جواب دارد؟ به عنوان مثال، آیا عددی هست که جمع مربع آن با ۱ صفر شود؟ اگر چنین عددی وجود داشته باشد، جواب معادله $x^2 - 1 = 0$ خواهد بود. اما مربع هر عددی نامنفی است و اگر با ۱ جمع شود صفر نخواهد شد. پس این معادله جواب ندارد.

در مثال قبل اعدادی وجود دارند که مربع آن‌ها ۱۲ واحد بیشتر از خودشان باشند. ۴ یکی از این اعداد است زیرا $4^2 - 12 \cdot 4 = 0$ در این مثال، جواب دیگری هم وجود دارد. (۳) نیز جواب این مسئله است، $3^2 - 12 \cdot 3 = 0$.

خوارزمی

ابوعبدالله محمدبن موسی خوارزمی متولد قبل از ۱۶۵ هـ. ق. ریاضی‌دان، منجم و مورخ و جغرافی‌دان ایرانی و یکی از زبردست‌ترین دانشمندان مسلمان و بزرگ‌ترین عالم عصر خود بود، به گونه‌ای که سده نهم میلادی را عصر خوارزمی می‌نامیدند. از جمله معروف‌ترین کتاب‌های او کتاب الجبر و المقابله بوده است که تا قرن ۱۶ میلادی مبنای مطالعات علمی ریاضی‌دانان اروپایی بوده است. خوارزمی در این کتاب به جای مجهول درجه اول (یعنی x) از کلمه شیء به مفهوم چیز نامعلوم استفاده می‌کند. هنگامی که اروپائیان کتاب‌های مسلمانان را به زبان خود ترجمه می‌کردند، کلمه عربی «شیء» را هم با اندکی تحریف با تلفظ xei به همین شکل برگزیدند و پس از آن که نوشتن معادلات به صورت نمادگذاری معمول شد اروپائیان « x » را که حرف اول آن واژه است به جای مجهول درجه اول اختیار کردند. او نخستین کسی است که علم جبر را به طور مستقل جبر و مقابله نامید. او روش تازه حساب را که به الگوریتم شهرت داشت در کتاب الجمع والتفریق حساب الهند آورده است. او همه انواع معادلات را به چند نوع استاندارد تبدیل و به کمک چند قاعده به حل آن‌ها می‌پردازد. از خوارزمی کتاب‌های دیگری نظیر کتاب الحساب و صورة الارض وجود دارد. او در سال ۲۳۳ هـ. درگذشت.

روش های حل معادلات درجه دوم

برای حل معادلات درجه دوم روش های متعددی وجود دارد که در این بخش برخی از آن ها را توضیح خواهیم داد.

روش آزمون و خطا

ساده ترین روش حل معادله های درجه دوم، روش آزمون و خطا است که یک جواب تقریبی به دست می دهد و در مورد معادلات پیچیده تر نیز می توان آن را به کار برد.

فعالیت



می خواهیم معادله $x^2 - 12x + 34 = 0$ را حل کنیم.

۱- جدول زیر را کامل کنید.

x	۰	۱	۲
$x^2 - 12x + 34$			

۲- آیا با اضافه شدن مقادیر x، مقادیری که برای $x^2 - 12x + 34$ یافته اید در حال نزدیک شدن به صفر است؟

۳- مقادیر x در سطر اول را ادامه دهید تا جایی که مقادیر سطر دوم هم چنان به صفر نزدیک شوند و در جایی منفی شوند.

۴- مقدار $x^2 - 12x + 34$ به ازای ۴، مثبت و به ازای ۵، منفی است. ثابت می شود که در چنین حالتی یک جواب معادله بین ۴ و ۵ است. برای یافتن دقیق تر جواب جدول زیر را کامل کنید.

x	۴	۴/۳	۴/۵	۴/۸	۵
$x^2 - 12x + 34$					

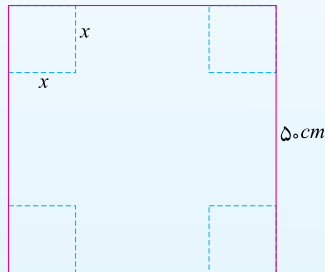
۵- با استفاده از جدول، مقادیری برای x بیابید که جواب معادله بین آن ها باشد.

۶- روش بالا را تکرار کنید و در فاصله های کوچکتر به دنبال جواب بگردید. جواب این معادله را با دقت یک رقم اعشار تعیین کنید.

البته، یک معادله درجه دوم ممکن است دو جواب داشته باشد و با روش بالا فقط یکی از جواب‌ها به طور تقریبی محاسبه می‌شود. برای به دست آوردن جواب دیگر باید حدسی در مورد مقدار آن جواب داشته باشیم. با تکرار روش بالا و مقداردهی مناسب به متغیر، می‌توانیم به آن جواب برسیم.



تمرین در کلاس



در یک مغازه شیرینی فروشی، با مقواهای مربعی به طول 50° سانتی متر و بریدن گوشه‌های آن به صورت مربع و تا کردن کناره‌های آن، جعبه می‌سازند. از گوشه‌های مربع بزرگ، چه مربع‌هایی را ببریم تا حجم جعبه ساخته شده، 7000° سانتی متر مکعب شود.

- ۱- طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شوند را x بنامید و حجم جعبه ساخته شده را بر حسب x بنویسید.
- ۲- معادله‌ای تشکیل دهید که با حل آن، جواب مسئله به دست آید.
- ۳- این معادله، یک معادله درجه دوم نیست، ولی با روش آزمون و خطا، یک جواب تقریبی با دقت یک رقم اعشار برای آن پیدا کنید.



مسائل

- ۱- با دقت دو رقم اعشار و با استفاده از روش آزمون و خطا، یکی از دو جواب معادله $2x^2 - 2x - 1 = 0$ را حساب کنید.
- ۲- حل تقریبی معادله $x^2 - 2 = 0$ به معنی محاسبه تقریبی $\sqrt{2}$ است. با استفاده از روش آزمون و خطا، $\sqrt{2}$ را با دقت دو رقم اعشار حساب کنید.

روش هندسی

معادله $x^2 - 6x + 7 = 0$ را در نظر بگیرید. این معادله را به صورت $x^2 - 6x + 9 = 2$ می‌نویسیم. می‌توانیم بگوییم جواب این معادله آن مقداری از x است، که به ازای آن مقدار دو چند جمله‌ای $x^2 - 6x + 9$ با هم برابر شوند. همانند روش آزمون و خطا می‌توان عمل کرد و با حدس مقادیر مختلف برای x ، مقادیر $x^2 - 6x + 9$ را محاسبه می‌کنیم و با انتخاب‌های مناسب برای x ، کاری می‌کنیم که مقدار این دو چند جمله‌ای به هم نزدیک شوند.



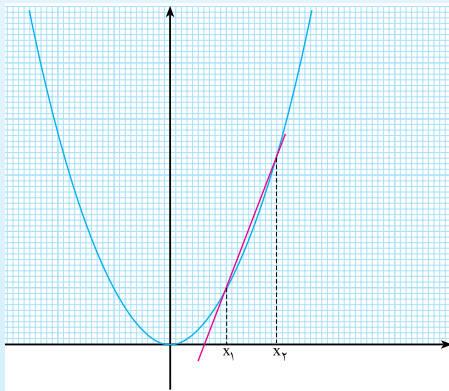
می‌خواهیم معادله $x^2 - 2x + 1 = 0$ را حل کنیم.

۱- جدول زیر را کامل کنید.

x	-1	0	1	2	3
x^2	1	0	1		
$2x+1$	-1	1			

۲- اعداد قرار گرفته در این جدول را می‌توان به صورت نمودار دو معادله x^2 و $2x + 1$ در صفحه نمایش داد. جاهایی که مقدار این دو چندجمله‌ای مساوی می‌شوند، چه نقطه‌هایی از این دو نمودار را نشان می‌دهند؟

۳- در جدول به ازای هیچ مقداری از x دو چند جمله‌ای x^2 و $2x + 1$ مساوی نشده‌اند. با رسم نمودارهای معادلات x^2 و $2x + 1$ و یافتن محل‌های تقاطع این دو نمودار و اندازه‌گیری طول نقطه‌های تقاطع، به طور تقریبی جواب‌های معادله $x^2 - 2x + 1 = 0$ را به دست آورید.



مثال ۱: برای حل یک معادله درجه دوم مانند

$x^2 - 14x + 9 = 0$ ، می‌توانیم آن را به صورت

$x^2 = \frac{14}{5}x - \frac{9}{5}$ بنویسیم. اگر نمودارهای معادله

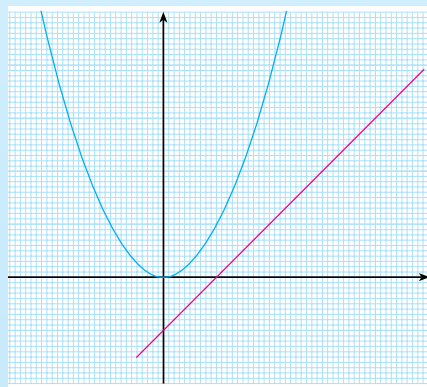
x^2 و $y = \frac{14}{5}x - \frac{9}{5}$ را رسم کنیم، محل‌های

برخورد این دو نمودار جاهایی را نشان می‌دهد که به

ازای مقدارهایی از x مقدارهای x^2 و $\frac{14}{5}x - \frac{9}{5}$

مساوی شده‌اند. این مقدارهای x همان طول نقاط تقاطع

نمودارها هستند و جواب معادله می‌باشند.



مثال ۲: وضعیت جواب‌های معادله $x^2 - x + 1 = 0$ را با

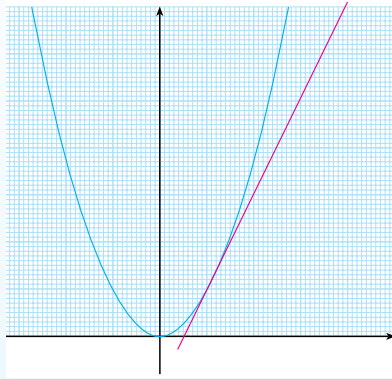
روش هندسی تعیین کنید.

این معادله را به صورت $x^2 - x + 1 = 0$ می‌نویسیم. اگر نمودار

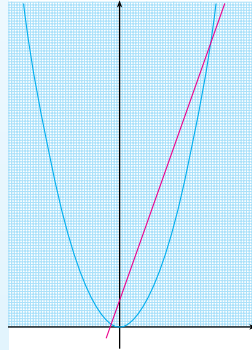
معادله x^2 و $y = x + 1$ را رسم کنیم، دیده می‌شود

که این نمودارها همدیگر را قطع نمی‌کنند. پس این معادله

جواب ندارد.



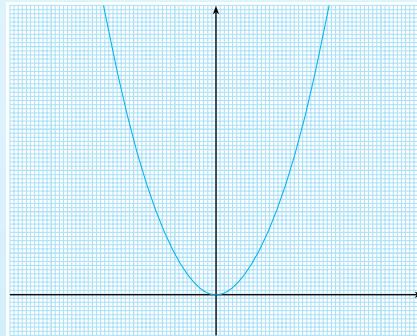
مثال ۳: وضعیت جواب‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ را با روش هندسی تعیین کنید.
این معادله را به صورت $x^2 - 2x = 1$ می‌نویسیم. اگر نمودار معادله x^2 و $y = 2x - 1$ را رسم کنیم، دیده می‌شود که این نمودارها حالت مماس بر هم دارند. حدس می‌زنیم معادله فقط یک جواب دارد. با محاسبات جبری باید درستی حدس خود را بیازماییم.



مثال ۴: وضعیت جواب‌های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ را با روش هندسی تعیین کنید.
این معادله را به صورت $x^2 - 3x = 1$ می‌نویسیم. اگر نمودار معادله x^2 و $y = 3x - 1$ را رسم کنیم، دیده می‌شود که این نمودارها همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. پس این معادله دو جواب دارد.



تمرین در کلاس

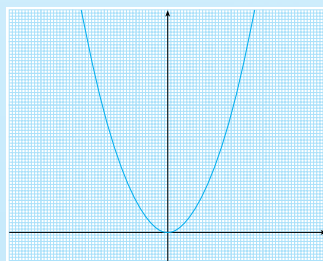


۱- نمودارهای خط‌های $y = 2x - 1$ و $y = 2x - 2$ را رسم کنید و محل تقاطع آن‌ها را با نمودار x^2 تعیین کنید.

۲- از میان معادلات $x^2 - 2x - 2 = 0$ و $x^2 - 2x - 1 = 0$ و $x^2 - 2x - 1 = 0$ تعیین کنید کدام یک جواب دارند و چند جواب دارند.



مسائل



۱- با رسم نمودار نشان دهید معادله $x^2 - 4 = 0$ جواب ندارد.
۲- معادلات زیر را با روش رسم نمودار حل کنید و جواب‌های آن را به طور تقریبی به دست آورید.
الف) $x^2 - x - 1 = 0$ ب) $x^2 - 4x - 3 = 0$
ج) $4x^2 - 8x = 0$

روش تجزیه

در مواردی، معادله درجه دوم به صورت ضرب دو چندجمله‌ای درجه ۱ مساوی صفر است. به عنوان مثال معادله $(2x - 3)(x - 1) = 0$ را در نظر بگیرید. حل این گونه معادلات بسیار ساده است، زیرا طبق یکی از خواص اساسی اعداد،

برای آن که ضرب دو عدد صفر شود باید حداقل یکی از آن دو عدد صفر باشد.

بنابراین $(2x - 3)(x - 1) = 0$ فقط در حالتی صفر است که $x - 1 = 0$ یا $2x - 3 = 0$ صفر شوند. پس، جواب‌های دو معادله $x = 1$ و $x = \frac{3}{2}$ ، همان جواب‌های معادله $(2x - 3)(x - 1) = 0$ است.

یک معادله درجه دوم به صورت تساوی یک چندجمله‌ای درجه دوم با صفر است. اگر بتوانیم این چندجمله‌ای را تجزیه کنیم، می‌توانیم به روش بالا آن را حل کنیم. این روش حل را روش تجزیه می‌نامند.

مثال ۱: معادله $x^2 - 5x = 0$ را حل کنید.

این معادله را به صورت $x(x - 5) = 0$ می‌نویسیم. در نتیجه جواب‌های آن $x = 0$ و $x = 5$ خواهند بود.

مثال ۲: معادله $x^2 - 5x - 6 = 0$ را حل کنید.

چندجمله‌ای $x^2 - 5x - 6$ را تجزیه می‌کنیم. $(x - 3)(x + 2) = x^2 - 5x - 6$ ، در نتیجه جواب‌های این معادله $x = 3$ و $x = -2$ خواهند بود.

مثال ۳: معادله $2x^2 - 5x + 3 = 0$ را حل کنید.

می‌توان چندجمله‌ای $2x^2 - 5x + 3$ را تجزیه کرد. این چندجمله‌ای را در فصل ۴ با روش‌های معمول تجزیه کرده‌ایم.

$$(2x - 1)(x - 3) = 2x^2 - 5x + 3$$

بنابراین، معادله اصلی را می‌توانیم به صورت $(2x - 1)(x - 3) = 0$ بنویسیم. در نتیجه جواب‌های این معادله $x = \frac{1}{2}$ و $x = 3$ خواهند بود.

اگر بتوانیم چندجمله‌ای مربوط به یک معادله درجه دوم را تجزیه کنیم به دو معادله درجه اول می‌رسیم که جواب دارند. بنابراین آن دسته از معادلات درجه دوم که جواب ندارند، چندجمله‌ای آن‌ها قابل تجزیه نخواهد بود. آخرین مثال نشان می‌دهد که کاربرد روش تجزیه بسیار محدود است، زیرا عمل تجزیه در بسیاری موارد کار آسانی نیست.

مسائل

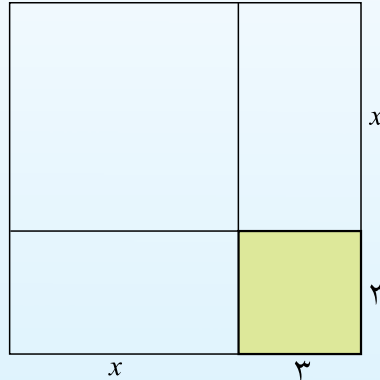
۱- معادلات زیر را با روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^2 - 7x + 6 = 0$ ب) $(x - 1)(x - 1) = 0$ ج) $4x^2 - 3x - 2 = 0$



خوارزمی برای حل معادلات درجه دوم شش حالت خاص را بررسی کرده است. از میان این حالت ها فقط یکی از آن ها را توضیح خواهیم داد.

معادله $x^2 + 6x + 4 = 0$ را در نظر بگیرید. در روش خوارزمی جمله های دارای مجهول را در یک طرف تساوی نگه می داریم و عدد ثابت را به طرف دیگر می بریم. بنابراین،



این معادله را به صورت $x^2 + 6x + 4 = 9$ می نویسیم. نصف ضریب x را حساب می کنیم که در اینجا عدد ۳ است. مساحت مربعی با ضلع ۳ را می توان حساب کرد.

در شکل روبه رو مساحت مربع رنگی برابر 3×3 است و بقیه مربع، مساحت $x^2 + 6x + 4$ دارد که آن هم برابر ۹ است. پس کل مربع بزرگ، مساحت $4 + 6x + x^2$ دارد. پس، طول ضلع مربع بزرگ برابر $\sqrt{49} = 7$ است، یعنی $7 = 3 + x$. در نتیجه $x = 4$.



تمرین در کلاس

معادله $x^2 + 2x + 4 = 0$ را با روش خوارزمی حل کنید.

همه معادلات درجه دوم را نمی توان با این روش حل کرد، زیرا این روش نیازمند یک تعبیر هندسی از معادله است و برخی معادلات را نمی توان با این روش تعبیر هندسی کرد. علاوه بر این، با این تعبیر هندسی، فقط یکی از جواب های معادلات درجه دوم به دست می آید. خوارزمی برای حل معادلات درجه دوم در حالت های دیگر روش های دیگری را ساخته است.



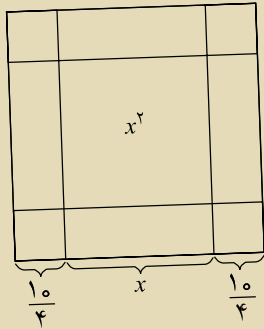
مسائل

۱- معادلات زیر را با روش خوارزمی حل کنید.

الف) $x^2 + 4x + 5 = 0$

ب) $4x^2 + 4x + 3 = 0$

ریاضی دانان مسلمان به جای x^2 ، لفظ «مکعب»، به جای x^2 لفظ «مال»، به جای x ، لفظ «ریشه»، «شیء»، «ضلع» یا «جذر» و به جای مقدار عددی لفظ «درهم» یا «عدد» را به کار می بردند. خیام و خوارزمی روش مشابهی را برای اثبات جواب معادله «مالی و ده جذر معادل سی و نه درهم» به کار برده اند.



این معادله را با زبان امروزی بنویسید. آیا می توانید از روی شکل اثبات را تکمیل کنید؟

روش مربع کامل

در این روش با استفاده از جملات شامل متغیر یک مربع کامل می نویسیم و سپس با تغییرات مناسب معادله را حل می کنیم.

مثال ۱: معادله $x^2 + 20x + 30 = 0$ را حل کنید.

نصف ضریب x عدد 10 است و چندجمله ای $(x + 10)^2$ را در نظر می گیریم. این چندجمله ای رابطه مشخصی با چندجمله ای $x^2 + 20x$ دارد.

$$(x + 10)^2 - (x^2 + 20x) = 100$$

با توجه به تساوی بالا می توانیم معادله اصلی را به صورت $(x + 10)^2 - 100 = 30$ بنویسیم که پس از

ساده سازی به صورت $(x + 10)^2 = 70$ در می آید. در نتیجه $x + 10$ برابر ریشه های دوم 70 است، یعنی

$$x + 10 = \pm\sqrt{70}$$

جواب های این معادله عبارتند از: $x = 10 + \sqrt{70}$ و $x = 10 - \sqrt{70}$.

در روش به کار گرفته شده در مثال فوق، چندجمله $x^2 + 20x$ را بر حسب $(x + 10)^2$ نوشتیم، بنابراین روش را روش مربع کامل می نامند.

مثال ۲: معادله $x^2 + 2bx + 15 = 0$ را حل کنید.

در این جا، نصف ضریب x برابر b است و چندجمله ای $x^2 + 2bx$ را بر حسب $(x + b)^2$ می نویسیم.

$$(x + b)^2 - (x^2 + 2bx) = b^2$$

پس، معادله اصلی به صورت $b^2 - 15 = (x - b)^2$ نوشته می‌شود. پس:

$$(x - b)^2 = b^2 - 15$$

$$x - b = \pm \sqrt{b^2 - 15}$$

$$x = b + \sqrt{b^2 - 15} \quad \text{و} \quad x = b - \sqrt{b^2 - 15}$$

این محاسبه وقتی قابل قبول است که $b^2 - 15$ عددی نامنفی باشد تا ریشه‌گیری از آن امکان‌پذیر باشد. پس شرط داشتن جواب در این معادله، نامنفی بودن $b^2 - 15$ است.

مثال ۳: معادله $3x^2 - 2x + c = 0$ را حل کنید.

ابتدا کاری می‌کنیم که ضریب x^2 برابر ۱ شود. طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم و معادله $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{c}{3} = 0$ را به دست می‌آوریم. حال روش قبلی را تکرار می‌کنیم.

در این جا، نصف ضریب x برابر $(-\frac{1}{3})$ است و چندجمله‌ای $x^2 - \frac{2}{3}x$ را بر حسب $(x - \frac{1}{3})^2$ می‌نویسیم.

$$(x - \frac{1}{3})^2 = (x^2 - \frac{2}{3}x) + (\frac{1}{3})^2$$

پس، معادله اصلی به صورت $(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9} + \frac{c}{3} = 0$ نوشته می‌شود. در نتیجه $(x - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} - \frac{c}{3}$.

$$(x - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} - \frac{c}{3} = \frac{1 - 3c}{9}$$

$$x - \frac{1}{3} = \pm \sqrt{\frac{1 - 3c}{9}} = \pm \frac{\sqrt{1 - 3c}}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{1 - 3c}}{3} \quad \text{و} \quad x = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{1 - 3c}}{3}$$

این محاسبه وقتی قابل قبول است که $1 - 3c$ عددی نامنفی باشد تا ریشه‌گیری از آن امکان‌پذیر باشد. پس شرط داشتن جواب در این معادله، نامنفی بودن $1 - 3c$ است.

فرمول کلی جواب‌های معادلات درجه دوم

در فعالیت صفحه بعد، روش مربع کامل را روی یک معادله درجه دوم دلخواه پیاده می‌کنیم تا تشخیص دهیم تحت چه شرایطی یک معادله درجه دوم جواب دارد و در صورت وجود جواب، فرمولی برای جواب‌های معادله درجه دوم بیابیم.



یک معادله درجه دوم دلخواه به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن a و b و c اعداد معینی هستند و a ناصفر است.

۱- طرفین معادله بالا را بر عدد ناصفر a تقسیم کنید و معادله درجه دومی بنویسید که ضریب x^2 برابر ۱ باشد. نشان دهید جواب‌های این معادله جدید همان جواب‌های معادله اصلی است.

۲- نصف ضریب x در معادله جدید برابر $\frac{b}{2a}$ است. چندجمله‌ای $(x + \frac{b}{2a})^2$ را با چندجمله‌ای معادله جدید مقایسه کنید.

۳- معادله جدید را بر حسب $(x + \frac{b}{2a})^2$ بنویسید و نتیجه بگیرید $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

۴- تحت چه شرایطی تساوی بالا امکان‌پذیر است؟ تحت چه شرایطی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ جواب دارد؟

۵- نشان دهید که اگر $b^2 - 4ac$ مثبت باشد، طرف دوم معادله جذر دارد و جواب‌های معادله اصلی برابر

$$\text{جواب‌های دو معادله } x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ و } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ است.}$$

۶- نتیجه بگیرید، معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در صورت داشتن جواب، دارای جواب‌های زیر است.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

خوارزمی نیز تمام عملیات گفته شده این بخش را برای حل یک معادله درجه دوم انجام داده بود ولی در محاسبه جواب‌ها فقط از ریشه مثبت عبارت $b^2 - 4ac$ استفاده نموده است، بنابراین مناسب است که این فرمول‌ها را فرمول‌های خوارزمی برای معادلات درجه دوم بنامیم.

در هر معادله درجه ۲ به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ، عبارت $b^2 - 4ac$ را با Δ نشان می‌دهند. شرط وجود جواب برای یک معادله درجه دوم آن است که $\Delta \geq 0$ یا $\Delta > 0$.

اگر $\Delta < 0$ ، معادله دو جواب دارد که عبارتند از:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

اگر Δ معادله فقط دارای یک جواب $x = -\frac{b}{2a}$ است.
اگر $\Delta < 0$ معادله جواب ندارد.

مثال ۱: جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ را در صورت وجود پیدا کنید.
در این معادله داریم $5 = 1 \times 1 - 4 \times 1 \times 1 = \Delta$ چون $\Delta > 0$ ، این معادله دارای دو جواب زیر است.

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

مثال ۲: جواب‌های معادله $x^2 - 12x + 4 = 0$ را در صورت وجود پیدا کنید.
در این معادله داریم $144 = 4 \times 4 - 4 \times 9 \times 4 = \Delta$ چون $\Delta < 0$ ، این معادله دارای یک جواب $x = -\frac{-12}{18} = \frac{2}{3}$ است.

مثال ۳: جواب‌های معادله $x^2 - 2x + 1 = 0$ را در صورت وجود پیدا کنید.
در این معادله داریم $0 = 1 - 4 \times 1 \times 1 = \Delta$ چون $\Delta = 0$ ، این معادله جواب ندارد.



تمرین در کلاس

معادله مربوط به قاب عکس را که در ابتدای این فصل به دست آمد، حل کنید و جواب‌های آن را تفسیر کنید.



مسائل

۱- با روش مربع کامل معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 - 3x + 1 = 0$ ب) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

۲- کدام یک از معادلات زیر فقط یک جواب دارند؟ جواب آن را بیابید.

الف) $x^2 - 4x + 7 = 0$ ب) $x^2 - 6x + 9 = 0$

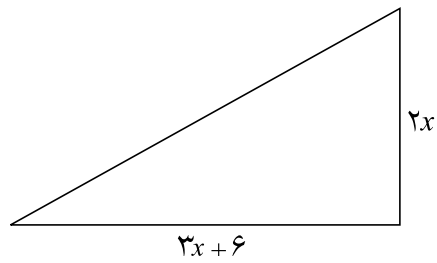
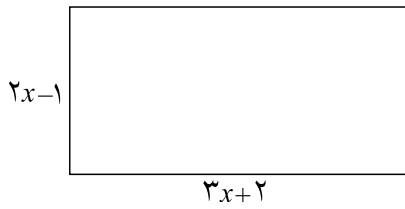
۳- با استفاده از فرمول کلی جواب‌های معادلات درجه دوم، معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 - 2x + 3 = 0$ ب) $x^2 - 8x + 7 = 0$

۴- اگر یکی از جواب‌های معادله $ax^2 + 4x + 2 = 0$ برابر (۴) باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۵- اگر طول مستطیلی دو برابر عرض آن باشد و مساحت آن 200 سانتی متر مربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟

۶- در زیر مساحت مثلث و مستطیل رسم شده مساوی هستند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ مسئله چند جواب دارد؟



۷- اگر a عددی مثبت باشد و طول اضلاع یک مثلث قائم الزاویه برابر $2a$ و 1 و $2a$ و $2a$ شده باشد، کدام عدد طول وتر خواهد بود؟ طول اضلاع این مثلث را بیابید.