

عبارت‌های گویا



برای آن که عکس واضحی روی دوربین ایجاد شود، عدسی دوربین به عقب یا جلو حرکت می‌کند. دلیل این امر قوانین فیزیکی مربوط به نور و عدسی‌ها است. محاسبات لازم برای یافتن مکان عدسی، محاسباتی جبری است.

حل یک مسئله

آقای صالحی، پدر یکی از دانش‌آموزان این مدرسه، می‌خواهد تا عید امسال خانه خود را رنگ بزند. یک نقاش گفته است می‌تواند خانه را در ۱۲ روز نقاشی کند. نقاش دیگری گفته است می‌تواند خانه را در ۹ روز نقاشی کند. آقای صالحی برای سرعت بیشتر، از این دو نقاش خواسته است با هم خانه را رنگ بزنند. آقای صالحی از پسر خود خواسته است که حساب کند کار نقاشی خانه چقدر طول خواهد کشید. احمد این مسئله را در کلاس مطرح کرد و گفت من فکر کردم جواب این مسئله باید ۲۱ ۹ ۱۲ باشد، ولی پدرم این جواب را درست ندانست.

معلم از سایر دانش‌آموزان پرسید: چرا این جواب نادرست است؟

اکبر گفت: روشن است که این جواب نادرست است، زیرا هر کدام از نقاش‌ها اگر به تنهایی هم کار می‌کردند در ۹ روز یا ۱۲ روز کار را تمام می‌کردند، پس وقتی با هم کار کنند باید انجام کار، زمان کمتری طول بکشد نه این که بیشتر طول بکشد.

معلم پرسید: پس جواب درست چیست؟

اکبر گفت: تقریباً هر کدام از نقاش‌ها نیمی از کار را انجام می‌دهند، پس جواب، عددی بین $\frac{4}{5}$ تا ۶ روز باید باشد.

معلم گفت: این یک جواب تقریبی است و تخمین آن درست است ولی برای توجیه درستی این تخمین استدلال بهتری لازم است. آیا می‌توانید روشی برای به دست آوردن جواب دقیق ارائه کنید؟
حسن گفت: ما باید بتوانیم سرعت کار کردن این دو نقاش را با هم مقایسه کنیم. بهتر است بدانیم هر کدام از این‌ها در یک روز چه مقدار از خانه را رنگ می‌کنند.

با توجه به این که نقاش اول در ۱۲ روز تمام خانه را رنگ می‌کند، او در یک روز $\frac{1}{12}$ خانه را رنگ می‌کند. با

همین استدلال نقاش دوم در یک روز $\frac{1}{9}$ خانه را رنگ می‌کند. پس هر دو با هم در یک روز $\frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{7}{36}$ خانه را رنگ می‌کنند.

اگر تعداد روزهای لازم برای رنگ کردن خانه

را X در نظر بگیریم تناسب روبه‌رو را تشکیل می‌دهیم.

روز	کار
۱	$\frac{7}{36}$
x	۱



بیتدیشیم

۵,۱۴ روز

چه معنایی دارد؟

$$\frac{7}{36} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1 \times 1}{\frac{7}{36}} = \frac{36}{7} \approx 5/14$$



فعالیت

یک حوض در نظر بگیرید که توسط دو شیر آب پر می‌شود. فرض کنید شیر اول به تنهایی در a ساعت حوض را پر می‌کند و شیر دوم به تنهایی در b ساعت حوض را پر می‌کند و اگر این دو شیر را با هم باز کنیم حوض در x ساعت پر خواهد شد. با انجام مراحل زیر می‌خواهیم x را بر حسب a و b حساب کنیم.

۱- شیر اول به تنهایی در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می‌کند؟

۲- شیر دوم به تنهایی در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می‌کند؟

۳- هر دو شیر با هم در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می‌کنند؟

۴- وقتی هر دو شیر با هم باز هستند در x ساعت حوض پر می‌شود، در یک ساعت چه کسری از حوض پر می‌شود؟

۵- با توجه به محاسبات بالا، رابطه ریاضی بین x و a و b را بنویسید.

در انجام فعالیت بالا معادله

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$$

به دست می‌آید که برای حل آن به شکل زیر عمل می‌کنیم.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{a+b}{ab}$$

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

بنابراین، اگر دو شیر آب همزمان باز باشند، حوض در $\frac{ab}{a+b}$ ساعت پر خواهد شد.

اگر از ما بپرسند حوضی هست که از درون آن سه رود می‌گذرد که از گذر یک رود، حوض در سه روز پر می‌شود، رود دوم در چهار روز و رود سوم در پنج روز پر می‌شود. اگر هر سه رود هم‌زمان در حوض وارد شوند، در چند روز حوض پر می‌شود؟

پاسخ آن است که جواب آن را بگیریم سه و چهار و پنج، مقدار روزها را به مخرج‌ها می‌آوریم می‌شود ثلث و ربع و خمس $(\frac{1}{3})$ ، $(\frac{1}{4})$ و $(\frac{1}{5})$. سپس ثلث و ربع و خمس را به مخرج شصت می‌آوریم. بیست، پانزده و دوازده، آن را جمع می‌کنیم می‌شود چهل و هفت و مخرج آن را که شصت است بر آن تقسیم می‌کنیم که جواب می‌شود و سیزده از چهل و هفت می‌ماند پس حوض در مدت یک روز و شش ساعت و چهل دقیقه پر می‌شود.

(مسئله از مفتاح المعاملات)

همان گونه که در فعالیت بالا دیدید، در حل بسیاری از مسائل لازم است عبارتهایی مانند $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ و $\frac{ab}{a+b}$ را در نظر بگیریم و روی آن‌ها محاسباتی انجام دهیم. این گونه عبارتهای گویا می‌نامند.

عبارت های جبری که پس از ساده کردن، به صورت تقسیم دو چند جمله ای در می‌آیند را یک عبارت گویا می‌نامند.

برای مثال، عبارت های جبری زیر عبارت های گویا هستند.

$$\frac{x+2}{x-1}, \quad \frac{xy+x^2+1}{x^2+y^2}, \quad \frac{a^2b+b^2a}{a+b}, \quad 4xy^2, \quad 7$$

ولی، عبارت های جبری زیر، عبارت گویا نیستند.

$$\sqrt{x}+1, \quad \frac{2-x^2\sqrt{y}}{y^2+x}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+y}}$$



تمرین در کلاس

زمینی مستطیلی شکل در نظر بگیرید که طول و عرض آن به ترتیب X متر و Y متر باشند.

- ۱- اگر در این زمین یک مستطیل را جدا کنیم که عرض آن نصف عرض زمین و طول آن یک سوم طول زمین باشد، مساحت آن چقدر خواهد شد؟ نسبت مساحت این قسمت به مساحت کل زمین چقدر خواهد بود؟
- ۲- اگر در گوشه ای از این زمین باغچه ای بسازیم که طول آن 20° متر کمتر از طول زمین و عرض آن 30° متر کمتر از عرض زمین باشد، محیط این باغچه برحسب X و Y چند متر و مساحت آن چند متر مربع است؟
- ۳- مساحت باغچه چه کسری از مساحت کل زمین است؟
- ۴- کدام یک از عبارتهای زیر عبارت گویا نیستند؟

الف) $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ ب) $\frac{x^2-x+1}{y+\sqrt{3}}$ ج) $3x-7$

یک عبارت گویا، نشان دهنده یک عدد است که با جایگذاری مقادیرهایی برای متغیرهایش محاسبه می‌شود.

برای مثال، مقدار عبارت $\frac{x}{x+1}$ ، به ازای ۴ x برابر است با $\frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$ و مقدار این عبارت به ازای ۵ x

برابر است با $\frac{5}{-5+1} = \frac{5}{-4}$. به ازای ۱ x مخرج این عبارت گویا صفر می‌شود، بنابراین، این عبارت گویا به ازای ۱ x تعریف نشده است.

در چند جمله‌ای‌ها، چون از عمل تقسیم استفاده نمی‌شود، به ازای هر مقداری از متغیرهایش مقدار عددی چند جمله‌ای قابل محاسبه است. اما، در عبارت‌های گویا چون عمل تقسیم نیز وجود دارد، ممکن است به ازای برخی مقادیر برای متغیرهایش، مخرج عبارت صفر شود و در این حالات مقدار عبارت تعریف نشده است.

مثال: عبارت $\frac{y^2 - y + x}{x^2 - 1}$ به ازای مقادیرهای ۱ x و ۱ x تعریف نشده است (چرا؟)، ولی به ازای سایر

مقادیر تعریف شده است. مثلاً، به ازای ۰ x و ۳ y مقدار این عبارت برابر است با $-\frac{6}{-1} = \frac{6}{1} = 6$.

تمرین در کلاس



۱- الف) به ازای چه مقداری برای X مقدار عبارت $\frac{x}{x+1}$ برابر ۸ می‌شود؟
ب) آیا مقداری برای X می‌توان قرار داد که مقدار این عبارت برابر ۱ شود؟ چرا؟

ج) اگر $\frac{x}{x+1}$ مساوی a باشد، X را بر حسب a حساب کنید.

۲- به ازای چه مقداری برای m دو عبارت $\frac{4}{m+1}$ و $\frac{2}{m-2}$ مقدار یکسانی خواهند داشت؟

عبارت‌های گویا به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای هستند، بنابراین همانند اعدادی هستند که از طریق تقسیم دو عدد بر هم به دست می‌آیند. پس می‌توان آن‌ها را با هم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کرد و حاصل این اعمال مجدداً یک عبارت گویا خواهد بود. قواعد محاسبه با عبارت‌های گویا، همان قواعد محاسبه با چندجمله‌ای‌ها و کسرها است.



تمرین در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

۱) $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$

۲) $2 \times \frac{1}{x}$

۳) $1 + \frac{1}{b}$

۴) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

۵) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

۶) $1 \div \frac{a}{b}$

۷) $\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y-1}$

۸) $\frac{x-1}{y} - \frac{y}{x+1}$

۹) $1 - \frac{x-y}{x+y}$

مثال: مجموع و حاصل ضرب و تقسیم دو عبارت گویای $\frac{x+1}{y-1}$ و $\frac{x-1}{y+1}$ را به دست آورید.

$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{x+1}{y-1} = \frac{(x-1)(y-1) + (x+1)(y+1)}{(y+1)(y-1)} = \frac{xy - x - y + 1 + xy + x + y + 1}{y^2 - 1} = \frac{2(xy+1)}{y^2-1}$$

$$\frac{x-1}{y+1} \times \frac{x+1}{y-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(y-1)(y+1)} = \frac{x^2-1}{y^2-1}$$

$$\frac{\frac{x-1}{y+1}}{\frac{x+1}{y-1}} = \frac{x-1}{y+1} \div \frac{x+1}{y-1} = \frac{x-1}{y+1} \times \frac{y-1}{x+1} = \frac{(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}$$



تمرین در کلاس

فرض کنید A و B عبارت‌های گویایی به صورت $A = \frac{x}{x-1}$ و $B = \frac{x^2}{x^2+1}$ باشند. در هر قسمت، عبارت گویای C را چنان تعیین کنید که تساوی برقرار شود.

$\frac{A}{C} = B$ (۳)

A C B (۲)

A x B C (۱)



مسائل

۱- اعمال جبری زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{a^2b}{c} \times \frac{c^2b}{a^2}$

ب) $\frac{a}{2b} \times \frac{3b}{2a^2} \times \frac{4}{a}$

۲- هر یک از عبارت‌های گویای زیر را به صورت مجموع یا تفاضل دو عبارت گویا بنویسید.

$\frac{x+2}{y}$ ، $\frac{x+1}{x^2+1}$ ، $\frac{a-5}{b}$ ، $\frac{2b-3}{b-3}$

۳- عبارت گویایی بیابید که اگر با $\frac{x+1}{x-1}$ جمع شود، حاصل آن برابر ۳ شود.

۴- نشان دهید قدرمطلق تفاضل معکوس دو عدد طبیعی متوالی برابر است با معکوس حاصل ضرب آن‌ها.

۵- اگر نسبت y به $2x$ به y برابر $\frac{2}{3}$ باشد، نسبت X به Y چقدر خواهد بود؟

۶- اگر $3x + \frac{1}{2x} = 4$ باشد حاصل $9x^2 + \frac{1}{4x^2}$ چیست؟

۷- اعمال جبری زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x}$

ب) $\frac{c}{c+1} + \frac{2}{2c+2}$

ج) $\frac{1}{b} + \frac{4}{3b}$

د) $\frac{4}{3x^2y} - \frac{3}{2xy}$

ه) $\frac{x+3}{5} \div \frac{x-3}{5x}$

و) $\frac{a+b}{a} - \frac{a+b}{b}$

ساده کردن عبارات های گویا



فعالیت

دو عبارت $\frac{x^2+x}{x^2-x}$ و $\frac{x+1}{x-1}$ را در نظر بگیرید.

۱- مقدار این دو عبارت را به ازای مقدارهای $x=3$ و $x=5$ و $x=\frac{1}{3}$ حساب کنید و با هم مقایسه کنید.
 ۲- به ازای مقدار دیگری برای x که به دلخواه خود در نظر می گیرید دو عبارت را حساب کنید. آیا این دو مقدار مساویند؟

۳- به نظر می رسد به ازای هر مقداری برای x که مخرج را صفر نمی کند، این دو عبارت مقدارهای یکسانی دارند. چگونه می توانید از عبارت اول، عبارت دوم را به دست آورید؟

۴- صورت و مخرج عبارت دوم را تجزیه کنید و با توجه به آن که هر کسر به صورت $\frac{ac}{bc}$ با کسر $\frac{a}{b}$ مساوی است، تساوی این دو عبارت را نتیجه بگیرید.

در کسرها، می توان صورت و مخرج آن کسر را در عدد مخالف صفری ضرب یا بر آن تقسیم کرد و با این عمل، مقدار کسر تغییر نخواهد کرد.

در عبارات های گویا نیز، چون به صورت کسر می باشند، در صورت وجود، عبارت مشترکی که به صورت ضرب در صورت و مخرج قرار دارد، را می توان از صورت و مخرج حذف کرد و عبارت گویای ساده تر دیگری به دست آورد که با عبارت قبلی مساوی است. این عمل را ساده کردن کسر می نامند.

مثال ۱: عبارت گویای $\frac{ax+a}{x^2-1}$ را ساده کنید.

$$\frac{ax+a}{x^2-1} = \frac{a(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1}$$

مثال ۲: عبارت گویای $\frac{x^3+3x^2}{x^2+3x}$ را ساده کنید.

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+3x} = \frac{x(x^2+3x)}{(x^2+3x)} = x$$

مثال ۳: عبارت گویای $\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$ را ساده کنید.

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

صورت و مخرج این عبارت را تجزیه می کنیم تا بتوان عامل مشترکی را در صورت و مخرج پیدا کرد.



عبارت‌های گویای زیر را تا آن جا که ممکن است ساده کنید.

(ج) $\frac{y^2 - 4y + 3}{y^2 + 2y - 3}$

(ب) $\frac{ax^3 + x^3a}{2a^2x + 2ax^2}$

(الف) $\frac{a^2 - 4}{a + 2}$

مسائل



۱- حاصل عبارت $(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}) \times \frac{s}{r+s}$ کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

(الف) $\frac{s}{r}$ (ب) $\frac{1}{s}$ (ج) $\frac{1}{r}$

۲- اگر $A = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $B = \frac{2x}{1+x^2}$ ثابت کنید $A^2 - B^2 = 1$

۳- عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید.

(الف) $\frac{2a^2x^3}{4ax^2}$

(ج) $\frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 1}$

(ب) $\frac{3x^2 - 9x}{x^2 - 9}$

(د) $\frac{y^2z + y^3}{z^2y + z^3}$

۴- حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

(الف) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - x} \times \frac{4x^2}{x + 1}$ (ب) $\frac{4x^2 - 25y^2}{2x^2y + 5xy^2} \div \frac{6x^2 - 15xy}{9x^2y^2}$

۵- عبارت گویایی بیابید که اگر در $\frac{x^2 - y^2}{4x + y}$ ضرب شود، حاصل آن برابر xy شود.

۶- ساده شده عبارت $\frac{x^2 - 4}{1 \cdot x} \times \frac{5x^2}{x^2 - 2x}$ کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

(الف) $\frac{x+2}{2}$

(ب) $\frac{x+2}{2x}$

(ج) $x + 1$

۷- دانش‌آموزی در برگه امتحانی خود به صورت زیر نوشته است. اشتباهات او را توضیح دهید.

(الف) $\frac{x+3}{2x+5} + \frac{x+2}{2x+5} = \frac{2x+5}{2x+5} = 0$

(ب) $\frac{3x+1}{2} - \frac{1-x}{2} = \frac{3x+1-1-x}{2} = \frac{2x}{2} = x$

(ج) $\frac{-4yx^2}{2^2y} = \frac{-4yx^2}{4y} = -x^2 = x^2$

تقسیم چند جمله‌ای‌ها

در ساده کردن عبارت‌های گویا، حالت‌هایی پیش می‌آید که نتیجه ساده شدن یک چند جمله‌ای است. به عنوان مثال، می‌دانیم $(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$ ، بنابراین

$$\frac{x^3 + 1}{x + 1} = x^2 - x + 1$$

در این مثال گوییم: $x^2 + 1$ بر $x + 1$ بخش پذیر است و حاصل تقسیم $x^2 + 1$ بر $x + 1$ برابر است با $x^2 - x + 1$. یک مسئله مهم در چند جمله‌ای‌ها آن است که اگر بدانیم یک چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای دیگری بخش پذیر است، حاصل تقسیم این چند جمله‌ای‌ها را چگونه محاسبه می‌کنیم؟

قاعده تقسیم دو چند جمله‌ای بر هم

تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای

در تقسیم یک جمله‌ای‌ها بر هم از قاعده ساده کردن کسرها استفاده می‌شود. ابتدا ضرایب عددی یک جمله‌ای‌ها

را بر هم تقسیم می‌کنیم و سپس بقیه جملات را با استفاده از رابطه $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ساده می‌کنیم. مثال: یک جمله‌ای $7x^3$ را بر یک جمله‌ای $14x^2$ تقسیم کنید.

$$\frac{7x^3}{14x^2} = \frac{7}{14} \times \frac{x^3}{x^2} = \frac{1}{2}x$$

مثال: یک جمله‌ای « $20x^4y^3z$ » را بر یک جمله‌ای $5x^2y^2z$ تقسیم کنید.

$$\frac{-20x^4y^3z}{5x^2y^2z} = \frac{-20}{5} \times \frac{x^4}{x^2} \times \frac{y^3}{y^2} \times \frac{z}{z} = -4xy$$

تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای

در تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یک جمله‌ای‌ها از درستی تساوی $(\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c})$ استفاده می‌شود. هر چند جمله‌ای مجموعی از یک جمله‌ای‌ها است و در تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای، آن را به صورت جمع چند تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای می‌نویسیم و آن را ساده می‌کنیم. مثال: چند جمله‌ای $4x^3y^2 + 6x^2y^3 - 12x^5y$ را بر یک جمله‌ای $2xy$ تقسیم کنید.

$$\frac{4x^3y^2 + 6x^2y^3 - 12x^5y}{2xy} = \frac{4x^3y^2}{2xy} + \frac{6x^2y^3}{2xy} + \frac{-12x^5y}{2xy} = 2x^2y + 3xy^2 - 6x^4$$



تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$۱) \frac{۱۴a^۲b}{۷ab}$$

$$۲) \frac{\sqrt{۶}x^۴y^۳z}{\sqrt{۲}x^۲z}$$

$$۳) \frac{۲xy^۲ - ۴x^۲yz}{۱۰xy}$$

$$۴) \frac{۱۵a^۳b^۵ - ۳۰a^۲b^۴ - ۲۵a^۳b^۳}{۲۵a^۲b^۳}$$

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

در این قسمت فقط چندجمله‌ای‌های یک متغیره را در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال تقسیم چندجمله‌ای $۲x^۳ - x^۲ + x + ۴$ بر چندجمله‌ای $x + ۱$ را بررسی می‌کنیم. در تقسیم $۲x^۳ - x^۲ + x + ۴$ بر $x + ۱$ ، اولی را مقسوم و دومی را مقسوم علیه و حاصل تقسیم را خارج قسمت می‌نامند. عمل تقسیم را در شکلی مانند زیر که همانند تقسیم اعداد طبیعی است نشان می‌دهند.

مقسوم	مقسوم علیه
	خارج قسمت

در یک عمل تقسیم، درجه مقسوم باید بزرگ‌تر یا مساوی درجه مقسوم علیه باشد.

مرحله اول: ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را به شکل استاندارد (از بالاترین توان به کمترین توان متغیر) می‌نویسیم.

$$۲x^۳ - x^۲ + x + ۴ \quad \left| \begin{array}{l} x + 1 \\ \hline \end{array} \right.$$

مرحله دوم: اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم و حاصل را در محل خارج قسمت می‌نویسیم.

$$۲x^۳ - x^۲ + x + ۴ \quad \left| \begin{array}{l} x + 1 \\ \hline ۲x^۲ \end{array} \right.$$

مرحله سوم: خارج قسمت به دست آمده در مرحله قبل را در مقسوم علیه ضرب می‌کنیم و قرینه آن را زیر مقسوم می‌نویسیم و با مقسوم جمع می‌کنیم. این عمل، همان تفریق کردن حاصل ضرب خارج قسمت در مقسوم علیه، از مقسوم است.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} x+1 \\ 2x^2 \end{array} \right. \\ - 2x^3 - 2x^2 \\ \hline - 3x^2 + x + 4 \end{array}$$

مرحله چهارم: چندجمله‌ای به دست آمده جدید را مانند یک مقسوم جدید می‌گیریم و مراحل دوم و سوم را تکرار می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} x+1 \\ 2x^2 - 3x \end{array} \right. \\ - 2x^3 - 2x^2 \\ \hline - 3x^2 + x + 4 \\ 3x^2 + 3x \\ \hline 4x + 4 \end{array}$$

مرحله پنجم: مرحله چهار را آن قدر تکرار می‌کنیم تا در محل مقسوم‌های جدید یک چندجمله‌ای با درجه کمتر از درجه مقسوم‌علیه به دست آید.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} x+1 \\ 2x^2 - 3x + 4 \end{array} \right. \\ - 2x^3 - 2x^2 \\ \hline - 3x^2 + x + 4 \\ 3x^2 + 3x \\ \hline 4x + 4 \\ - 4x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

در این مرحله، اگر مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش پذیر باشد، در محل مقسوم‌های جدید چندجمله‌ای صفر به دست می‌آید. اما، اگر مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش پذیر نباشد، با این عملیات، در محل مقسوم‌های جدید یک چندجمله‌ای با درجه کمتر از درجه مقسوم‌علیه به دست می‌آید که آن را باقیمانده عمل تقسیم می‌نامند. مثال: با تقسیم $5x^3 + 4x^2 - x + 3$ بر چندجمله‌ای $x^2 + 1$ ، خارج قسمت و باقیمانده را تعیین کنید. آیا چندجمله‌ای $5x^3 + 4x^2 - x + 3$ بر چندجمله‌ای $x^2 + 1$ بخش پذیر است؟

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 4x^2 - x + 3 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 \\ 5x + 4 \end{array} \right. \\ - 5x^3 - 5x \\ \hline 4x^2 - 6x + 3 \\ - 4x^2 - 4 \\ \hline - 6x - 1 \end{array}$$

با توجه به آن که باقیمانده این تقسیم صفر نیست، مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش پذیر نیست.

در هر عمل تقسیم، مقسوم برابر است با حاصل ضرب مقسوم علیه در خارج قسمت و جمع با باقیمانده. از این مطلب می توان برای بررسی درستی یک تقسیم استفاده کرد. اگر تساوی صفحه قبل برقرار شود می توان اطمینان داشت که تقسیم به درستی انجام شده است.

برای مثال، اگر تقسیم صفحه قبل به درستی انجام شده باشد، باید تساوی زیر برقرار باشد.

$$5x^3 - 4x^2 - x + 3 = (x^2 + 1)(5x + 4) - 6x - 1$$

تساوی بالا به معنای آن است که کسر $\frac{5x^3 + 4x^2 - x + 3}{x^2 + 1}$ را می توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\begin{aligned} \frac{5x^3 + 4x^2 - x + 3}{x^2 + 1} &= \frac{(x^2 + 1)(5x + 4) - 6x - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)(5x + 4)}{x^2 + 1} + \frac{-6x - 1}{x^2 + 1} \\ &= 5x + 4 - \frac{6x + 1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

مثال: با تقسیم چندجمله ای اولی بر چندجمله ای دومی، خارج قسمت و باقیمانده را تعیین کنید. آیا چندجمله ای $27x^3 + 9x^2 + 3x$ بر چندجمله ای $3x^2 + x$ بخش پذیر است؟

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 9x + 27 \quad \left| \begin{array}{l} x + 3 \\ x^2 + 9 \end{array} \right. \\ \underline{-x^3 - 3x^2} \\ 9x + 27 \\ \underline{-9x - 27} \\ 0 \end{array}$$

از آن جا که باقیمانده صفر است، مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر بوده است و داریم

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 9x + 27}{x + 3} = x^2 + 9$$

تقسیم در کلاس



تقسیم های زیر را انجام دهید.

$$1) \quad 6x^5 + 3x^2 + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 \end{array} \right.$$

$$2) \quad x^3 + x^4 + 3 \quad \left| \begin{array}{l} 1 - 2x^2 \end{array} \right.$$



مسائل

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$\text{الف) } \frac{24x^2y^2}{4xy^2} \quad \text{ب) } \frac{6x^3b^2 + 3x^2b}{3x^2b} \quad \text{ج) } (x^2 - 2x^2 - x) \div (x^2 - x)$$

۲- تقسیم $7x - 4x^2 + 2x^3$ بر $2x - x$ را انجام دهید. خارج قسمت و باقیمانده را تعیین و درستی عمل تقسیم را بررسی کنید.

۳- در تقسیم $\frac{x^2 + a}{x + 1}$ مقدار a چقدر باشد تا باقیمانده صفر شود؟

۴- ساده شده عبارت $\frac{y^3 - y^2 - y + 1}{1 - y}$ برابر کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

$$\text{الف) } y^2 - 1 \quad \text{ب) } 1 - y^2 \quad \text{ج) } y^3$$

۵- اگر در تقسیم $m - 4x + 3x^2$ بر $2x - x$ باقیمانده صفر شود m چیست؟

۶- خارج قسمت و باقیمانده هر یک از تقسیم‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } 5x + 9x^3 - 4 \quad \left| \begin{array}{l} 3x + 2 \\ \hline \end{array} \right. \quad \text{ب) } 8y^3 - 125 \quad \left| \begin{array}{l} 5 - 2y \\ \hline \end{array} \right.$$

۷- مساحت یک مستطیل بر حسب a ، به صورت $2a^2 - 4a$ و عرض آن برابر $1 - a$ می‌باشد. طول آن بر حسب a چیست؟

عبارت‌های رادیکالی

عبارت‌های جبری را که در آن‌ها محاسبات ریشه‌گیری وجود دارد، عبارت‌های رادیکالی می‌نامند. به‌عنوان مثال، عبارت‌های زیر، عبارت‌های رادیکالی هستند.

$$\sqrt{1+x^2}, \sqrt{x^2+y^2} - xy^2, \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^3+x+4}}$$

تمرین در کلاس



۱- محیط و مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آن z و طول یک ضلع آن x است را به‌عنوان دو عبارت رادیکالی به دست آورید.

۲- اگر مربعی با مساحت z داشته باشیم و طول اضلاع آن را x واحد افزایش دهیم، مساحت مربع اولیه چقدر افزایش می‌یابد؟

عبارت‌های رادیکالی نیز نشان‌دهنده اعدادی هستند که برحسب مقدار متغیرهایشان تعیین می‌شوند. به همین خاطر عبارت‌های رادیکالی را می‌توان باهم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کرد یا به توان رسانید یا ریشه آن‌ها را محاسبه کرد. با استفاده از قواعد محاسباتی مربوط به جمع و تفریق، ضرب، تقسیم، توان‌رسانی و ریشه‌گیری می‌توان این محاسبات را انجام داد و نتیجه را تا آن‌جا که ممکن است ساده نمود.

در یک عبارت رادیکالی که به صورت تقسیم دو عبارت است، اگر در مخرج کسر عمل ریشه‌گیری وجود داشته باشد و با عملیات جبری، نمایشی از آن کسر را به دست آوریم که در مخرج کسر فقط چند جمله‌ای وجود داشته باشد، این عمل را گویا کردن مخرج آن عبارت رادیکالی می‌نامند.

مثال: مخرج عبارت $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ را گویا کنید.

کافی است صورت و مخرج کسر را در \sqrt{x} ضرب کنیم تا مخرج کسر از حالت رادیکالی خارج شود.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1 \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

مثال: مخرج عبارت رادیکالی $\frac{2}{\sqrt{a}-1}$ را گویا کنید.

صورت و مخرج این عبارت را در $\sqrt{a}+1$ ضرب می‌کنیم. به این عبارت مزدوج $\sqrt{a}-1$ می‌گویند.

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{a}-1} &= \frac{2(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{2(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a})^2-1^2} \\ &= \frac{2(\sqrt{a}+1)}{a-1}\end{aligned}$$

مثال: مخرج عبارت رادیکالی $\frac{1}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$ را گویا کنید.

با استفاده از اتحاد مزدوج اگر مخرج این عبارت را در $\sqrt{x}-2\sqrt{y}$ ضرب کنیم، مخرج از حالت رادیکالی خارج می‌شود، زیرا

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}+2\sqrt{y}) \times (\sqrt{x}-2\sqrt{y}) &= (\sqrt{x})^2 - (2\sqrt{y})^2 = x - 4y \\ \text{بنابراین صورت و مخرج این عبارت را در } \sqrt{x}-2\sqrt{y} &\text{ ضرب می‌کنیم.}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}} = \frac{1 \times (\sqrt{x}-2\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+2\sqrt{y}) \times (\sqrt{x}-2\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2 - (2\sqrt{y})^2} = \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{x-4y}$$

مثال: حاصل عبارت $1 + \sqrt{x} + \frac{x}{1-\sqrt{x}}$ را حساب کنید و به ساده‌ترین صورت آن را بنویسید.

$$\begin{aligned}1 + \sqrt{x} + \frac{x}{1-\sqrt{x}} &= \frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) + x}{1-\sqrt{x}} \\ &= \frac{1 - (\sqrt{x})^2 + x}{1-\sqrt{x}} = \frac{1-x+x}{1-\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{1-\sqrt{x}} = \frac{1 \times (1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} \\ &= \frac{1+\sqrt{x}}{1-x}\end{aligned}$$



۱- مخرج عبارت‌های رادیکالی زیر را گویا کنید.

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

الف) $\frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{y}}$

د) $\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$

ج) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

هـ) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

۲- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

ب) $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

الف) $\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{1}{\sqrt{a}-1}$

ج) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

ب) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$