۶

نسبت‌های مثلثاتی

در شکل بالا هواپیما، ماهواره‌بر ایرانی امید و چند ماهواره دیده می‌شود

به نظر شما در یک لحظه شیب هر یک با محور افقی چقدر است؟

طرح یک مسئله

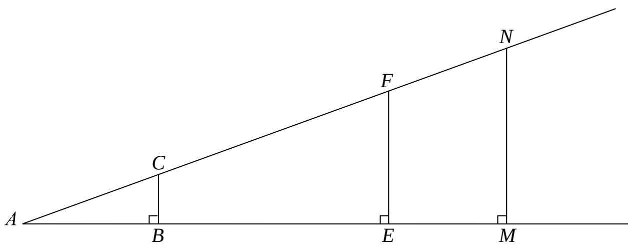
امروز در کلاس درس ریاضی، معلم گفت :

شما که ریاضی را خوب یاد گرفته اید توانایی‌های بسیاری در زندگی به‌دست آورده اید شما کارهایی می‌توانید انجام دهید که دیگران نمی‌توانند مدیر مدرسه گفته است که طناب تیرک پرچم مدرسه مدتی است که پوسیده شده است و لازم است طناب جدیدی برای آن بخریم ولی نمی‌دانیم طول تیرک پرچم چقدر است؟ من گفتم که دانش آموزان کلاس ریاضی من، ریاضی را خوب یاد گرفته‌اند و می‌توانند برای شما طول این تیرک را به‌دست آورند

آیا شما می‌توانید طول تیرک پرچم یا بلندی ساختمان مدرسه خود را حساب کنید؟ برای این کار چه اطلاعاتی را نیاز دارید؟

معمولاً یک مسئله راه‌حل‌های متعددی دارد و هریک از شما ممکن است راه خاص خود را بیابد. یکی از راه‌های حل مسئلهٔ بالا، مقایسه طول اشیای بزرگ با طول اشیای کوچک است. فعالیت زیر ابزار مناسبی برای مقایسه طول‌ها فراهم می‌کند.

فعالیت



۱ــ یک زاویه با رأس A مانند روبه رو رسم شده است. روی یک ضلع این زاویه چند نقطهٔ دلخواه مانند B و E و M درنظر گرفته شده است و از این نقاط عمودهایی بر این ضلع رسم شده است که ضلع دیگر را در نقاطی که به‌ترتیب C و F و N نامیده‌ایم قطع کرده‌اند.

با اندازه‌گیری‌های مستقیم درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

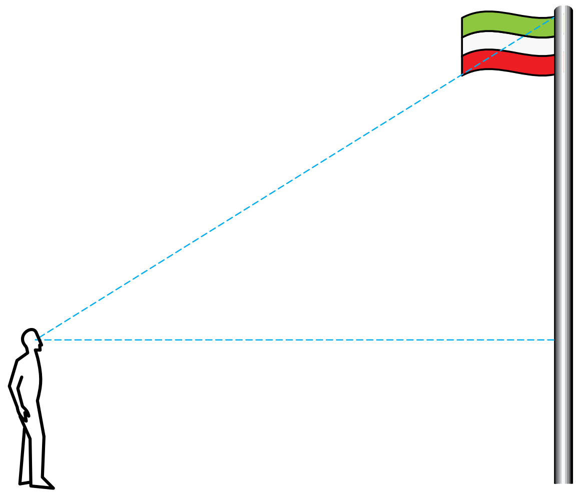
$$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AF}=\frac{AM}{AN} \quad , \quad \frac{BC}{AC}=\frac{EF}{AF}=\frac{MN}{AN} \quad , \quad \frac{BC}{AB}=\frac{EF}{AE}=\frac{MN}{AM}$$

۲ــ با رسم همین شکل با زاویه‌های دیگر و نقاط دیگر، درستی تساوی‌های بالا را بررسی کنید.

نسبت‌های بالا اعدادی هستند که فقط به زاویهٔ انتخاب شده بستگی دارند.

تانژانت زاویه

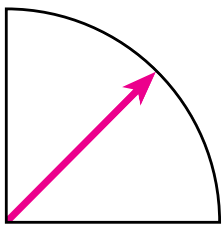
به مسئلهٔ اصلی بازمی‌گردیم. احمد یکی از شاگردان علاقه‌مند کلاس بود و می‌خواست توانایی خود را در حل مسئله اندازه‌گیری طول تیرک پرچم بیازماید. او به نزدیکی تیرک پرچم رفت و مدتی به آن نگاه کرد و از خود پرسید مجهول مسئله چیست و برای یافتن آن، چه اطلاعاتی لازم است؟ او وضعیت مسئله را در یک شکل به‌صورت زیر در ذهن خود تجسّم کرد.



او گفت من طول قد خود را می‌دانم و فاصله‌ام را هم با تیرک پرچم می‌توانم به‌دست آورم و اگر بدانم با چه زاویه‌ای نوک تیرک را می‌بینم، این اطلاعات برای حل مسئله باید کافی باشد. بهتر است همراه احمد فعالیت زیر را انجام دهیم تا معلوم شود او تا چه حد در حل مسئله موفق خواهد بود.

فعالیت

۱ــ یک ربع دایرهٔ مقوایی شبیه یک نقاله نصف شده بسازید و روی مرکز ربع دایره یک عقربهٔ نازک مقوایی دیگر با پونس بچسبانید.



۲ــ به حیاط بروید[1] و در فاصله‌ای مشخص شده از تیرک پرچم بایستید و در حالتی که یک ضلع ربع دایره به‌صورت افقی است، عقربهٔ آن را در حالتی قرار دهید که نوک تیرک را نشان دهد. محل عقربه را روی محیط ربع دایره علامت

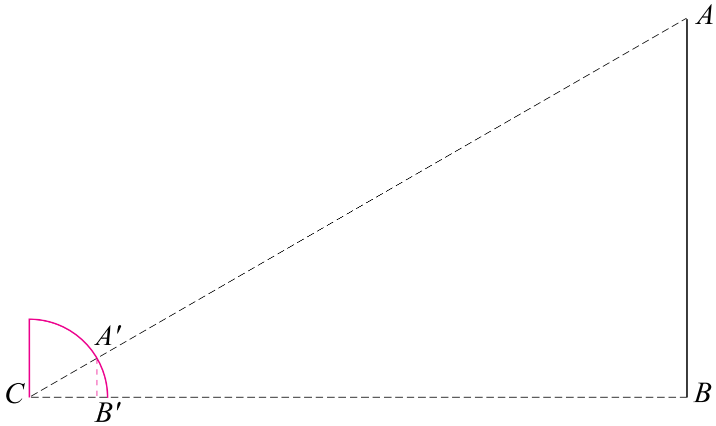
۱ــ در صورتی که امکان این کار را ندارید، در کلاس بمانید و ارتفاع تخته یا دیوار را اندازه بگیرید.

بزنید. فاصلهٔ ضلع افقی ربع دایره تا سطح زمین تقریباً به اندازهٔ قد شما خواهد بود.

۳ــ حال به کلاس برگردید و ربع دایرهٔ مقوایی را روی یک کاغذ بگذارید. مرکز ربع دایره را C و محل علامت‌گذاری شده روی محیط ربع دایره را A' بنامید. از A' خط عمود بر ضلع افقی ربع دایره را رسم کنید تا این ضلع را در نقطه‌ای قطع کند و این نقطه را B' بنامید. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $CA'B'$، طول ضلع‌های $A'B'$ و CB' را مستقیماً با خط‌کش اندازه‌گیری کنید.

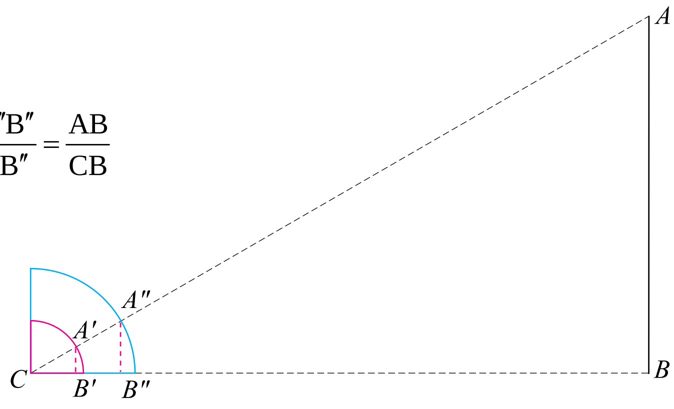
احمد یک ربع دایره به شعاع ۱۰ سانتی‌متر ساخته بود و عقربهٔ او با ضلع افقی ربع دایره زاویهٔ ۲۳ درجه ساخته بود. فاصلهٔ او با تیرک پرچم ۱۷ متر بود و قد احمد ۱/۶۵ متر بود.

۴ــ با استفاده از شکل زیر و نتایج فعالیت صفحه ۱۴۰ طول تیرک پرچم را حساب کنید.



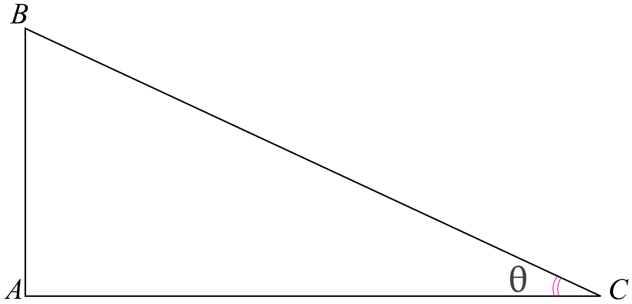
در انجام این فعالیت، هریک از شما ممکن است ربع دایره مقوایی خود را بسازد که احتمالاً هم‌اندازه نیستند. آیا این مطلب در محاسبه طول تیرک پرچم تأثیری خواهد داشت؟ برای مثال، فرض کنید حسن یکی دیگر از دانش‌آموزان است و ربع دایره‌ای ساخته است که شعاع آن دو برابر شعاع ربع دایرهٔ احمد است. با این فرض که حسن و احمد هم‌قد هستند و حسن در همان نقطه‌ای که احمد ایستاده بود، ایستاده است، محاسبات این دو نفر چه تفاوتی با هم خواهد داشت؟ شکل زیر نشان می‌دهد که این دو نفر نسبت‌های متفاوتی را تشکیل می‌دهند، ولی این دو نسبت مساوی‌اند.

$$\frac{A'B'}{CB'}=\frac{A''B''}{CB''}=\frac{AB}{CB}$$



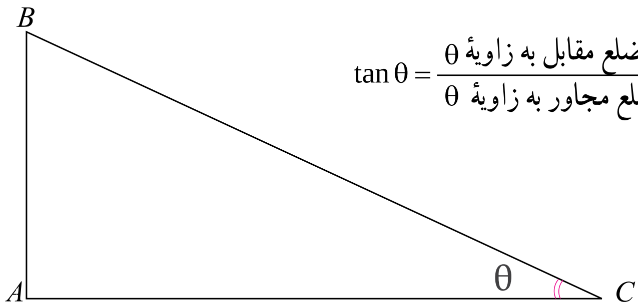
همان‌طور که مشاهده می‌شود، احمد از نسبت $\frac{A'B'}{CB'}$ و حسن از نسبت $\frac{A''B''}{CB''}$ برای حل مسئله استفاده می‌کند و مقدار این دو نسبت مساوی‌اند. در فعالیت صفحهٔ ۱۴۰ دیدیم که این نسبت، عددی است که فقط بستگی به زاویهٔ تشکیل شده در رأس C دارد. بنا به تعریف، این نسبت را **تانژانت** آن زاویه می‌نامند.

در یک مثلث قائم‌الزاویه مانند زیر که یک زاویهٔ آن θ نامیده شده است، ضلع AB را ضلع روبه‌رو به این زاویه و ضلع AC را ضلع مجاور به این زاویه می‌نامند.



اگر θ یک زاویهٔ حاده (تند) باشد، تانژانت آن را با tanθ نشان می‌دهند[1]. تعریف تانژانت نشان می‌دهد که :

> در یک مثلث قائم‌الزاویه، اگر θ یک زاویه حاده آن باشد، tanθ برابر است با تقسیم طول ضلع مقابل به θ به طول ضلع مجاور به θ.



$$\tan\theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } \theta}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } \theta} = \frac{AB}{BC}$$

برای مثال، $\tan 26^\circ$ تقریباً برابر ۰/۴۸۷ است، یعنی $\tan 26^\circ \simeq 0/487$.

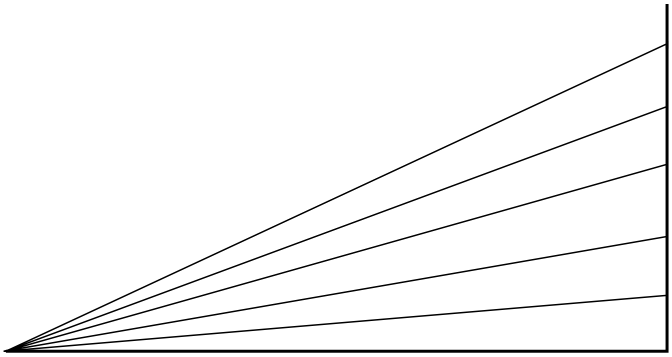
تمرین در کلاس

۱ــ یک جدول تشکیل دهید که در آن تانژانت زاویه‌های ۲۳، ۳۰، ۴۰، ۴۵ و ۶۰ درجه به‌طور تقریبی با رسم مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری مستقیم با خط‌کش و محاسبه نسبت‌ها، محاسبه شده باشند.

۲ــ با توجه به جدول، اگر زاویه حاده‌ای بزرگ شود تانژانت آن چه تغییری خواهد کرد؟

۱ــ tan مخفف لغت انگلیسی tangent است. در برخی کتاب‌ها تانژانت را با tg نیز نشان می‌دهند.

۳ــ شکل زیر زاویه‌های متفاوتی را نشان می‌دهد که ضلع مجاور به آن‌ها ثابت است ولی ضلع روبه‌روی به آن‌ها متفاوت است. درستی ادعای خود در بند (۲) را از طریق شکل نشان دهید.



۴ــ اگر زاویه‌ای به صفر نزدیک شود تانژانت آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

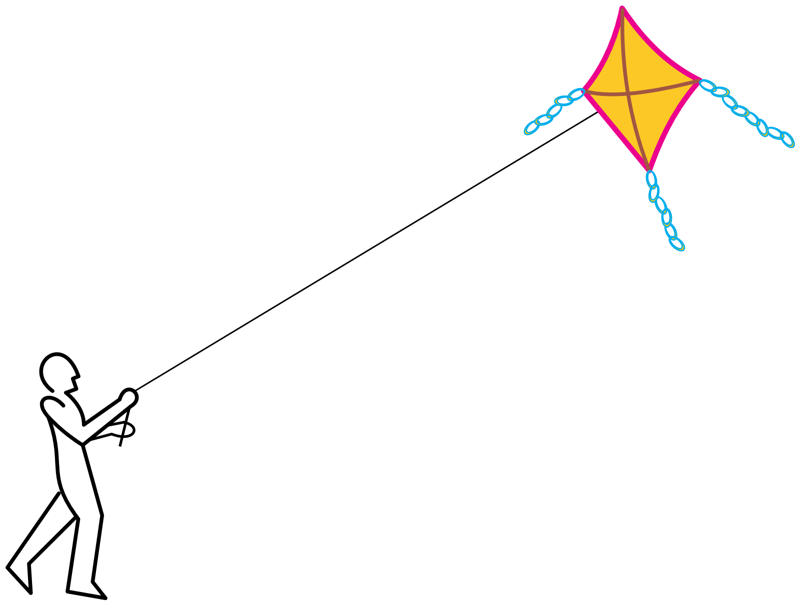
غیاث‌الدین جمشید کاشانی

جمشیدبن مسعودبن محمود طبیب کاشانی ملقب به غیاث‌الدین در سال ۷۹۰ ق در کاشان متولد شد. او یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان، منجمان و زیج‌نویسان ایرانی دورهٔ اسلامی است. او ریاضی‌دانی هوشمند، مخترع، نقاد و صاحب افکار عمیق و مسلط بر آثار ریاضی‌دانان قبل از خود بود. او در فن محاسبه و به کار بستن روش‌های تقریبی بسیار توانمند بود. او برای اولین بار محاسبه عدد π تا شانزده رقم اعشار و محاسبه $\sin ۱^\circ$ تا بیست و دو رقم اعشار را انجام داده است. او در محاسبه عدد π که با دقت $۰/۶\times ۱۰^{۱۷}$ است از ابزار مقدماتی در محاسبات که از مرز جذرگرفتن تجاوز نمی‌کند، استفاده نموده است و به قول تاریخ نگاران ریاضیات اروپا این اثر را شاهکار فن محاسبه نامیدند. او در محاسبه $\sin ۱^\circ$ با استفاده از تشکیل معادلهٔ جبری و استفاده از قضایای هندسی و حل معادله به روش تکرار که در ریاضیات حال حاضر بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد به محاسبه پرداخته است. او روشی برای محاسبه ریشه nام یک عدد صحیح بیان می‌کند که ریاضی‌دانان اروپایی در قرن نوزدهم آن را ابداع کرده و به روش «روفینی ــ هورنر» معروف است. او کسرهای اعشاری را به صورت روش‌مند معرفی و به کار برد. از او آثار بسیار زیادی از جمله در رسالهٔ محیطیه، رسالهٔ وتر و جیب، مفتاح‌الحساب و ... را می‌توان نام برد. او در سال ۸۳۲ ق در رصدخانه سمرقند درگذشته است.

سینوس زاویه

پس از حل مسئله یافتن طول تیرک پرچم، معلم مسئلهٔ دیگری را مطرح ساخت که شباهت بسیاری به مسئلهٔ اول داشت.

معلم پرسید : اگر شما بادبادکی را به هوا بفرستید، آیا می‌توانید بفهمید که چقدر از سطح زمین فاصله گرفته است؟



احمد گفت : هر چقدر نخ بیشتری را رها کرده باشیم بادبادک بالاتر رفته است، اگر بدانیم چقدر نخ فرستاده شده است می‌توانیم بفهمیم بادبادک چقدر بالا رفته است. (آیا این فکر احمد درست بود؟)

حسن گفت : اما اگر شدت باد کم شود، هر چقدر هم که نخ فرستاده باشیم بادبادک پایین می‌آید و زاویهٔ راستای نخ با سطح زمین کم می‌شود، پس فقط با دانستن مقدار نخ فرستاده شده نمی‌توان فهمید بادبادک چقدر بالا رفته است.

معلم گفت : پس چه چیز دیگری را برای حل این مسئله باید بدانیم؟

احمد گفت : به‌نظر می‌رسد زاویهٔ نخ با سطح زمین هم مهم است و اگر این زاویه را بدانیم شاید بتوانیم فاصله بادبادک تا سطح زمین را محاسبه کنیم.

آیا شما می‌توانید دلیل درستی حدس احمد را بیان کنید؟ فرض کنید ۴۵ متر نخ رها شده است و زاویهٔ نخ با سطح زمین ۳۹ درجه باشد و فاصلهٔ دست کسی که بادبادک را هوا کرده است از سطح زمین یک متر و پنجاه و پنج سانتی‌متر باشد.

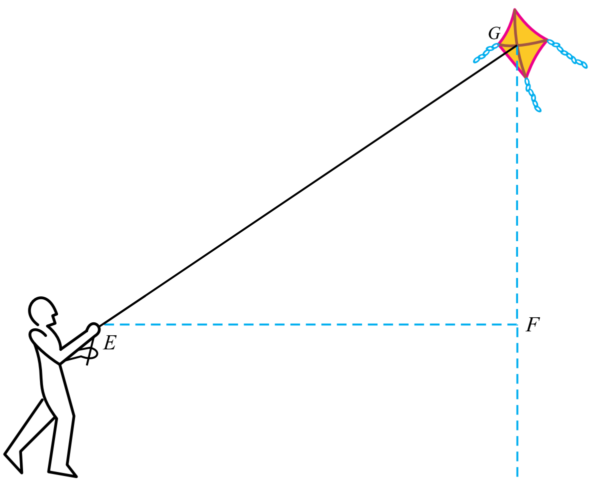
در فعالیت زیر شما می‌توانید شیوهٔ یافتن ارتفاع بادبادک را بیابید.

فعالیت

۱ــ یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید که یک زاویهٔ آن ۳۹ درجه باشد. رأس قائمه را A و رأس مربوط به زاویهٔ ۳۹ درجه را B و رأس دیگر را C بنامید.

۲ــ با اندازه‌گیری مستقیم، نسبت $\frac{AC}{CB}$ را حساب کنید و آن را t بنامید. با مروری بر فعالیت صفحهٔ ۱۴۰ نتیجه بگیرید که این نسبت بستگی به کوچکی یا بزرگی مثلث قائم‌الزاویه‌ای که رسم کرده‌اید ندارد.

۳ــ مثلث قائم‌الزاویه‌ای را درنظر بگیرید که وتر آن نخ بادبادک و یک ضلع آن خط موازی زمین و ضلع دیگر آن خط عمود از بادبادک به سطح زمین است. طبق شکل زیر رأس‌های آن نام‌گذاری شده‌اند، نتیجه بگیرید: $t = \frac{FG}{EG}$.



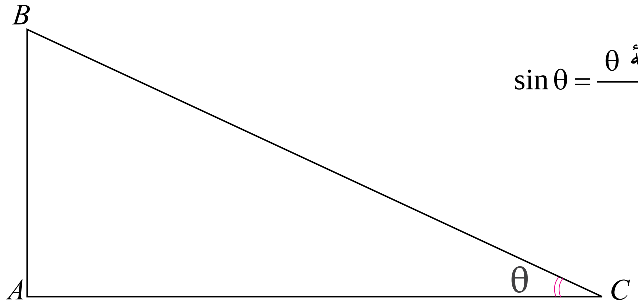
۴ــ با استفاده از تساوی بالا و دانستن مقدار t و مقدار EG و فاصلهٔ دست کسی که بادبادک را هوا کرده تا زمین، ارتفاع بادبادک را حساب کنید.

در حل مسئلهٔ بالا عدد t که عددی وابسته به زاویهٔ ۳۹ درجه بود، نقش مهمی را بازی کرد. این عدد را سینوس زاویهٔ ۳۹ درجه می‌نامند.

اگر θ زاویهٔ حاده‌ای باشد، و مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که یک زاویهٔ آن θ باشد، حاصل تقسیم طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ θ به طول وتر را، **سینوس** θ می‌نامند و با $\sin\theta$ نشان می‌دهند.

فعالیت صفحهٔ ۱۴۰ نشان می‌دهد، این مقدار بستگی به کوچکی یا بزرگی مثلث رسم شده ندارد و فقط به زاویهٔ θ بستگی دارد.

$$\sin\theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

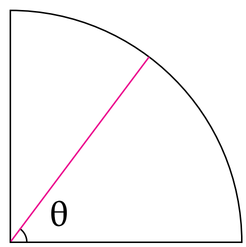


برای مثال، $\sin ۳۹^\circ$ تقریباً برابر است با ۰/۶۲۹، یعنی $\sin ۳۹^\circ \simeq ۰/۶۲۹$.

تمرین در کلاس

۱ــ یک جدول تشکیل دهید که در آن سینوس زاویه‌های ۲۳، ۳۰، ۴۰، ۴۵ و ۶۰ درجه به‌طور تقریبی با رسم مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری مستقیم با خط‌کش و محاسبه نسبت‌ها، محاسبه شده باشند.

۲ــ با رسم یک ربع دایره به شعاع ۱، برای یک زاویهٔ حاده θ که در زیر نشان داده شده است، $\sin\theta$ را به‌صورت طول یک پاره‌خط، در شکل نشان دهید.



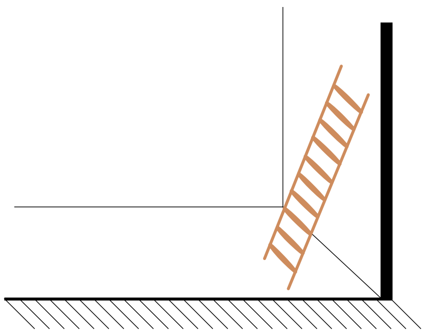
۳ــ در شکل بالا، اگر زاویهٔ θ بزرگ شود سینوس آن چه تغییری خواهد کرد؟ از روی شکل و جدول درستی ادعای خود را نشان دهید.

۴ــ اگر زاویهٔ θ به صفر نزدیک شود سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

۵ــ اگر زاویهٔ θ به ۹۰ درجه نزدیک شود سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

کسینوس زاویه

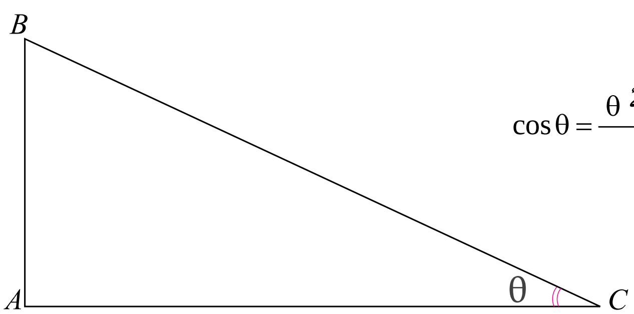
فرض کنید نردبانی را برای رفتن به پشت‌بام به دیوار تکیه داده‌ایم. شما می‌توانید فاصلهٔ پای نردبان که بر زمین قرار دارد را تا دیوار حساب کنید. هم‌چنین زاویه‌ای که نردبان با سطح زمین می‌سازد را هم می‌توانید اندازه بگیرید. آیا با این اطلاعات می‌توانید طول نردبان را حساب کنید؟



در اکثر مسائل هندسی که زاویه در آن‌ها نقش مهمی را بازی می‌کند تانژانت و سینوس زاویه‌ها در محاسبات بسیار کارگشا هستند. در حل مسئلهٔ بالا، عدد دیگری که آن هم از طریق یک زاویه تعیین می‌شود نقش اصلی را بازی می‌کند. این عدد را کسینوس زاویه می‌نامند.

اگر θ زاویهٔ حاده‌ای باشد، و مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که یک زاویهٔ آن θ باشد، حاصل تقسیم طول ضلع مجاور به زاویهٔ θ به طول وتر را، **کسینوس** θ می‌نامند و با $\cos\theta$ نشان می‌دهند.

فعالیت صفحه ۱۴۰ نشان می‌دهد، این مقدار بستگی به کوچکی یا بزرگی مثلث رسم شده ندارد و فقط به زاویهٔ θ بستگی دارد.

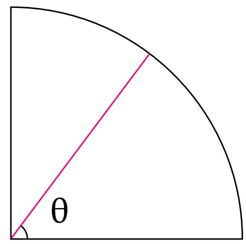


$$\cos\theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

مثلاً، $\cos ۲۷^\circ$ تقریباً برابر است با ۰/۸۹۱، یعنی $\cos ۲۷^\circ \simeq ۰/۸۹۱$.

تمرین در کلاس

۱ــ با رسم یک ربع دایره به شعاع ۱، برای یک زاویهٔ حاده θ که در زیر نشان داده شده است، $\cos\theta$ را به‌صورت طول یک پاره‌خط، در شکل نشان دهید.



۲ــ اگر زاویهٔ حاده θ بزرگ شود کسینوس آن چه تغییری خواهد کرد؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

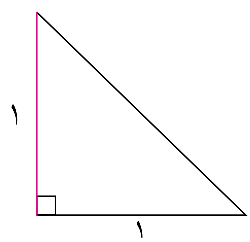
۳ــ اگر زاویهٔ حاده θ به صفر نزدیک شود کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

۴ــ اگر زاویهٔ حاده θ به ۹۰ درجه نزدیک شود کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

برای زاویه‌های حاده، از طریق نسبت‌های طول اضلاع مثلث‌های قائم‌الزاویه، اعدادی را ساختیم که تانژانت و سینوس و کسینوس این زاویه‌ها نام داشت. این اعداد را **نسبت‌های مثلثاتی** می‌نامند و در محاسبات هندسی نقش مهمی دارند.

تمرین در کلاس

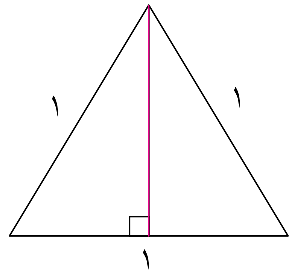
در زیر یک مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است که طول اضلاع مجاور قائمه آن برابر ۱ است.



۱ــ نشان دهید که زاویه‌های حاده این مثلث ۴۵ درجه است و طول وتر این مثلث را محاسبه کنید.

۲ــ سینوس و کسینوس و تانژانت زاویهٔ ۴۵ درجه را به‌دست آورید.

در زیر یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ رسم شده است. ارتفاع، میانه و نیمساز مربوط به هر رأس بر هم منطبق‌اند و یکی از آن‌ها در یکی از رأس‌ها رسم شده است و دو مثلث قائم‌الزاویه مساوی به‌دست آمده است.



۳ــ طول اضلاع و زاویه‌های این مثلث‌های قائم‌الزاویه را حساب کنید.

۴ــ سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ درجه را به‌دست آورید.

با حل تمرین بالا، می‌توانید جدول زیر را که نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه را نشان می‌دهد، به‌دست آورید.

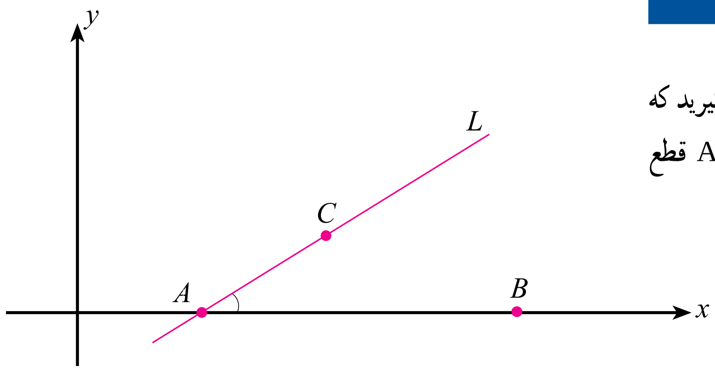
زاویه	۳۰°	۴۵°	۶۰°
سینوس	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
کسینوس	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
تانژانت	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$

توجه کنید

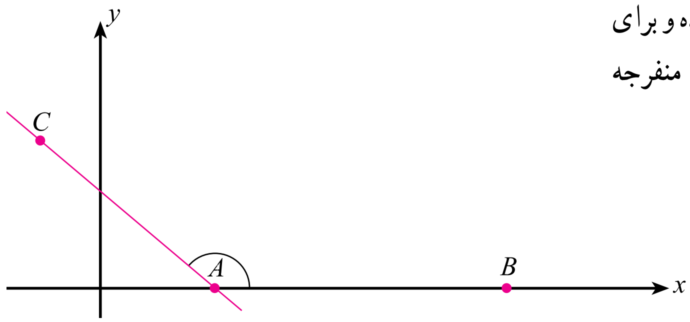
$\sin(۲\theta) \neq ۲\sin\theta \quad , \quad \sin(۳۰) \quad \sin(۴۵) \neq \sin(۳۰ \quad ۴۵)$

شیب خط و تانژانت

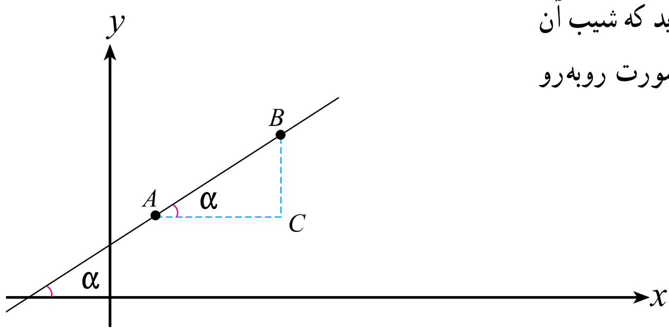
خطی مانند L در صفحه درنظر بگیرید که محور xها را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کند.



سمت راست نقطهٔ A روی محور xها نقطه‌ای مانند B انتخاب می‌کنیم و بالای محور xها روی خط L نقطه‌ای مانند C انتخاب می‌کنیم. زاویهٔ بین دو نیم‌خط AB و AC را زاویهٔ بین خط L و محور xها می‌نامند. برای خط های با شیب مثبت این زاویه حاده و برای خط های با شیب منفی این زاویه منفرجه (باز) است.



خطی به معادلهٔ $y = mx + b$ درنظر بگیرید که شیب آن مثبت باشد. شکل کلی این خط به‌صورت روبه‌رو است.



یادآوری می‌کنیم که شیب این خط برابر است با $\frac{BC}{AC}$، از طرف دیگر می‌دانید که این نسبت همان تانژانت زاویه بین این خط و محور افقی است. بنابراین :

شیب هر خط که با محور افقی زاویهٔ حاده می‌سازد، همان تانژانت زاویهٔ بین خط و محور افقی است، یعنی $\tan\alpha = m$.

m را ضریب زاویهٔ خط $y = mx + b$ نیز می‌نامند.

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

از آن‌جا که هرکدام از سینوس و کسینوس و تانژانت[۱] زاویه‌ها به‌صورت یک نسبت در یک مثلث به‌دست می‌آیند، آن‌ها را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامند. این مقادیر بی‌ارتباط به هم نیستند و اگر یکی از آن‌ها را بدانیم، دو تای دیگر را می‌توان به‌دست آورد.

تمرین در کلاس

یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کرده و زاویه‌های حاده آن را θ و α بنامید. می‌دانید $\alpha+\theta \;\; ۹۰^{\circ}$.

۱ــ نشان دهید $\sin\alpha \;\; \cos\theta$ و $\sin\theta \;\; \cos\alpha$.

۲ــ برای زاویهٔ حاده θ نشان دهید $\cos(۹۰^{\circ} \;\; \theta) \;\; \sin\theta$ و $\sin(۹۰^{\circ} \;\; \theta) \;\; \cos\theta$.

دو زاویه که جمع آن‌ها ۹۰ درجه شود، زاویه‌های متمم می‌نامند. در مثلث‌های قائم‌الزاویه، زاویه‌های حاده آن متمم یکدیگرند. تمرین بالا نشان می‌دهد که **سینوس یک زاویه با کسینوس متمم آن زاویه مساوی است، هم‌چنین کسینوس یک زاویه با سینوس متمم آن زاویه مساوی است.**

فعالیت

یک زاویهٔ حاده رسم کنید و آن را θ بنامید.

۱ــ یک مثلث قائم‌الزاویه روی اضلاع زاویهٔ θ به‌گونه‌ای رسم کنید که وتر آن طول ۱ داشته باشد. رأس قائمه را C و رأس زاویهٔ θ را A و رأس دیگر را B بنامید.

۲ــ از روی تعریف نسبت‌های مثلثاتی نتیجه بگیرید :

$$AC \;\; \cos\theta \quad , \quad CB \;\; \sin\theta \quad , \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad (\sin\theta)^{۲} \;\; (\cos\theta)^{۲} \;\; ۱$$

۳ــ نشان دهید برای زاویهٔ حاده θ داریم $۰<\sin\theta<۱$ و $۰<\cos\theta<۱$.

۱ــ برای زاویه‌ها یک نسبت مثلثاتی دیگر نیز به‌نام کتانژانت تعریف می‌شود که در این کتاب نیامده است. کتانژانت یک زاویه θ را با $\cot\theta$ نشان می‌دهند و به‌صورت $\cot\theta = \frac{۱}{\tan\theta}$ تعریف می‌کنند.

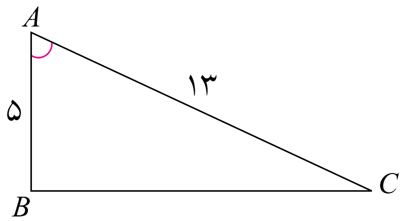
برای سادگی، در نوشتن توان‌های عبارت‌هایی مانند $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ به‌جای $(\sin\theta)^۲$ می‌نویسیم $\sin^۲\theta$ یا به جای $(\cos\theta)^۳$ می‌نویسیم $\cos^۳\theta$. توجه داشته باشید که $\sin\theta^۲$ به معنای $\sin(\theta^۲)$ است.

توجه کنید

$\sin^۲\theta \neq \sin\theta^۲$

مسائل

۱ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ رأس A را حساب کنید.



۲ــ مقدار عددی هر یک از عبارت‌های سمت چپ را به مساوی آن در سمت راست نظیر کنید.

$\sin^۲(۷\ ^\circ)+\cos^۲(۷\ ^\circ)$	$\frac{۱}{۲}$
$\sin(۴۵^\circ)+\cos(۴۵^\circ)$	۲
$\frac{۱}{\sin(۳۰^\circ)}$	$\sqrt{۲}$
	۱

۳ــ مقدار عددی عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A=\frac{۲\cos^۲(۳۰^\circ)-۲\sin(۳۰^\circ)}{۲\tan(۴۵^\circ)+۳\cos^۲(۶۰^\circ)}$$

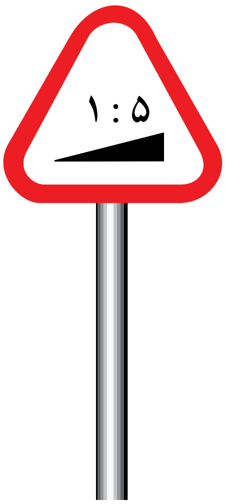
۴ــ طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۰ سانتی‌متر و سینوس یکی از زاویه‌های آن $\frac{۳}{۵}$ است. محیط این مثلث چند سانتی‌متر است؟

۵ــ یک عدد مثبت کوچک‌تر از ۱ انتخاب کنید و آن را a بنامید. یک زاویهٔ حاده α بسازید که $\sin\alpha \quad a$ و یک زاویهٔ حاده β بسازید که $\cos\beta \quad a$.

۶ــ اگر نردبانی را به دیوار تکیه داده باشیم و فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار ۱ متر و ۲۵ سانتی‌متر شده باشد و زاویهٔ نردبان با سطح زمین ۳۶ درجه باشد، طول نردبان چقدر است؟ آیا ارتفاع دیوار را هم می‌توانید حساب کنید؟ آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

۷ــ هواپیمایی می‌خواهد از روی باند بلند شود. ابتدا ۳۰۰ متر روی باند حرکت می‌کند تا سرعت لازم را پیدا کند. سپس، با زاویهٔ ۴۵ درجه از زمین بلند می‌شود، وقتی به بالای انتهای باند می‌رسد، ۱۴۰ متر ارتفاع گرفته است. طول کل باند چقدر است؟

۸ ــ تابلویی در جاده وجود دارد که شیب جاده را به صورت (۵ : ۱) نشان می‌دهد. معنای این تابلو آن است که هر ۵ متر که به‌طور افقی جلو رفته باشیم، یک متر ارتفاع جاده اضافه می‌شود. زاویه‌ای که جاده با افق می‌سازد چقدر است؟ (از رسم مثلث و نقاله استفاده کنید.)



۹ــ خط $3x-\sqrt{3}y=1$ با جهت مثبت محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱۰ــ معادلهٔ خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند.

۱۱ــ درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\cos 30^\circ < \cos 40^\circ$

ب) $\tan 70^\circ < \tan 80^\circ$

ج) $\sin 20^\circ < \sin 50^\circ$

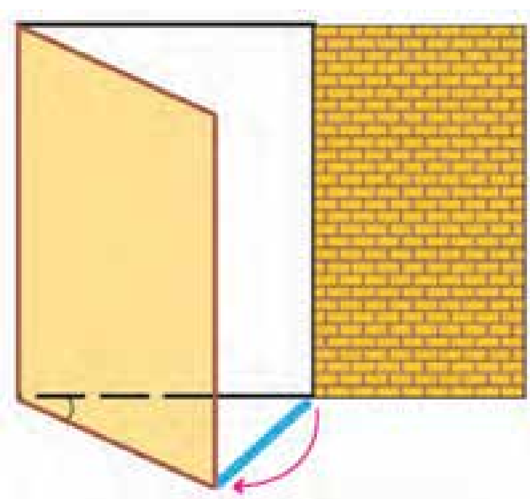
د) $\cos 70 \quad \sin 20^\circ$

هـ) $\cos^2 35 \quad \sin^2 35 \quad 1$

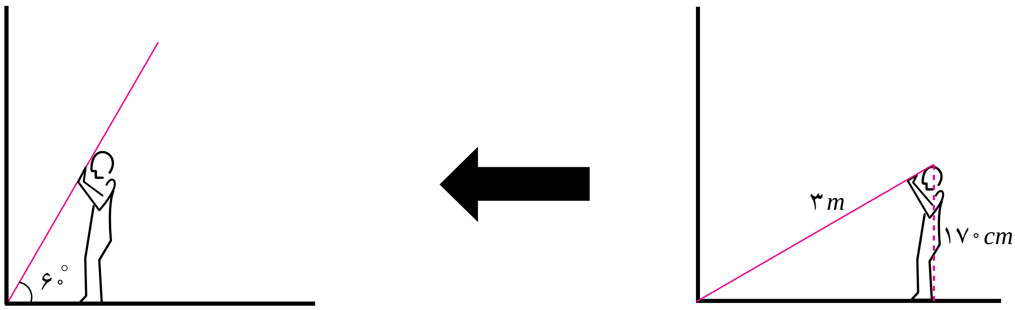
و) $\cos 60^\circ \quad 2\cos 30$

ز) $\frac{\sin 35}{\sin 55} = \tan 35^\circ$

۱۲ــ میله‌ای فلزی داریم که می‌خواهیم برای باز نگه‌داشتن یک در، طبق شکل روبه‌رو از آن استفاده کنیم. عرض در ۷۰ سانتی‌متر است. طول میله چقدر باشد تا زاویهٔ بین در و دیوار ۴۰ درجه شود؟ اگر طول میله ۶۰ سانتی‌متر باشد، چه زاویه‌ای بین در و دیوار ایجاد می‌شود؟ (از رسم مثلث و نقاله استفاده کنید.)



۱۳ــ فردی با قد یک متر و هفتاد سانتی متر می خواهد میله‌ای به طول ۳ متر را طبق شکل زیر با زاویهٔ ۶۰ درجه بلند کند. او ابتدا یک سر میله را به دیوار تکیه می‌دهد و میله را تا قد خود بالا می‌آورد. او آن‌قدر به سمت دیوار حرکت می‌کند تا زاویهٔ میله با سطح زمین ۶۰ درجه شود. او چقدر به سمت دیوار حرکت کرده است؟



۱۴ــ معنای عبارت‌های $\sin^2\theta$، $\sin\theta^2$ و $\sin 2\theta$ را توضیح دهید و با یک مثال برای θ تفاوت آن‌ها را نشان دهید.