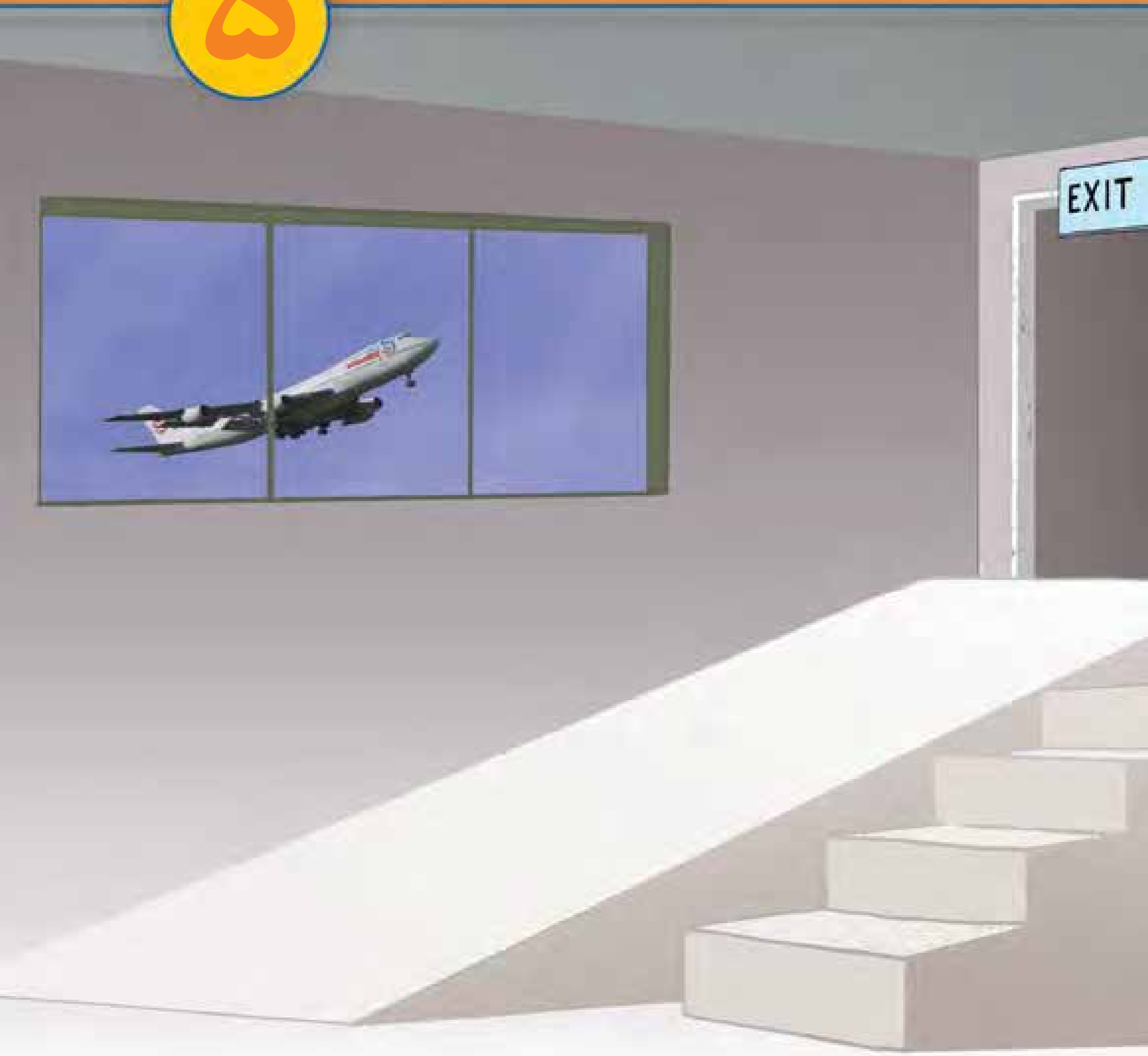
۵

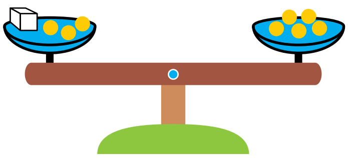
معادلات درجه اول و معادلهٔ خط



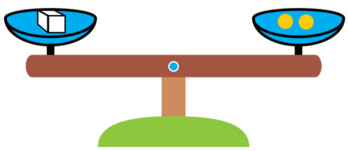
به نظر شما بالا رفتن از پله‌ای که می‌بینید آسان‌تر است یا بالا رفتن از سطح شیب‌داری که در کنار آن است؟

نسبت بالا رفتن از آن‌ها به مسافت افقی طی شده در آن‌ها چه‌قدر است؟

شکل زیر یک ترازوی دوکفه‌ای را نشان می‌دهد که در دو طرف آن چند وزنهٔ یک کیلوگرمی و یک جسم با وزن نامعلوم قرار داده شده تا ترازو به حالت تعادل درآید.



به تعادل درآمدن ترازو به معنای آن است که وزن اجسام قرارگرفته در دوکفهٔ ترازو مساوی است. پس، اگر وزن نامعلوم جسم را x بنامیم، عبارت ریاضی بیان‌کننده این وضعیت x   ۳   ۵ است. مقدار x چقدر است که این تساوی برقرار شده است؟ برای پاسخ به این سؤال، می‌توانیم از هر دو کفهٔ ترازو سه وزنهٔ یک کیلوگرمی را برداریم؛ که در این صورت باز هم ترازو در حالت تعادل باقی می‌ماند.

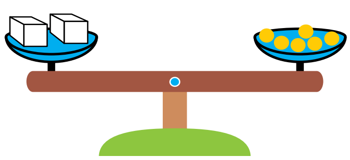


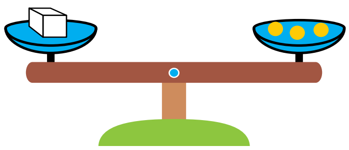
این عمل به معنای آن است که اگر از طرفین تساوی x   ۳   ۵ عدد ۳ را کم کنیم باز هم تساوی برقرار می‌ماند. یعنی x   ۳   ۳   ۵   ۳، پس x   ۲. ترازو نیز نشان می‌دهد که جسم ۲ کیلوگرم وزن دارد.

از این مشاهدات می‌توان نتیجه گرفت که اگر از طرفین یک تساوی، عدد یکسانی را کم کنیم یا به آن اضافه کنیم باز هم تساوی برقرار می‌ماند. به عبارت دیگر :

> اگر a   b، آن‌گاه a   c   b   c.
> اگر a   b، آن‌گاه a   c   b   c.

شکل روبه‌رو ترازویی را نشان می‌دهد که در یک طرف آن دو جسم یکسان با وزن نامعلوم و در طرف دیگر آن ۶ وزنهٔ یک کیلوگرمی قرار دارد و ترازو به حالت تعادل درآمده است.





اگر وزن نامعلوم جسم را با x نشان دهیم، عبارت ریاضی بیان کنندهٔ این وضعیت ۶   ۲x است. اگر وزن‌های هر طرف ترازو را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم و از هر کفهٔ ترازو، نیمی از وزن آن را برداریم باز هم تعادل برقرار می‌ماند زیرا نصف دو وزن مساوی باز هم مساوی‌اند.

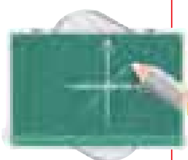
این عمل به معنای آن است که در تساوی ۶   ۲x، طرفین را بر ۲ تقسیم کرده‌ایم و باز هم تساوی برقرار مانده‌است. یعنی $\frac{۶}{۲}=\frac{۲x}{۲}$، پس ۳   x. ترازو نیز نشان می‌دهد وزن جسم ۳ کیلوگرم است.

اگر طرفین یک تساوی را در عددی ضرب یا بر عدد مخالف صفری تقسیم کنیم، باز هم تساوی برقرار می‌ماند.

به عبارت دیگر :

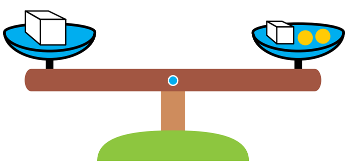
اگر a   b، آن‌گاه ac   bc.

اگر a   b و c مخالف صفر باشد، آن‌گاه $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.



تمرین در کلاس

محسن آقا مغازه‌دار است. روزی یک مشتری از او نمک خواست. محسن آقا در مغازه دو بسته نمک، یکی کوچک و یکی بزرگ داشت اما وزن آن‌ها را نمی‌دانست؛ فقط می‌دانست که وزن بستهٔ کوچک‌تر نصف وزن بستهٔ بزرگ‌تر است. بنابراین بستهٔ بزرگ‌تر را در یک کفه، و بستهٔ کوچک‌تر را در کفهٔ دیگر ترازو قرار داد و در کفهٔ دوم آن‌قدر وزنه گذاشت تا ترازو به حال تعادل درآمد. وزنه‌های مورد نیاز برای به‌تعادل درآمدن ترازو دو وزنهٔ یک کیلوگرمی بود.



۱ــ آیا می‌توانید با توجه به شکل توضیح دهید که وزن هریک از بسته‌های نمک چقدر است؟

۲ــ رابطهٔ ریاضی بین وزن‌هایی را که در دو کفهٔ ترازو قرار دارند، بنویسید و وزن هربسته را به‌دست آورید.

۳ــ رابطهٔ ریاضی دیگری برای حل همین مسئله بنویسید و مسئله را حل کنید.

در عملیات بالا، برای یافتن وزن نامعلوم یک جسم، مقدار وزن نـامعلوم را با یـک نماد مانند x نشان دادیم و یک تساوی برحسب x به‌دست آوردیم. این‌گونه تساوی‌ها را **معادله**، و مقدار نامعلوم را **مجهول معادله** و یافتن مجهول را **حل معادله** می‌نامند. حل یک معادله، با عملیات ریاضی و ساختن یک معادله ساده‌تر انجام می‌شود. معادلاتی نظیر معادلاتی کـه در ایـن فصل روی آن‌ها کار خواهیم کرد، با عملیات زیر که آن‌ها را

عملیات جبری ساده می‌نامند، می‌توان حل کرد.

۱ــ جمع طرفین معادله با مقدارهای مساوی،

۲ــ کم کردن مقدارهای مساوی از طرفین معادله،

۳ــ ضرب طرفین معادله در مقدارهای مخالف صفر مساوی،

۴ــ تقسیم طرفین معادله بر مقدارهای مساوی مخالف صفر.

با انجام عملیات جبری ساده و محاسبات معمولی می‌توان به معادله‌ای رسید که مجهول معادله در یک طرف و مقادیر معلوم در طرف دیگر قرار گیرند و با این اعمال، معادله حل خواهد شد.

مثال : معادلهٔ ۱ ۴ ۱۰x را حل کنید.

۱۰x ۴ ۱

۱۰x ۴ ۴ ۱ ۴

۱۰x ۵

$$\frac{۱۰x}{۱۰}=\frac{۵}{۱۰}$$

$$x=\frac{۵}{۱۰}=۰/۵$$

مثال : معادلهٔ ۳x ۱ (۴ ۳x)۲ را حل کنید.

۲(۳x ۴) ۱ ۳x

۶x ۸ ۱ ۳x

۶x ۸ ۳x ۱ ۳x ۳x

۹x ۸ ۱

۹x ۸ ۸ ۱ ۸

۹x ۹

$$x=\frac{-۹}{۹}=-۱$$

مثال : معادلهٔ $\frac{۲}{۵}(x-۴)=۲x+۱$ را حل کنید. برای حل یک مسئله معمولاً راه‌های متفاوتی را می‌توان در پیش گرفت. برای مثال این معادله را با دو روش حل می‌کنیم.

روش اول

$$\frac{۲}{۵}(x-۴)=۲x+۱$$

$$\frac{۵}{۲}\times\frac{۲}{۵}(x-۴)=\frac{۵}{۲}\times(۲x+۱)$$

x ۴ ۵x $\frac{۲}{۵}$

روش دوم

$$\frac{۲}{۵}(x-۴)=۲x+۱$$

$$\frac{۲}{۵}x-\frac{۸}{۵}=۲x+۱$$

$$\frac{۲}{۵}x-\frac{۸}{۵}-۲x=۱$$

$$\frac{۲}{۵}x - ۲x = \frac{۸}{۵} + ۱$$

$$-\frac{۸}{۵}x = \frac{۱۳}{۵}$$

$$-\frac{۸}{۵}x \times ۵ = \frac{۱۳}{۵} \times ۵$$

$$۸x \quad ۱۳$$

$$x = \frac{۱۳}{-۸} = -۱/۶۲۵$$

$$x \quad ۴ \quad ۵x \quad ۵x \quad \frac{۲}{۵} \quad ۵x$$

$$۴x \quad ۴ \quad ۲/۵$$

$$۴x \quad ۴ \quad ۴ \quad ۴ \quad \frac{۲}{۵}$$

$$۴x \quad \frac{۶}{۵}$$

$$x = \frac{\frac{۶}{۵}}{-۴} = -۱/۶۲۵$$

تمرین در کلاس

۱ــ معادلهٔ ۸۱ $(۷ \quad ۲x)$۳ را حل کنید و در هر مرحله از حل، درستی عملیات خود را با ذکر دلیل توضیح دهید.

۲ــ این معادله را از راه دیگری حل کنید. در هر مرحله، علت درستی عملیات خود را توضیح دهید.

فعالیت

۱ــ چهار معادلهٔ زیر را حل کنید.

الف) $۳x \quad ۶ \quad ۱۲ \quad x$ ب) $۲x \quad ۶ \quad ۱۲$

ج) $x \quad ۳ \quad ۶$ د) $۴x \quad ۱۲ \quad ۲۴$

۲ــ جواب این معادلات با هم چه رابطه‌ای دارند؟

۳ــ هرکدام از این معادلات را با اعمال جبری ساده، به‌ترتیب زیر از یک‌دیگر به‌دست آورید.

(الف) → (د) → (ج) → (ب) → (الف)

معادلاتی را که با عملیات جبری ساده، از روی هم به دست می‌آیند **معادلات هم ارز** می‌نامند.

معادلات هم ارز جواب‌های یکسانی دارند. برای حل یک معادله، سعی می‌کنیم که یک معادلهٔ هم‌ارز با آن به‌دست آوریم که شکل ساده‌ای داشته باشد.

اگر مجهول معادله‌ای را با x نشان داده باشیم و پس از ساده‌کردن به‌صورت $ax \quad b \quad ۰$ درآید، به‌طوری که $a \neq ۰$، آن را یک معادلهٔ درجه اول می‌نامند.

در معادلهٔ $ax \quad b \quad ۰$، a و b اعداد مشخصی هستند و برای حل آن، طرفین این معادله را با b جمع می‌کنیم و به معادلهٔ $ax \quad b$ می‌رسیم. سپس با تقسیم طرفین بر a، نتیجه می‌شود $x=-\frac{b}{a}$.

توجه کنید

جواب معادله $۲x \quad ۰$ برابر است با $x=\frac{۰}{۲}=۰$.

جواب معادله $۲x \quad ۱$ برابر است با $x=\frac{۱}{-۲}=-\frac{۱}{۲}$.

مسائل

۱ــ با یک خط، هر معادله در جدول (۱) را به عبارت فارسی بیان‌کنندهٔ همان معادله، در جدول (۲) (در صورت وجود) وصل کنید.

جدول (۱)

$۲-\frac{x}{۳}=-۲$
$\frac{y}{۲}=۳y$
$\frac{x}{۲}+۵=x-۲$
$\frac{a}{۲}=۳a$
$\frac{x}{۳}-۲=-۲$

جدول (۲)

نصف عددی با عدد پنج جمع شده است و برابر تفریق ۲ از آن عدد شده است
حاصل تقسیم عددی بر ۳ را از ۲ کم کرده‌ایم، حاصل برابر (۲−) شده است
نصف عددی برابر سه برابر همان عدد است

۲ــ معادلات زیر را حل کنید.

۱) $۱۶ \quad ۴y \quad ۰$

۲) $۱۰۰ \quad ۵۰ \quad ۴d$

۳) $\frac{a-۳}{۴}=۲$

۴) $۷ \quad ۲e \quad ۱۹ \quad ۴e$

۵) $۲/۵ \quad ۰/۳x \quad ۱/۱$

۶) $۴(۵ \quad ۲y) \quad ۵/۶y$

۷) $\frac{۱۲-۵c}{۵}=-\frac{۱}{۱۰}$

۳ــ مجموع سه عدد زوج متوالی **۴۲** می‌باشد. این اعداد را به دست آورید.

۴ ــ از تعداد بیسکویتی که مریم داشت نیمی را به مادرش و نیم بقیه را به برادرش داد. برای خودش **۵** بیسکویت باقی ماند. تعداد بیسکویت‌های اولیهٔ او چند تا بوده است؟

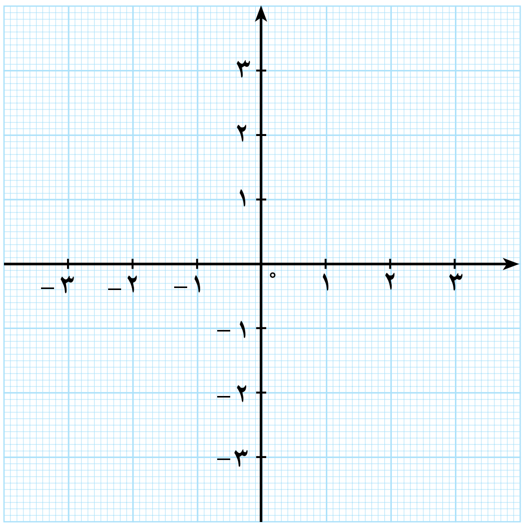
۵ ــ به ازای چه مقداری از t، تساوی $\frac{۲t+۱}{t-۱} = ۰/۲$ برقرار می‌شود.

مسئلهٔ زیر در کتاب مفتاح المعاملات باب چهل ام آمده است :

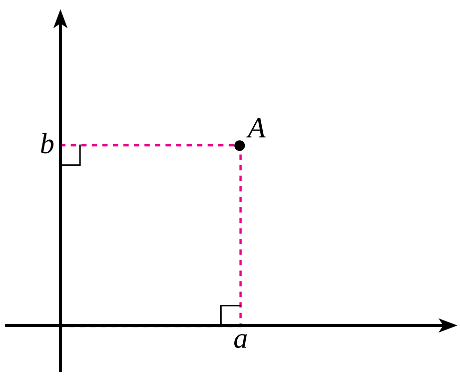
بازرگانی یک درهم به غلامش داد و گفت که به بازار برو و به اندازه یک درهم خربزه بخر و به باربر بده تا بیاورد. هزینه بیست خربزه یک درهم است و باربر شصت خربزه را با یک درهم به مقصد می‌رساند. غلام رفت و خربزه خرید و به همراه باربر آورد. غلام چند خربزه آورده است؟

دستگاه مختصات

دو محور عمود برهم در صفحه رسم می کنیم. محل برخورد این دو محور را مبدأ این محورها در نظر می گیریم. پاره خط واحد هر دو محور را یکسان در نظر می‌گیریم. این محورها را یک دستگاه مختصات برای صفحه می‌نامیم.



از یک نقطه دلخواه مانند A در صفحه، خط‌هایی را عمود بر این دو محور رسم می کنیم. محل برخورد این خط‌ها با محورها اعدادی را نشان می‌دهند که مختصات نقطهٔ A نامیده می‌شوند.



در شکل بالا زوج $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ مختصات نقطهٔ A است، a را طول نقطهٔ A و b را عرض نقطهٔ A می‌نامند. در این شکل، محور افقی را محور طول‌ها و محور عمودی را محور عرض‌ها می‌نامند.

تمرین در کلاس

۱ــ یک دستگاه مختصات در صفحه رسم کنید.

۲ــ نقاطی در صفحه بیابید که مختصات آن‌ها $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}$ باشند و به ترتیب آن‌ها را A، B، C و D بنامید.

۳ــ خط گذرنده از دو نقطه A و D را رسم کنید و بررسی کنید که کدام‌یک از نقاط به مختصات $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارند.

۴ــ در مورد طول و عرض نقاطی که روی این خط قرار دارند چه حدسی می‌زنید؟

۵ ــ نقاطی که طول آنها مثبت و عرض آن‌ها صفر است را روی شکل مشخص کنید.

۶ــ مختصات نقاطی که روی محور طول‌ها و سمت چپ محور عرض‌ها هستند، چه ویژگی دارند؟

۷ــ نقاطی که عرض‌های آن‌ها منفی و طول آن‌ها صفر است را روی شکل مشخص کنید.

۸ ــ مختصات نقاطی که روی محور عرض‌ها و بالای محور طول‌ها هستند، چه ویژگی دارند؟

۹ــ نقاطی از صفحه را که طول و عرض آن‌ها مثبت است روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را **ربع اول** می‌نامند.)

۱۰ــ نقاطی از صفحه را که طول آن‌ها منفی و عرض آن‌ها مثبت است، روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را **ربع دوم** می‌نامند.)

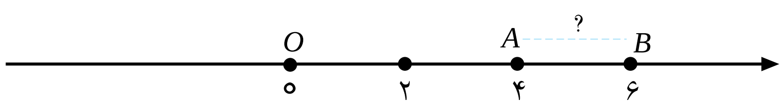
۱۱ــ نقاطی از صفحه را که طول آن‌ها منفی و عرض آن‌ها منفی است، روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را **ربع سوم** می‌نامند.)

۱۲ــ نقاطی از صفحه را که طول آن‌ها مثبت و عرض آن‌ها منفی است، روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را **ربع چهارم** می‌نامند.)

فاصلهٔ بین دو نقطه

فعالیت

روی محور اعداد، مبدأ را O و نقطهٔ نظیر ۴ را A و نقطهٔ نظیر ۶ را B بنامید.



۱ــ طول پاره‌خط‌های OA و OB چقدر است؟

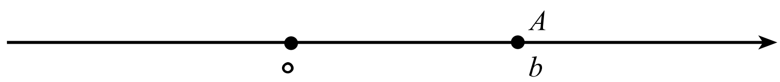
۲ــ طول پاره‌خط AB چقدر است؟ فاصلهٔ دو نقطه نظیر ۴ و ۶ از یکدیگر چقدر است؟

۳ــ دو عدد مثبت دلخواه x و y به‌صورت $x<y$ در نظر بگیرید. نقاط نظیر این دو عدد را روی محور اعداد به ترتیب C و D بنامید. طول پاره‌خط‌های OC و OD چقدر است؟

۴ــ طول پاره‌خط CD چقدر است؟ فاصلهٔ نقاط نظیر x و y از یکدیگر چقدر است؟

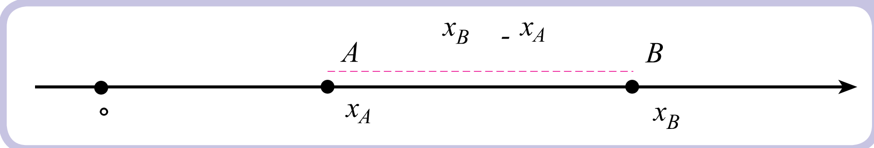
اگر A یک نقطه روی محور اعداد باشد که نظیر عدد b است، b را طول نقطهٔ A می‌نامند و آن را با x_A نشان می‌دهند.

$$x_A = b$$



اگر A و B دو نقطه روی محور اعداد باشند که A سمت چپ B قرار دارد، داریم :

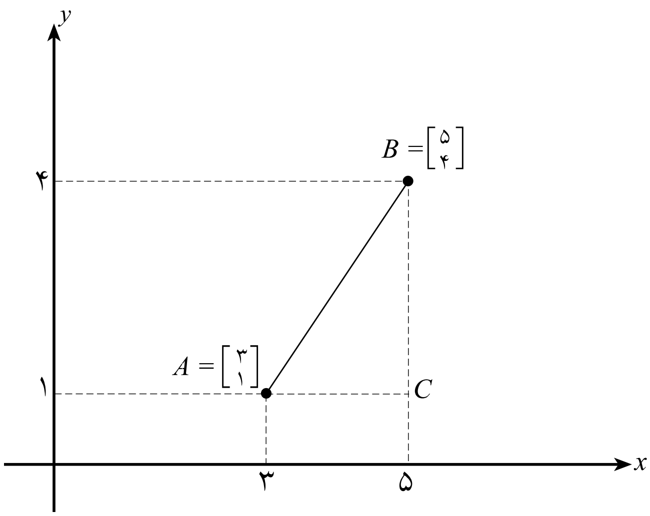
فاصله A و B $x_B \quad x_A$



به‌طورکلی، برای دو نقطهٔ A و B روی محور اعداد، بدون توجه به آن که کدام نقطه سمت چپ دیگری است، فاصلهٔ بین این دو نقطه برابر است با $X_B \quad X_A$.

اگر دو نقطهٔ A و B روی محور y ها قرار داشته باشند، فاصلهٔ A تا B چقدر است؟

اگر بخواهیم فاصلهٔ دو نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۵\\۴\end{bmatrix}$ را در صفحه بیابیم، ابتدا این نقاط را در صفحه مشخص می‌کنیم. طبق شکل زیر یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهیم.

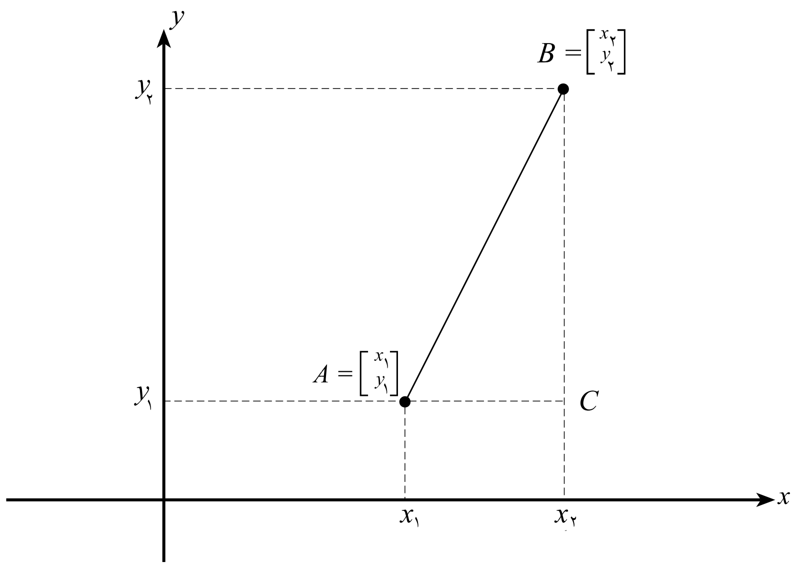


فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B، طول پاره‌خط AB، یعنی وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ACB است. طول AC برابر $۵ \quad ۳ \quad ۲$ و طول BC برابر $۴ \quad ۱ \quad ۳$ است، پس با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم :

$$\text{طول } AB = \sqrt{(۵-۳)^۲ + (۴-۱)^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$

به‌طورکلی، برای یافتن فاصلهٔ دو نقطهٔ دلخواه $A = \begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{bmatrix}$ می‌توانیم مانند بالا عمل کنیم.

فرض کنید که این دو نقطه در صفحه به شکل زیر باشند و طبق شکل زیر یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهیم.



پاره‌خط AB وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ACB است. طول AC برابر $x_۲ \quad x_۱$ و طول BC برابر $y_۲ \quad y_۱$ است، پس داریم :

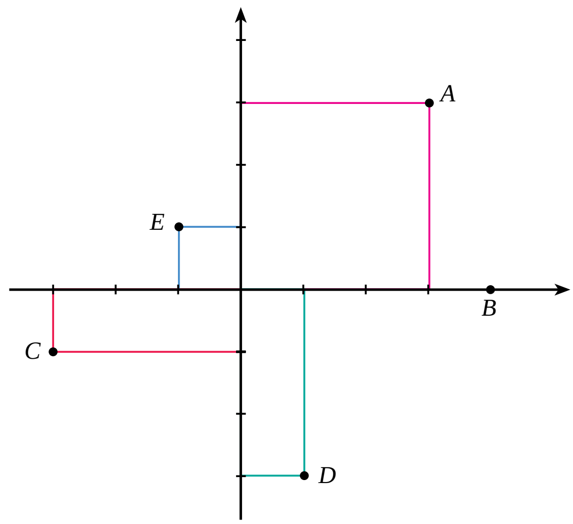
$$\boxed{\text{طول } AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}}$$

مثال : فاصلهٔ دو نقطهٔ $A = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۶ \end{bmatrix}$ را بیابید.

با جایگذاری در فرمول فاصلهٔ دو نقطه داریم :

$$\text{فاصلهٔ A و B} = \sqrt{(-۳-۲)^۲ + (۵-۶)^۲} = \sqrt{(-۵)^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۲۵+۱} = \sqrt{۲۶}$$

۱ــ در شکل زیر مختصات نقاط داده شده را به دست آورید و فاصلهٔ نقطهٔ A تا هر یک از نقاط دیگر را محاسبه کنید.



۲ــ سه نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}-۱\\۳\end{bmatrix}$ رأس‌های یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) طول اضلاع و محیط این مثلث را به‌دست آورید.

ج) نوع این مثلث را از لحاظ متساوی‌الساقین‌بودن یا قائم‌الزاویه‌بودن مشخص کنید.

رابطهٔ خطی

برخی پدیده‌ها با هم رابطه دارند. برای مثال، میزان آب رودخانه‌ها با میزان باران آمده رابطه دارد. میزان توانایی جسمانی شما با میزان ورزشی که می‌کنید رابطه دارد. نمرهٔ امتحانی شما با میزان تلاش شما در یادگیری دروس رابطه دارد. پایهٔ تحصیلی که در آن مشغول تحصیل هستید با سن شما رابطه دارد. به همین ترتیب موارد بسیاری را می‌توانید بیابید که با هم رابطه داشته باشند.

فعالیت

۱ـ در تساوی زیر به جای مربع، علامت یکی از چهار عمل اصلی را قرار دهید.

۱۰ ...... $\square$ ......

۲ـ در نقطه‌چین سمت چپ، یک عدد دلخواه قرار دهید، سپس در نقطه‌چین دیگر عددی قرار دهید که تساوی برقرار باشد.

۳ـ آیا برای انتخاب عدد اول محدودیتی وجود دارد؟

۴ـ آیا برای عدد دوم اجباری وجود دارد؟

در فعالیت بالا، هر نقطه‌چین جای یک عدد را نشان می‌داد و می‌توانستیم آن‌ها را با دو نماد مانند x و y نشان دهیم. تساوی بالا نیز یک معادله را نشان می‌دهد، با این تفاوت که در آن دو مجهول وجود دارد که یکی را به انتخاب خود می‌توانستیم تعیین کنیم ولی دیگری از طریق حل معادله مشخص می‌شد.

تشخیص رابطه بین چیزهایی که با آن‌ها سر و کار داریم، نقشی اساسی در زندگی ما دارند. در فعالیت‌های زیر یک نوع ساده از رابطه‌ها مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

فعالیت

سارا و اکرم دو خواهر هستند. وقتی اکرم به دنیا آمد، سارا ۴ ساله بود.

۱ـ وقتی سارا ۷ ساله شود، اکرم چند سال خواهد داشت؟

۲ـ وقتی اکرم ۲۰ ساله شود، سارا چند ساله خواهد شد؟

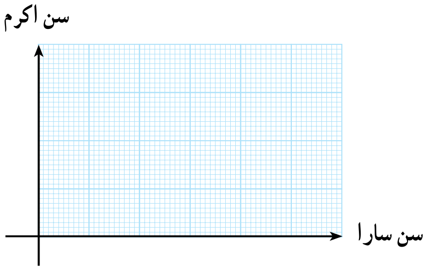
۳ـ اگر سن اکرم را با y و سن سارا را با x نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین این دو مقدار وجود دارد؟

۴ـ اگر اکرم ۵ سال بزرگ‌تر شود، سارا چند سال بزرگ‌تر می‌شود؟ اگر اکرم ۸ سال بزرگ‌تر شود، سارا چند سال بزرگ‌تر می‌شود؟

۵ــ جدول زیر را کامل کنید.

سن سارا	۴	۷	□	□	۱۴	□	□
سن اکرم	۰	□	۵	□	□	۱۳	□

۶ــ نقاط این جدول را در شکل مقابل مشخص و به هم وصل کنید. چه شکلی به‌دست می‌آید؟

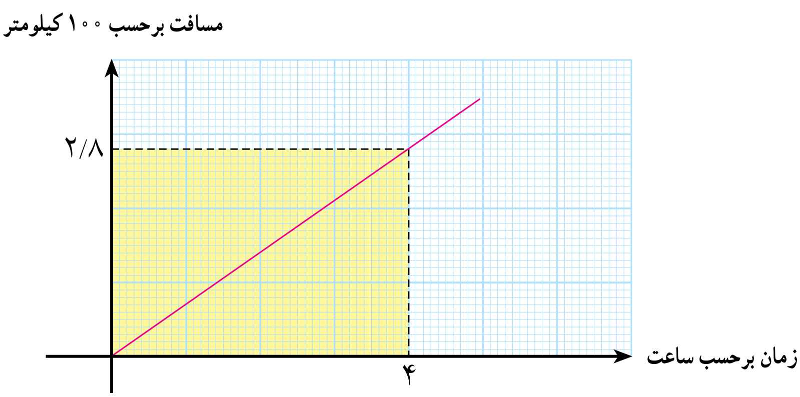


نمودار بالا، رابطهٔ بین سن سارا و سن اکرم را نشان می‌دهد. از آن جا که این رابطه به‌صورت $x \quad y \quad ۴$ یا $y \quad x \quad ۴$ می‌باشد، نمودار بالا را نمودار معادلهٔ $y \quad x \quad ۴$ نیز می‌نامند.

در فعالیت بالا با تشکیل جدول و یافتن رابطهٔ بین آنها، نمودار رابطه رسم می‌شد. در فعالیت زیر فرض بر این است که نمودار رابطه داده شده است و از طریق آن می‌خواهیم با بیان ریاضی آن رابطه و تشکیل جدول آن رابطه، به سؤالات مطرح‌شده پاسخ دهیم.

فعالیت

یک خودرو از زاهدان به طرف کرمان حرکت کرده است. نمودار رابطهٔ بین زمان و مسافتی که خودرو طی می‌کند به شکل زیر است. محور افقی، نشان‌دهندهٔ زمان و محور عمودی نشان‌دهندهٔ مسافت طی شده توسط خودرو است. هریک واحد روی محور افقی معادل یک ساعت و هریک واحد روی محور عمودی معادل ۱۰۰ کیلومتر است.



از روی نمودار صفحهٔ قبل به سؤالات زیر جواب دهید.

۱ــ این خودرو ۴ ساعت پس از حرکت چند کیلومتر با زاهدان فاصله دارد؟

۲ــ جدول زیر را کامل کنید.

ساعت	۲	۴	۶
فاصله تا زاهدان			

۳ــ اگر x نشان‌دهندهٔ مقدار زمان گذشته (برحسب ساعت) از شروع حرکت و y نشان‌دهندهٔ مسافت طی‌شده توسط خودرو (برحسب کیلومتر) باشد، چه رابطه‌ای بین x و y وجود دارد؟ معادلهٔ آن را بنویسید.

۴ــ اگر فاصلهٔ بین زاهدان و کرمان ۵۴۰ کیلومتر باشد، چند ساعت طول می‌کشد تا این خودرو به کرمان برسد؟ درستی جواب خود را از طریق نمودار و معادله‌ای که به‌دست آورده‌اید، نشان دهید. آیا بین این دو جواب تفاوتی وجود دارد؟

۵ــ این خودرو هر ساعت چند کیلومتر راه می‌رود؟ هر دو ساعت چند کیلومتر راه می‌رود؟ نسبت مسافتی که خودرو طی می‌کند به زمان گذرانده شده چقدر است؟ آیا این نسبت ثابت است؟

در تمامی این فعالیت‌ها با مقدارهایی روبه‌رو بوده‌ایم که با یکدیگر رابطه داشته‌اند. اگر بین مقادیر دو متغیر رابطه برقرار باشد و یکی از آن‌ها را با x و دیگری را با y نشان دهیم، بیان ریاضی رابطه بین x و y به‌صورت معادله‌ای برحسب x و y است. در مثال سن سارا و اکرم این رابطه به شکل $y = 4x$ بود. در مثال زمان و مسافت طی‌شده، این رابطه به‌صورت $y = 70x$ بود.

نمودار همهٔ رابطه‌ها در مثال‌های بالا به‌صورت خط بودند. در حالت‌هایی که نمودار رابطه بین دو مقدار به‌صورت خط باشد، گوییم آن دو مقدار به‌طور خطی به هم مرتبط‌اند و با هم **رابطه خطی** دارند.

مثال : کارگری ساعتی ۱۵۰۰ تومان دستمزد می‌گیرد. رابطهٔ بین ساعت‌های کار این کارگر و دستمزدی که می‌گیرد یک رابطه خطی است. اگر x میزان ساعت کاری و y دستمزد او باشد، این رابطه به‌صورت $y = 1500x$ است.

ویژگی مشترک رابطه‌های خطی آن است که نسبت افزایش یک متغیر به افزایش (یا کاهش) متغیر دیگر مقداری ثابت است. موارد بسیاری هم وجود دارد که رابطه بین دو متغیر، خطی نیست.

فعالیت

رابطهٔ بین طول ضلع یک مربع و مساحت آن را در نظر بگیرید. طول ضلع مربع را با x و مساحت آن را با y نشان دهید.

۱ــ رابطهٔ بین x و y را با یک معادله بنویسید.

۲ــ جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۳	۴	۵
y			۹		

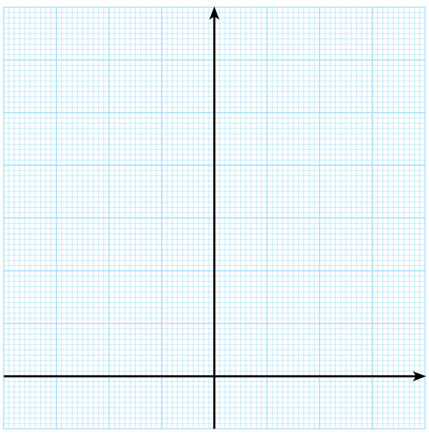
۳ــ در محورهای مختصات، هر واحد روی محور افقی را نمایش طول ضلع مربع برحسب سانتی‌متر و هر واحد روی محور عمودی را نمایش مساحت مربع برحسب سانتی‌مترمربع در نظر بگیرید و نقاط به‌دست‌آمده در جدول را در صفحه معین کنید.

۴ــ میزان افزایش مساحت مربع را وقتی طول ضلع آن از ۱ به ۲ افزایش می‌یابد حساب کنید. این میزان را وقتی طول ضلع مربع از ۲ به ۳ افزایش می‌یابد حساب کنید. این میزان را وقتی طول ضلع مربع از ۴ به ۵ افزایش می‌یابد حساب کنید. آیا نسبت افزایش مساحت مربع به افزایش طول ضلع مربع مقدار ثابتی است؟

۵ ــ اگر بخواهیم این نقاط را به هم وصل کنیم، آیا می‌توان با یک خط همه این نقاط را به هم وصل کرد؟

۶ ــ با کامل کردن جدول زیر، نمودار معادلهٔ $y \quad x^2$ را برای مقادیر مثبت x با دقت مناسب رسم کنید.

x	/۲	/۵	/۸	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳
x^2					۱/۴۴		۲/۵۶	۳/۲۴			۵/۷۶		۷/۸۴	



۷ــ از جدول بالا کمک بگیرید و جدول زیر را کامل کنید.

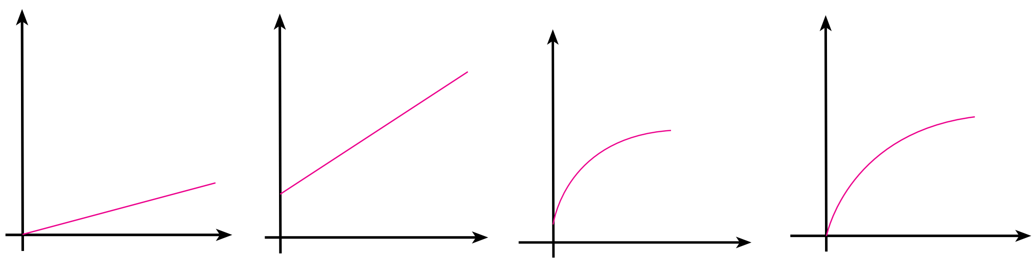
x	−۳	−۲/۸	−۲/۶	−۲/۴	−۲/۲	−۲	−۱/۸	−۱/۶	−۱/۴	−۱/۲	−۱	...
x^2												

۸ ــ با استفاده ازجدول بالا، نمودار معادلهٔ $y \quad x^2$ را برای مقادیر مثبت و منفی x رسم کنید.

به‌عنوان مثالی دیگر، به رابطهٔ بین سن و قد یک فرد، از نوزادی تا مرحلهٔ بلوغ و پس از آن، توجه کنید. میزان افزایش قد نوزاد در سال‌های اولیهٔ زندگی با میزان افزایش قد در سن‌های بالاتر یکسان نیست.

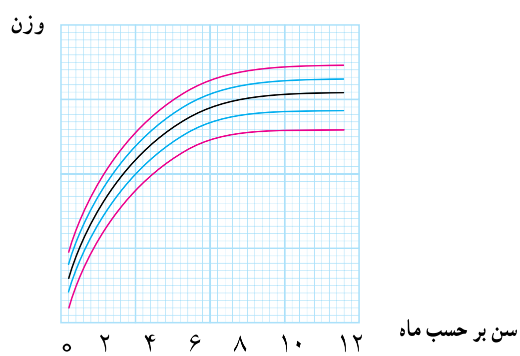
تمرین در کلاس

۱ــ در شکل‌های زیر محور افقی نشان‌دهندهٔ زمان برحسب ماه و محور عمودی نشان‌دهندهٔ طول قد یک انسان برحسب متر می‌باشد. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار رشد قد یک انسان در طول زمان باشد؟



۲ــ محل برخورد نمودار با محور y، نشان‌دهندهٔ چیست؟

محققان با بررسی فرایند و مراحل رشد کودکان نمودارهایی تنظیم کرده‌اند. پزشکان اطفال از این نمودارها برای بررسی وضعیت رشد کودکان استفاده می‌کنند.



حل یک مسئله

دانش‌آموزان مدرسه‌ای تصمیم گرفتند تا در روز نیکوکاری یک بازار خیریه به نفع نیازمندان برگزار کنند. قرار شد در این بازار یک روزه، شربت بفروشند و سود آن را برای نیازمندان مصرف کنند. آن‌ها یک بستهٔ صدتایی لیوان یک بار مصرف به مبلغ هزار تومان و مقداری پودر شربت خریدند. هزینهٔ خود شربت، بدون در نظرگیری قیمت لیوان‌ها، هر لیوان ۹۰ تومان می‌شود و پودر شربت‌های استفاده نشده به فروشگاه پس داده می‌شود.

یکی از دانش‌آموزان پیشنهاد کرد که هر لیوان شربت را ۱۲۵ تومان بفروشیم تا سود کافی ببریم. دانش‌آموز دیگری گفت: اگر به اندازه کافی شربت نفروشیم ممکن است ضرر کنیم. دانش‌آموزان تصمیم گرفتند برای تشخیص وضعیت سود و ضرر این کار از معلم ریاضی خود کمک بگیرند.

معلم گفت که ابتدا جدولی تشکیل دهید که در آن به‌ازای هر تعداد لیوان فروخته شده، میزان هزینهٔ مصرف‌شده و درآمد حاصل از فروش و سود (یا ضرر) معلوم شده باشد. جدول زیر را جدول هزینه ــ درآمد می‌نامیم.

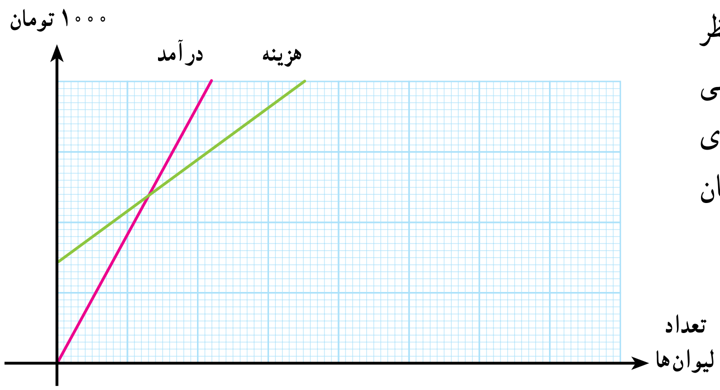
جدول

تعداد لیوان‌های فروخته‌شده	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
هزینهٔ صرف‌شده						
درآمد حاصل از فروش						
سود یا ضرر						

معلم سپس گفت: شما با این جدول می‌توانید تشخیص دهید چه وقت ضرر کرده‌اید و چه وقت سود برده‌اید.

آیا می‌توانید از روی این جدول تشخیص دهید با چه میزان فروش نه سود کرده‌اید و نه ضرر؟

معلم گفت: برای تشخیص بهتر وضعیت هزینه و درآمد حاصل از این کار، نمودار مربوط به هزینه و درآمد را مانند نمودار روبه‌رو در یک صفحه رسم کنید. محور افقی را تعداد لیوان‌های فروخته‌شده و محور عمودی را یک بار هزینه و یک بار درآمد در نظر بگیرید. هریک واحد روی محور افقی را معادل ۱۰ لیوان[1] و هریک واحد روی محور عمودی را معادل ۱۰۰۰ تومان در نظر بگیرید.



۱ــ اگرچه تعداد لیوان‌ها عدد حسابی است و نمودار واقعی گسسته است، ولی برای درک بهتر روابط، مناسب است نمودار را یک خط پیوسته فرض کنیم.

معلم پرسید نقطهٔ تقاطع این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟
دانش‌آموزان گفتند در این نقطه میزان هزینه و درآمد مساوی خواهد شد.
معلم پرسید : آیا می‌توانید حساب کنید این نقطه، با چه تعداد لیوان فروخته شده، رخ می‌دهد؟

تمرین در کلاس

حل مسئلهٔ بالا را با پاسخ‌گویی به سؤالات زیر کامل کنید.
۱ــ جدول هزینه ــ درآمد را کامل کنید.
۲ــ نمودارهای مربوط به این جدول را رسم کنید.
۳ــ حداقل چند لیوان شربت باید فروخته شود تا سود برده شود؟
۴ــ اگر تمام ۱۰۰ لیوان شربت فروخته شود، چه مقدار سود برده می‌شود؟
۵ ــ اگر هر لیوان ۱۵۰ تومان فروخته شود با رسم نمودار درآمد جدید، به سؤالات بالا در این حالت جدید پاسخ دهید.

مسائل

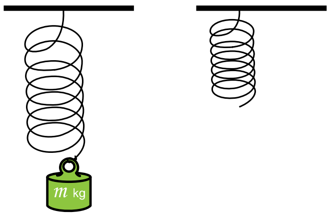
۱ــ قیمت هر بلیط تئاتر ۲۰۰۰ تومان است. اگر x تعداد میهمانان و y مجموع هزینه‌ها باشد :
الف) جدول مقابل را تکمیل کنید.
ب) چه رابطه‌ای بین x و y وجود دارد؟
ج) چرا هیچ مقدار کسری در جدول وجود ندارد؟
د) نمودار متناظر جدول فوق را رسم کنید.

x	۱	۲	۳	۴	۵
y					

۲ــ در یک مستطیل به طول ۳ و عرض ۲ سانتی‌متر، اگر طول آن را x سانتی‌متر افزایش دهیم مساحت آن از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$2x$ ۶ مساحت (سانتی‌مترمربع)

الف) توضیح دهید، اعدادی که در معادله هستند، چه چیزی را نشان می‌دهند.
ب) اگر طول مستطیل را ۳/۲ سانتی‌متر افزایش داده باشیم مساحت مستطیل چه‌قدر می‌شود؟



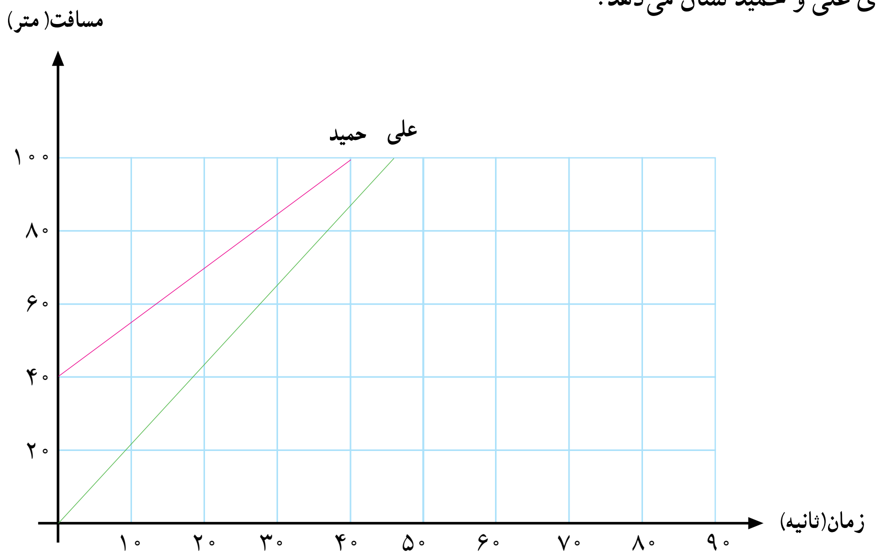
۳ــ طول یک فنر در حالتی که وزنه‌ای به آن آویزان نشده است، ۸ سانتی‌متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم m کیلوگرم به آن آویزان می‌کنیم، طول آن برحسب سانتی‌متر از رابطهٔ L ۸ ۰/۵ m به‌دست می‌آید.

الف) اگر جسمی به جرم ۳/۷۲ کیلوگرم به آن آویزان کنیم، طول فنر چند میلی‌متر افزایش می‌یابد؟

ب) چه وزنه‌ای به فنر آویزان کنیم تا طول آن به ۱۲۳ میلی‌متر برسد؟

۴ــ یک سوسمار در فصل بهار بین ۳۰ تا ۷۰ تخم می‌گذارد و حدود ۹۰ روز طول می‌کشد تا نوزادان سوسمار سر از تخم بیرون آورند. طول هر نوزاد تقریباً ۳۰ سانتی‌متر است. در سال‌های اولیهٔ زندگی، به‌طور متوسط هر سال ۲۲/۵ سانتی‌متر به طول هر بچه سوسمار اضافه می‌شود. پس از چه مدت طول نوزاد سوسمار به ۸۰سانتی‌متر می‌رسد؟

۵ــ علی و برادر کوچک‌ترش حمید، با هم یک مسابقه دو ۱۰۰ متر دادند. چون حمید کوچک‌تر بود، علی به او اجازه داد جلوتر بایستد. نمودار زیر چگونگی مسافت طی‌شده نسبت به زمان سپری‌شده از شروع مسابقه را برای علی و حمید نشان می‌دهد.



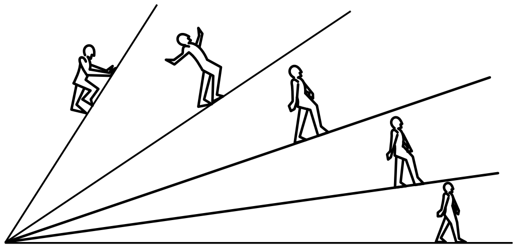
با توجه به نمودار بالا که پس از پایان مسابقه رسم شده است، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) در شروع مسابقه، حمید چند متر جلوتر از علی ایستاده بوده است؟

ب) چند ثانیه طول کشیده است تا علی و حمید به انتهای خط مسابقه برسند؟

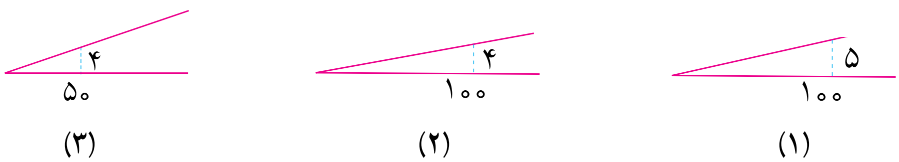
ج) چه کسی برنده شده است؟

د) اگر حمید و علی دویدن را از یک نقطه شروع می‌کردند، چه کسی برنده می‌شد و چند ثانیه زودتر به خط پایان می‌رسید؟

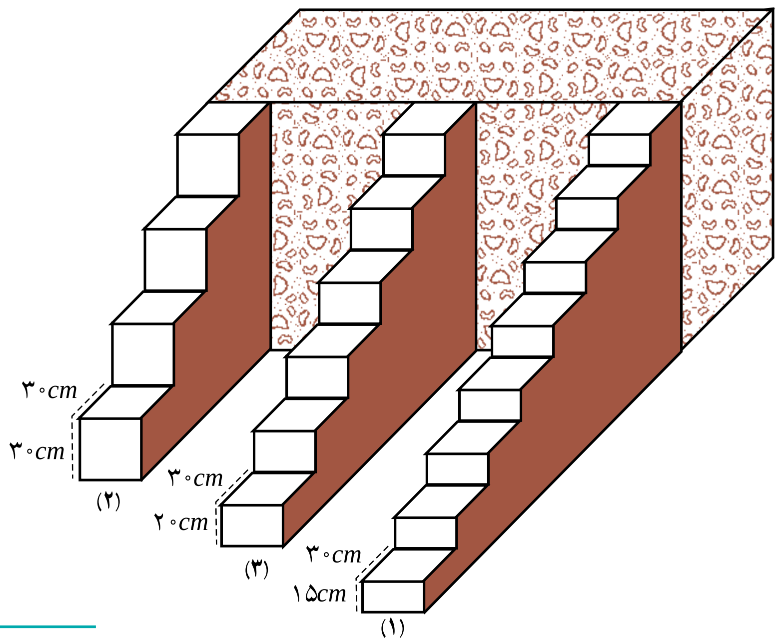


وقتی به کوه می‌روید، از سربالایی‌های متفاوتی بالا می‌روید. بالا رفتن از برخی سربالایی‌ها آسان و از برخی دیگر مشکل است. راه‌رفتن روی زمینی که نه سربالایی باشد و نه سرپایینی، از همه آسان‌تر است. این وضعیت را در بالا رفتن از پله‌ها نیز مشاهده می‌کنید، چون همهٔ پله‌ها مثل هم نیستند. آیا احساس کرده‌اید که بالا رفتن از برخی پله‌ها آسان‌تر از بالا رفتن از پله‌های دیگر است؟

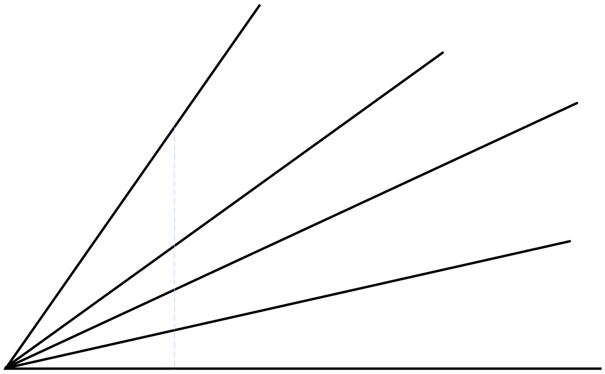
فرض کنید سه خیابان سربالایی داریم که به هنگام بالا رفتن از آنها، در اولی به‌ازای هر ۱۰۰ متر که در راستای افقی جلو می‌رویم، ۵ متر ارتفاع ما زیاد می‌شود، و در دومی به‌ازای هر ۱۰۰ متر که در راستای افقی جلو می‌رویم، ۴ متر ارتفاع ما زیاد می‌شود، و در سومی به‌ازای هر ۵۰ متر که در راستای افقی جلو می‌رویم، ۴ متر ارتفاع ما زیاد می‌شود. بالا رفتن از کدام خیابان آسان‌تر است؟



در زیر سه نمونه پله آورده شده است. بالا رفتن از کدام یک آسان‌تر است؟



میزان سربالایی بودن یک خیابان را می‌توانیم با **نسبت** «**مقدار افزایش ارتفاع**» به «**مقدار مسافت افقی طی‌شده**» اندازه‌گیری کنیم. این نسبت را **شیب** می‌نامند.



$$\text{شیب} = \frac{\text{مقدار افزایش ارتفاع}}{\text{مقدار مسافت افقی طی شده}}$$

در مورد مثال خیابان‌ها در صفحهٔ قبل، شیب آن‌ها را به شکل زیر حساب می‌کنیم :

$$\text{شیب خیابان (۱)} = \frac{۵}{۱۰۰} = ۰/۰۵$$

$$\text{شیب خیابان (۲)} = \frac{۴}{۱۰۰} = ۰/۰۴$$

$$\text{شیب خیابان (۳)} = \frac{۴}{۵۰} = ۰/۰۸$$

با مقایسهٔ این شیب‌ها به‌سادگی می‌توان تشخیص داد که در کدام خیابان، آسان‌تر می‌توان رو به بالا حرکت کرد. هرچه شیب خیابانی بیشتر باشد بالا رفتن از آن مشکل‌تر خواهد بود.

پله‌ها نیز مانند خیابان‌های سربالایی هستند و هر پله نشان می‌دهد که به‌ازای مسافت افقی طی شده، چه مقدار ارتفاع افزایش پیدا می‌کند. شیب پله‌های مثال بالا عبارت است از :

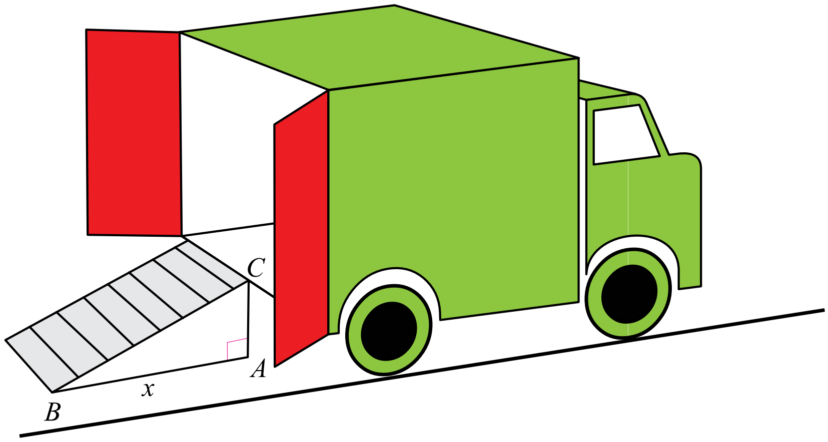
$$\text{شیب پلکان (۱)} = \frac{۱۵}{۳۰} = ۰/۵$$

$$\text{شیب پلکان (۲)} = \frac{۳۰}{۳۰} = ۱$$

$$\text{شیب پلکان (۳)} = \frac{۲۰}{۳۰} \simeq ۰/۶۶$$

پس، بالارفتن از پلهٔ اول آسان‌تر از دو پلهٔ دیگر و بالا رفتن از پلهٔ دوم سخت‌تر از دو پلهٔ دیگر است.

مثال : در یک اسباب‌کشی، برای حمل بارها به داخل کامیون، به کمک یک تختهٔ الوار سطح شیب‌داری ساخته شده است.



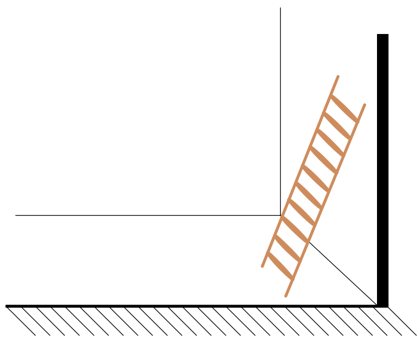
اگر طول الوار ۵ متر و فاصلهٔ لبهٔ درب کامیون تا سطح زمین ۱ متر باشد، شیب این سطح چقدر است؟

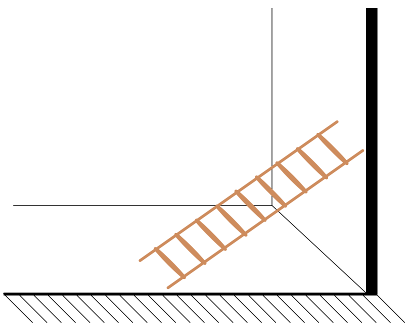
برای یافتن پاسخ، باید فاصلهٔ نقطهٔ پای الوار تا کامیون را حساب کنیم. اگر این فاصله را x بنامیم، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که می‌بینید، می‌توانیم بنویسیم : $۵^{۲} \quad ۱^{۲} \quad x^{۲}$، پس $x = \sqrt{۲۴}$. بنابراین

$$\text{شیب} = \frac{۱}{\sqrt{۲۴}} \approx \frac{۱}{۵} = ۰/۲$$

تمرین در کلاس

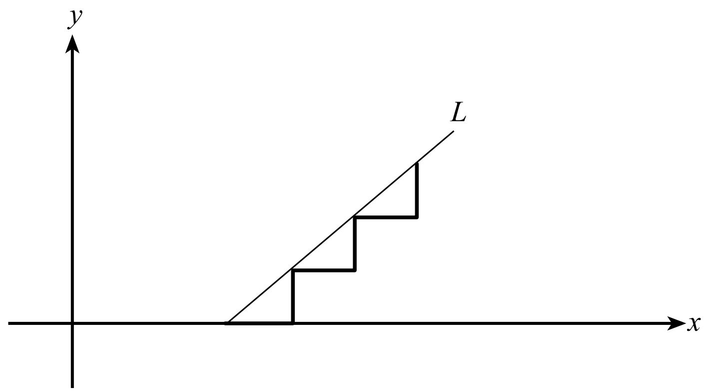
دو نردبان ۴ متری را به شکل‌های (۱) و (۲) به دیوار تکیه داده‌ایم. در شکل (۱) فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار ۱/۲ متر و در شکل (۲) این فاصله ۲/۷ متر است.


(۱)

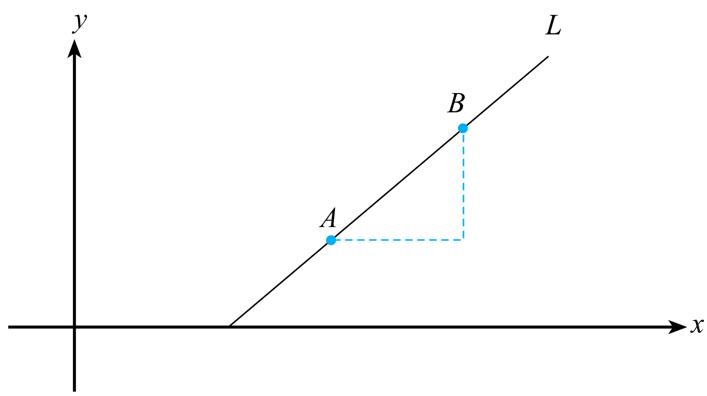

(۲)

۱ــ شیب نردبان را در این دو حالت به‌طور تقریبی با استفاده از ماشین حساب، حساب کنید. کدام یک شیب بیشتری دارد؟

۲ــ اگر نردبان را به گونه‌ای قرار دهیم که بتوانیم تا ارتفاع ۳ متری بالا رویم، شیب نردبان چقدر خواهد شد؟

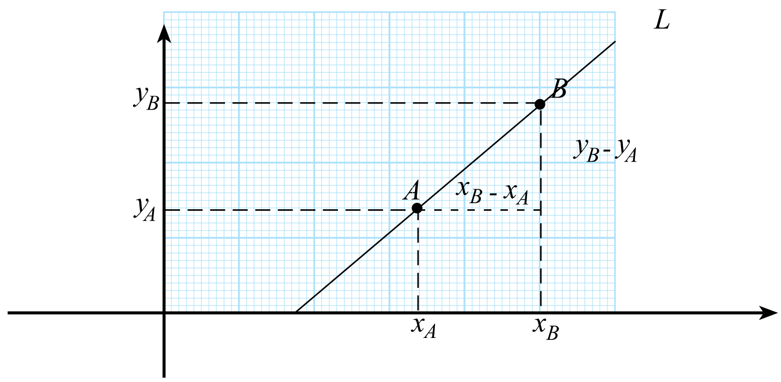


شکل بالا برش عرضیِ یک پلکان را نشان می‌دهد. خط L لبه‌های پله‌ها را به هم وصل می‌کند. شیب خط L را به‌صورت شیب این پلکان تعریف می‌کنند. شیب پلکان به‌صورت نسبت تغییر ارتفاع به مسافت افقی طی شده است.



اگر فقط به خط L توجه کنیم و از یک نقطهٔ آن مانند A به نقطهٔ دیگری مانند B حرکت کنیم، نسبت تغییر ارتفاع به مسافت افقی طی‌شده را می‌توانیم به‌صورت نسبت تغییر عرض به تغییر طول در نظر بگیریم. این نسبت را شیب خط L می‌نامند.

نقاط $A=\begin{bmatrix}x_A\\y_A\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x_B\\y_B\end{bmatrix}$ را روی خط L در نظر بگیرید. اگر روی این خط از نقطهٔ A به نقطهٔ B حرکت کنیم، میزان تغییر ارتفاع برابر است با $y_B \quad y_A$ و میزان مسافت افقی طی‌شده برابر است با $x_B \quad x_A$.



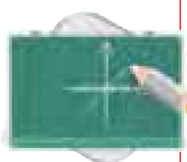
پس، اگر شیب خط L را با m نشان دهیم داریم :

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط باشند، شیب آن خط چقدر است؟

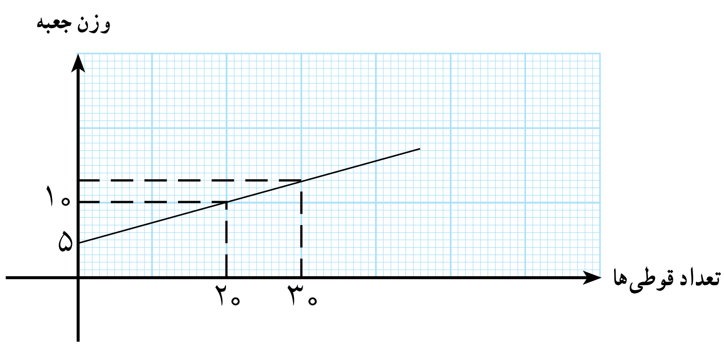
حل : با حرکت از نقطهٔ A به نقطهٔ B، ۲ واحد به طول نقطهٔ A و ۳ واحد به عرض آن اضافه می‌شود، پس شیب این خط برابر است با $\frac{۳}{۲}$.

اکنون شما شیب این خط را با جایگذاری در فرمول بالا به دست آورید و با مقداری که به‌دست آورده‌ایم مقایسه کنید.



تمرین در کلاس

در یک جعبه تعدادی قوطی با وزن‌های یکسان قرار می‌دهیم. وزن جعبه با قوطی‌هایی که در آن قرار داده‌ایم بستگی به تعداد قوطی‌ها دارد. نمودار زیر رابطهٔ وزن جعبه را با تعداد قوطی‌هایی که در آن است نشان می‌دهد. محور افقی تعداد قوطی‌ها و محور عمودی وزن جعبه را برحسب کیلوگرم نشان می‌دهد.



۱ــ از روی نمودار تعیین کنید وزن جعبه در حالتی که ۲۰ قوطی در آن قرار دارد، چقدر است؟

۲ــ از روی نمودار تعیین کنید وزن جعبه در حالتی که ۳۰ قوطی در آن قرار دارد، چقدر است؟

۳ــ وزن جعبهٔ خالی چقدر است؟

۴ــ شیب این خط چقدر است؟

۵ــ اگر تعداد قوطی‌ها را x و وزن جعبهٔ حاوی x قوطی را y بنامیم، رابطهٔ بین وزن جعبه و تعداد قوطی‌هایی را که در آن است به‌صورت ریاضی بنویسید.

۶ــ شیب این خط چه ویژگی از قوطی‌ها را نشان می‌دهد؟

فعالیت

۱ــ با رسم محورهای مختصات، دو نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}$ را در صفحه نشان دهید و خط گذرنده از این دو نقطه را رسم کنید.

۲ــ طول کدام نقطه بیشتر است؟ عرض کدام نقطه بیشتر است؟

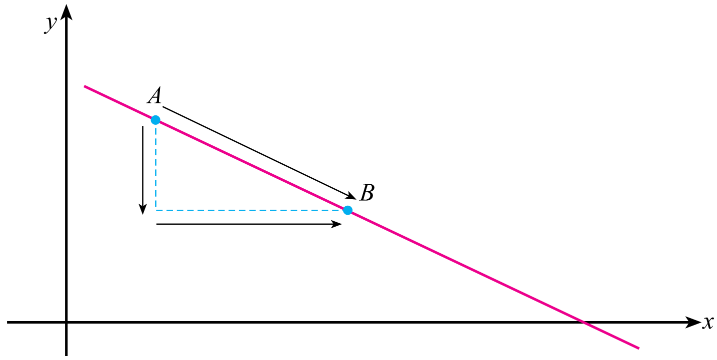
۳ــ با حرکت روی این خط وقتی از نقطهٔ A به نقطهٔ B برسیم، طول‌ها و عرض‌های نقاط، از لحاظ افزایش یا کاهش، چگونه تغییر می کنند؟

۴ــ شیب این خط را طبق فرمول حساب کنید. منفی‌شدن شیب چه چیزی را نشان می‌دهد؟

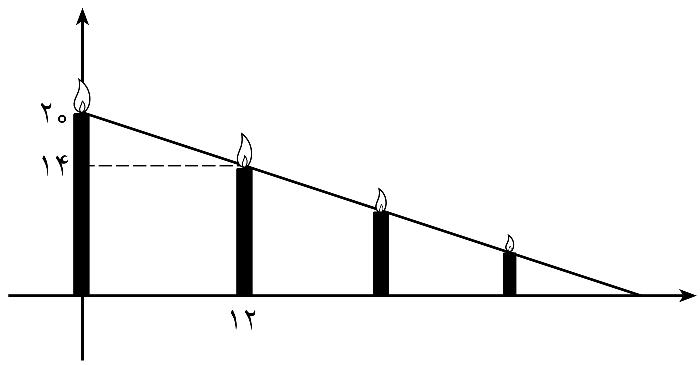
خط‌هایی که با افزایش طول نقاط روی آنها، عرض این نقاط کاهش می‌یابد، **شیب منفی** دارند.

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۶\\۳\end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط باشند، شیب آن خط چقدر است؟

حل : با حرکت از نقطهٔ A به نقطهٔ B، ۴ واحد به طول نقطهٔ A اضافه می‌شود ولی ۲ واحد از عرض آن کم می‌شود، پس شیب این خط برابر است با $\frac{-۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}$.



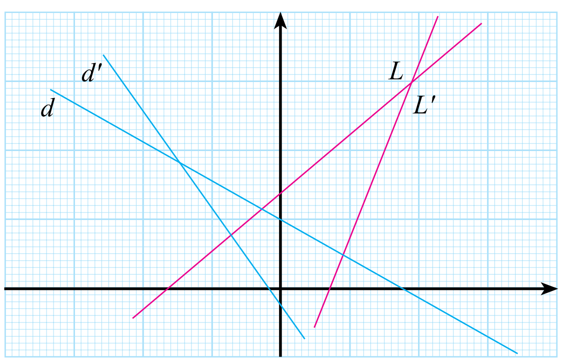
مثال : شمعی به طول ۲۰ سانتی‌متر به‌طور یکنواخت می‌سوزد. طول شمع با گذشت زمان کاهش می‌یابد. با رسم محورهای مختصات، محور افقی را نشان‌دهندهٔ زمان، برحسب دقیقه، و محور عمودی نشان‌دهندهٔ طول شمع، برحسب سانتی‌متر، در نظر بگیرید. با وصل کردن نوک شمع در زمان‌های مختلف یک خط به شکل زیر رسم می‌شود.



شیب این خط برابر است با $\frac{۱۴-۲۰}{۱۲-۰}=\frac{-۶}{۱۲}=-۰/۵$. منفی بودن شیب نشان می‌دهد که با افزایش زمان طول شمع کاهش می‌یابد.

تمرین در کلاس

در شکل زیر خط‌های L و ´L شیب مثبت و خط‌های d و ´d شیب منفی دارند. درستی این مطلب را با درنظرگرفتن دو نقطه روی هریک از این خط‌ها و اندازه‌گیری طول و عرض این نقاط و محاسبهٔ شیب این خط‌ها نشان دهید و جدول زیر را تکمیل کنید.



خط	d	´d	´L	L
شیب خط				

مسائل

۱ــ آقای تبریزی تصمیم گرفت به اتفاق دو تن از دوستانش کارگاه تولید وسایل آموزشی راه‌اندازی کند. آن‌ها تصمیم گرفتند کارگاه را در محلی دورافتاده تأسیس کنند تا هزینهٔ اجارهٔ کمتری پرداخت کنند. هزینهٔ یک ماه آن‌ها (شامل اجاره محل، آبونمان آب، گاز، برق) ۱۵۰۰۰۰۰ تومان شد (این مبلغ را **هزینهٔ ثابت** می‌نامند). هزینهٔ تولید هر ۱۰۰ قطعه نیز ۵۰۰۰۰۰ تومان برآورد شد. (این هزینه را **هزینهٔ متغیر** می‌نامند زیرا بستگی به میزان تولید دارد.)

الف) اگر x تعداد بسته‌های صدتایی از قطعات تولیدشده و y هزینهٔ کارگاه برحسب میلیون تومان برای تولید x بسته باشد، رابطهٔ بین x و y را بنویسید.

ب) نمودار رابطهٔ بین x و y را در محورهای مختصات که هر واحد روی محور xها یک بستهٔ ۱۰۰تایی از قطعات و هر واحد روی محور yها ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان را نشان دهد، رسم کنید.

ج) x و y با هم رابطهٔ خطی دارند، محل برخورد نمودار رابطهٔ بین x و y با محور yها چه چیزی را نشان می‌دهد؟

د) شیب خط نشان‌دهندهٔ رابطهٔ بین x و y را به‌دست آورید. شیب، چه چیزی را نشان می‌دهد؟ آیا شیب این خط، در معادلهٔ رابطهٔ بین x و y مشاهده می‌شود؟

هـ) اگر هزینهٔ ثابت کارگاه کم یا زیاد شود، چه تغییری در معادلهٔ رابطهٔ بین x و y و چه تغییری در نمودار این رابطه ایجاد می‌شود؟

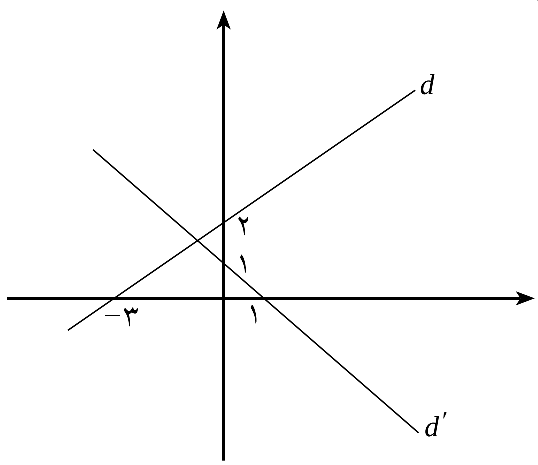
۲ ــ برای خرید یک کالای ۴۸۰,۰۰۰ تومانی قرار شده است بدون پیش پرداخت، ماهیانه ۶۰,۰۰۰ تومان قسط پرداخت کنیم.

الف) اگر x تعداد ماه‌هایی باشد که قسط پرداخته‌ایم و y میزان بدهی ما به فروشنده (برحسب ۱۰۰,۰۰۰ تومان) باشد، رابطهٔ بین x و y را بنویسید.

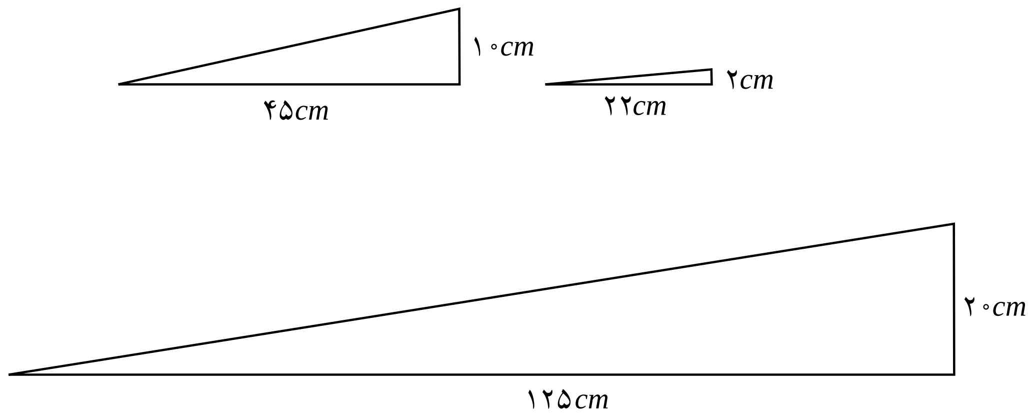
ب) شیب خط به دست آمده چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ج) نمودار خط به دست آمده را رسم کنید و مشخص کنید که کدام قسمت از این خط به این رابطه مربوط می‌شود.

۳ــ شیب هر یک از خط‌های زیر را به دست آورید.



۴ــ طبق قوانین شهرسازی، شیب جوی‌هایی که آب باران را هدایت می‌کنند، باید عددی بین ۰/۱ و ۰/۲ باشد. شیب کدام یک از مثلث‌ها می‌تواند به عنوان شیب جوی شهر در نظر گرفته شود؟



۵ــ نردبانی به دیواری تکیه داده شده است. فاصلهٔ سرِنردبان از سطح زمین ۱۰ متر است. فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار چند متر باشد تا شیب نردبان $\frac{۴}{۳}$ باشد؟

اگر مقدارهای دو متغیر با هم رابطهٔ خطی داشته باشند و آن‌ها را با x و y نشان داده باشیم، بیان ریاضی این رابطه به‌صورت $y=mx+b$ است که در آن m و b اعداد ثابتی هستند. نمودار این معادله، یک خط است.

فعالیت

۱ـ خط به معادلهٔ $y=3x+4$ را رسم کنید.

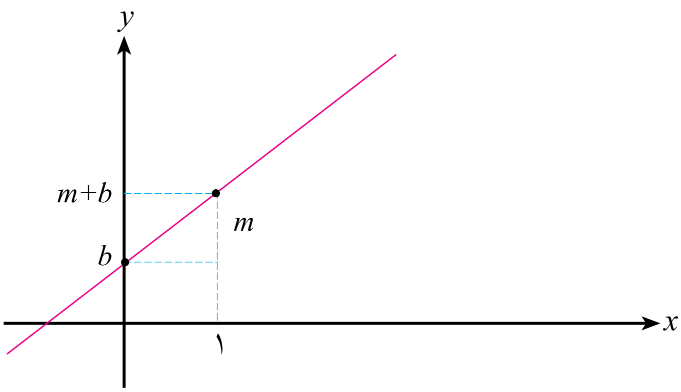
۲ـ هریک از نقاط زیر را در صفحه مشخص کنید و از روی شکل بگویید کدام یک از این نقاط روی خط به معادلهٔ بالا قرار دارند؟

$$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

۳ـ با جایگذاری مختصات هر نقطه در معادلهٔ خط، پاسخ خود را بررسی کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اگر نقطه‌ای روی خط قرار داشته باشد، با جایگذاری مختصات آن در معادلهٔ خط، تساوی برقرار می‌شود.

برای به‌دست‌آوردن شیب یک خط کافی است دو نقطه روی آن خط پیدا کنیم. خط به معادلهٔ $y=mx+b$ را در نظر بگیرید. جایی که این خط محور yها را قطع می‌کند، نقطه‌ای است که طول آن صفر است. با جایگذاری $x=0$ در معادله این خط نتیجه می‌شود $y=b$ ، b را عرض از مبدأ این خط می‌نامند. پس، $\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}$ یک نقطه از این خط است. با جایگذاری $x=1$ در معادلهٔ این خط نتیجه می‌شود $y=m+b$. پس، $\begin{bmatrix}1\\m+b\end{bmatrix}$ یک نقطهٔ دیگر از این خط است.



بنابراین شیب این خط برابر است با $m \quad \frac{m+b-b}{1-0}$. توجه کنید که شکل صفحهٔ قبل برای حالتی رسم شده که $m>0$ و $b>0$. برای سایر حالات m و b، خودتان شکل مناسب را رسم کنید.

> اگر معادلهٔ خطی به‌صورت $y \quad mx \quad b$ باشد، شیب آن برابر m است.

مثال : معادلهٔ خطی را بیابید که شیب آن ۳ است و از نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

اگر شیب خطی برابر m باشد، معادلهٔ آن به‌صورت $y \quad mx \quad b$ است. پس، معادلهٔ این خط به‌صورت $y \quad 3x \quad b$ است. با جایگذاری مختصات نقطهٔ A در معادله، می‌توان مقدار b را پیدا کرد.

$$2 \quad 3\times 1 \quad b$$

$$b \quad 2 \quad 3 \quad 1$$

با جایگذاری مقدار b در معادله خواهیم داشت : $y \quad 3x \quad 1$.

فعالیت

۱ــ معادلهٔ خطی که شیب آن m است و از نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ می‌گذرد را بیابید.

۲ــ معادلهٔ خطی که شیب آن m است و از نقطهٔ $B=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ می‌گذرد را بیابید.

۳ــ معادلهٔ خطی که شیب آن m است و از نقطهٔ $C=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ می‌گذرد را بیابید.

۴ــ معادلهٔ خطی که شیب آن m است و از نقطهٔ $D=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$ می‌گذرد را بیابید.

از این فعالیت نتیجه می‌شود :

> معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$ می‌گذرد به شکل زیر است.
>
> $$y \quad y_0 \quad m(x \quad x_0)$$

مثال : معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ می‌گذرد و شیب آن (۲) است.

$$y \quad 2 \quad 2(x \quad 3)$$

$$y \quad 2x \quad 8$$

توجه کنید

درخط به معادله ۲ x ۲y، شیب برابر ۱ نیست. چرا؟

مثال : معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

ابتدا شیب این خط را حساب می‌کنیم. چون A و B دو نقطه از این خط هستند، شیب آن برابر است با

$$m=\frac{3-2}{5-(-1)}=\frac{1}{6}$$

پس، معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است :

$$y-2=\frac{1}{6}(x-(-1))=\frac{1}{6}(x+1)$$

$$y-2=\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}$$

$$y=\frac{x}{6}+2\frac{1}{6}$$

بیندیشیم

در مثال روبرو، آیا برای نوشتن معادله خط، می‌توانستیم از نقطهٔ B استفاده کنیم؟

تمرین در کلاس

الف) خط‌های به معادله‌های ۱ y ۲x، ۱ y ۲x، ۳ y ۲x، ۲ y ۲x را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ب) وضعیت این خط‌ها نسبت به هم چگونه است؟

ج) شیب این خط‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

د) در حالت کلی در ارتباط با توازی چند خط با یکدیگر و رابطهٔ بین شیب آن‌ها چه حدسی می‌زنید؟

خط‌هایی که شیب یکسان دارند با هم موازی‌اند.

فعالیت

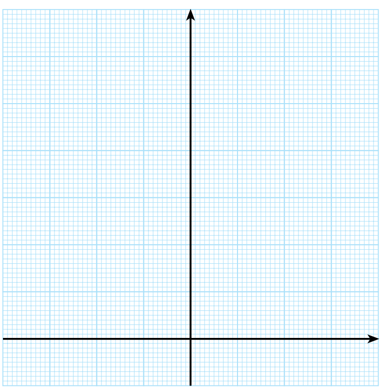
۱ــ خط‌های به معادله‌های زیر را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید.

y ۳x ۲

y ۲x ۲

y x ۲

y ۰/۵x ۲



۲ــ با بررسی و مقایسه وضعیت خط‌های بالا، در مورد وضعیت خط به معادلهٔ ۲ ۲ x×۰ y چه حدسی می‌زنید؟

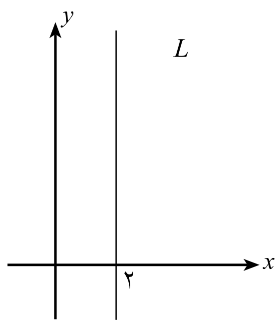
۳ــ پنج نقطهٔ دلخواه روی خط ۲ y در نظر بگیرید و جدول زیر را کامل کنید.

	A	B	C	D	E
x					
y					

۴ــ ویژگی مشترک این نقاط چیست؟

۵ــ با توجه به آن‌چه که انجام داده‌اید، توضیح دهید وضعیت خط b y (b می‌تواند هر عدد ثابتی باشد) چگونه است و در مورد طول و عرض نقاط روی این خط چه می‌توان گفت؟

۶ــ خط L موازی محور yها به شکل زیر رسم شده است. پنج نقطهٔ دلخواه روی آن در نظر بگیرید و جدول زیر را تکمیل کنید.



	A	B	C	D	E
x					
y					

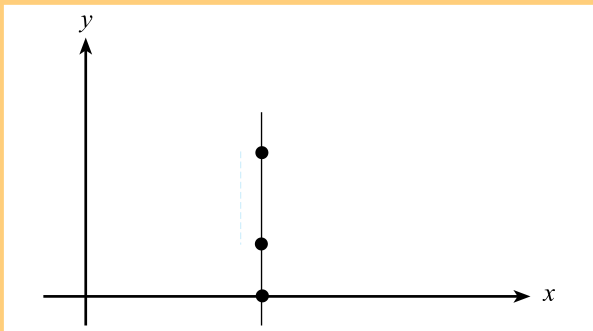
۷ــ ویژگی مشترک این نقاط چیست؟

دیدیم که تمام نقاطی که عرض آن‌ها ۲ بود خطی را می‌ساختند که معادلهٔ آن ۲ y بود. در این‌جا نیز تمام نقاطی که طول آن‌ها ۲ است خطی را می‌سازند که معادلهٔ آن را ۲ x در نظر می‌گیریم.

در حالت کلی ، معادلهٔ خطی است موازی محور yها که طول همهٔ نقاط آن برابر b است.

بیندیشیم

آیا می‌توان برای خط‌هایی که بر محور xها عمود هستند، تعریف و فرمول شیب خط را به کار برد؟



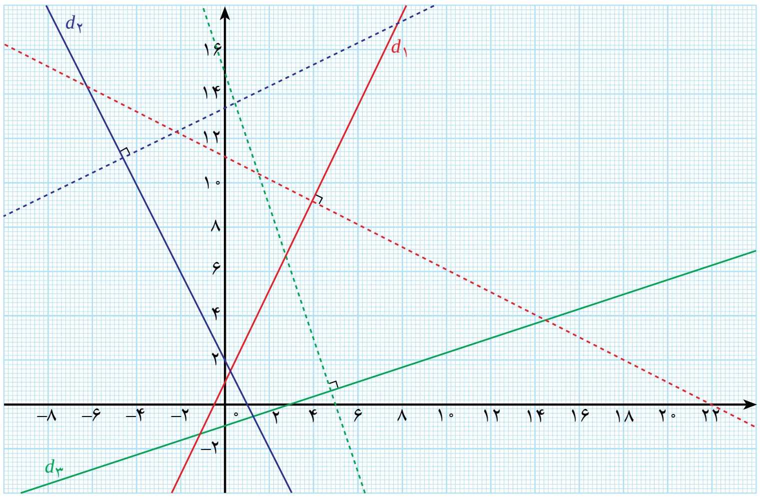
معادله کلی یک خط دلخواه در صفحه را می‌توان به صورت ax by c ∘ در نظر گرفت. در حالتی که b≠∘، این معادله را به شکل استاندارد y mx d می‌توان نوشت که در آن m شیب این خط است. در حالت ∘ b این معادله به صورت x d در می‌آید که خطی عمود بر محور xها است.

خط‌های عمود بر هم

دیدیم که موازی‌بودن خط‌ها را می‌توانیم از طریق شیب آن‌ها تشخیص دهیم. در این بخش می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا عمودبودن دو خط را هم می‌توانیم از طریق شیب آن دو خط تشخیص دهیم.

فعالیت

در شکل زیر سه خط d_1 و d_2 و d_3 و خطوط عمود بر آن‌ها رسم شده‌اند.



۱ــ دو نقطه روی هر خط عمود در نظر بگیرید و به کمک خط‌کش، با اندازه‌گیری طول و عرض این نقاط، شیب هریک از این خط‌ها را به‌دست آورید.

جدول زیر را کامل کنید.

معادلهٔ خط	$d_1: y=2x+1$	$d_2: y=2x+2$	$d_3: y=\frac{1}{3}x-1$
شیب خط			
شیب خط عمود			

۲ــ آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای بین شیب‌های دو خط عمود بر هم وجود دارد؟

شرط عمودبودن دو خط با شیب‌های m و m'، آن است که ۱ mm'.

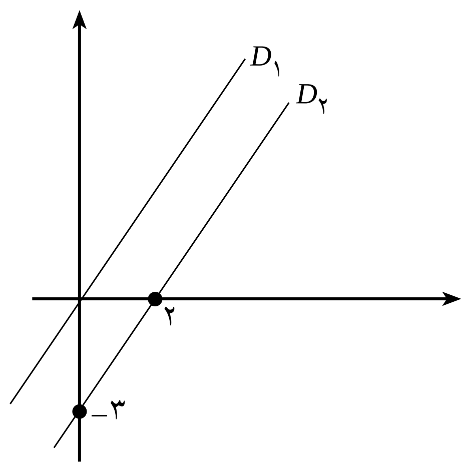
۱ــ معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ می‌گذرد و شیب آن ۲ است.

۲ــ معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

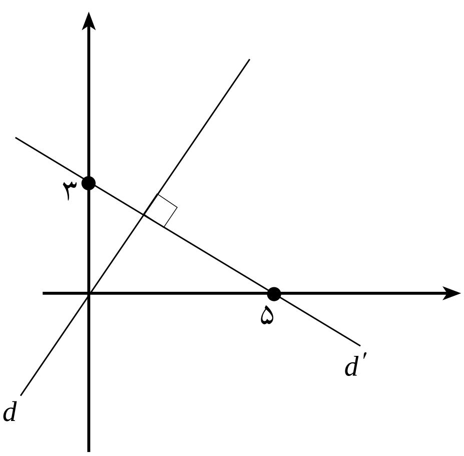
۳ــ معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}$ می‌گذرد و با نیمساز ربع اول $(y \quad x)$ موازی است.

۴ــ وضعیت دو خط به معادله‌های $x \quad y \quad ۱$ و $۲x \quad ۲y \quad ۵$ نسبت به هم چگونه است؟

۵ــ معادله دو خط موازی $D_۱$ و $D_۲$ را در شکل زیر بنویسید.



۶ــ خط d بر ´d عمود است. با توجه به شکل زیر معادلهٔ خطوط d و ´d را بنویسید.



دستگاه معادلات خطی دومجهولی

معادلاتی که در ابتدای این فصل بررسی کردیم دارای یک مجهول بودند. اما در حل بسیاری از مسائل، بیش از یک مجهول وجود دارد؟ برای یافتن این مجهولات، بیش از یک معادله مورد نیاز است و به همین دلیل معادلات داده‌شده را دستگاه معادلات می‌نامند. در این بخش یک حالت ساده از دستگاه معادلات را که دستگاه معادلات خطی دومجهولی نام دارد توضیح داده خواهد شد.

فعالیت

آقای کریمی می‌خواهد در یک باشگاه ورزشی ثبت‌نام کند. در اطراف خانهٔ او دو باشگاه وجود دارد که هرکدام یک حق عضویت اولیه دارد و بابت هر جلسه استفاده نیز مبلغی دریافت می‌کند. باشگاه اول ۵۰۰۰ تومان حق عضویت می‌گیرد و برای هر جلسه استفاده ۵۰۰ تومان دریافت می‌کند. باشگاه دوم ۲۰۰۰ تومان حق عضویت می‌گیرد ولی برای هر جلسه استفاده ۷۰۰ تومان دریافت می‌کند.

۱ــ جدول زیر را که در آن، هزینهٔ استفاده از هر باشگاه به‌ازای تعداد جلسات، آمده است کامل کنید.

تعداد جلسات	۱	۳	۸	۱۲	۱۸
هزینهٔ کل در باشگاه اول					
هزینهٔ کل در باشگاه دوم					

۲ــ هزینهٔ استفاده از یک باشگاه را با y و تعداد جلسات استفاده‌شده از آن را با x نشان دهید و رابطهٔ بین تعداد جلسات و هزینهٔ کل را، به‌صورت دو معادله برای این دو باشگاه بنویسید و نمودار هر معادله را رسم کنید.

۳ــ یکی از دوستان آقای کریمی که در یکی از این دو باشگاه ثبت‌نام کرده می‌گوید: من تاکنون ۱۲ جلسه به باشگاه رفته‌ام و ۱۱۰۰۰ تومان پرداخته‌ام. با استفاده از نمودار تعیین کنید که این شخص در کدام باشگاه ثبت‌نام کرده است.

۴ــ با استفاده از معادله‌هایی که به‌دست آورده‌اید، معلوم کنید دوست آقای کریمی در کدام باشگاه ثبت نام کرده است و درستی پاسخ خود به سؤال قبل را بررسی کنید.

۵ــ اگر آقای کریمی بخواهد فقط ۱۰ جلسه از باشگاه استفاده کند، با استفاده از نمودار و معادله‌های به‌دست‌آمده نشان دهید ثبت نام در کدام باشگاه برای او باصرفه‌تر است؟

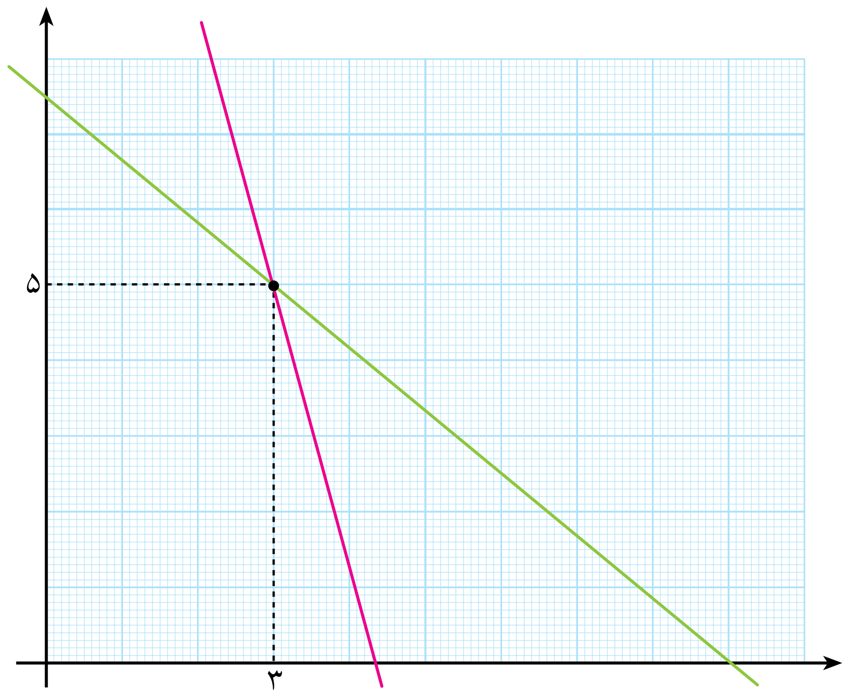
۶ــ برای ۱۵ جلسه استفاده، کدام باشگاه باصرفه‌تر است؟ آیا فرقی می‌کند که آقای کریمی در کدام باشگاه ثبت‌نام کند؟ روی نمودار دو خط، نقطهٔ مربوط به ۱۵ جلسه استفاده از دو باشگاه، چه نقطه‌ای است؟

در این فعالیت، دو مجهول و دو معادله وجود دارد و این‌گونه مسائل را یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی می‌نامند. جواب این دستگاه اعدادی هستند که اگر به جای x و y قرار دهیم، هر دو معادله هم‌زمان برقرار شوند.

مثال : یک بسته که در آن دو تا از کالای اول و سه تا از کالای دوم قرار دارد را وزن می‌کنیم و حاصل ۲۱ کیلوگرم است. یک بار دیگر بستهٔ دیگری را که در آن سه تا از کالای اول و یکی از کالای دوم در آن است را وزن می‌کنیم و حاصل ۱۴ کیلوگرم است. آیا می‌توانید بگویید وزن هر کدام از کالاها چقدر است؟

اگر وزن کالای اول را با x و وزن کالای دوم را با y نشان دهیم، وزن اولین بسته نشان می‌دهد که $۲x \quad ۳y \quad ۲۱$ و وزن دومین بسته نشان می‌دهد که $۳x \quad y \quad ۱۴$.

یکی از روش‌های حل این دستگاه، روش هندسی است. اگر معادلات $۲x \quad ۳y \quad ۲۱$ و $۳x \quad y \quad ۱۴$ را به عنوان معادلات دو خط در صفحه در نظر بگیریم، محل برخورد این دو خط نقطه‌ای است که مختصات آن هم‌زمان هر دو معادله را برقرار می‌کند.



محل برخورد این دو خط در نقطه $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ است. پس جواب این دستگاه $۳ \quad x$ و $۵ \quad y$ است.

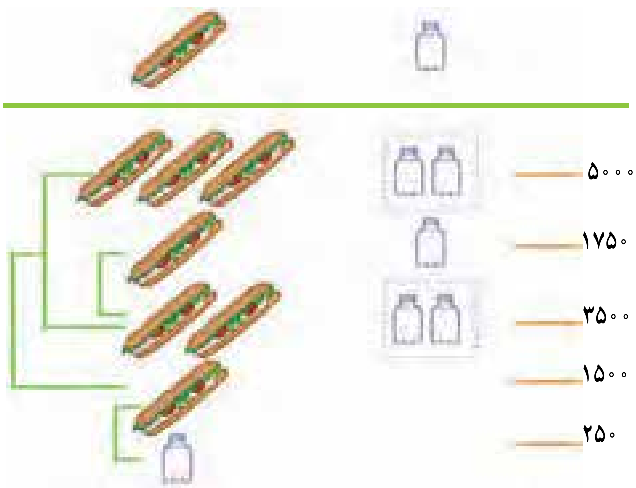
اگر معادلات یک دستگاه خطی دومجهولی را به‌عنوان معادله‌های دو خط در نظر بگیریم، مختصات محل برخورد این دو خط، جواب آن دستگاه معادلات است.

با رسم نمودار معادلات، می‌توان تقریب خوبی از جواب دستگاه معادلات به‌دست آورد. برای حل دستگاه معادلات، اغلب با رسم نمودار آنها و یافتن محل برخورد این نمودارها و اندازه‌گیری مختصات نقطهٔ برخورد، می‌توان تخمینی از جواب دستگاه را به‌دست آورد و سپس با حل جبری دستگاه می‌توان پاسخ دقیق را محاسبه کرد. در ادامه دو روش جبری برای حل دستگاه معادلات خطی دومجهولی معرفی می‌شوند.

روش حذفی

فعالیت

حمید و بهروز برای خرید ساندویچ و نوشابه برای خود و دوستانشان به بوفه رفتند. حمید برای ۳ ساندویچ و ۲ شیشه نوشابه ۵۰۰۰ تومان پرداخت و بهروز برای یک ساندویچ و یک شیشه نوشابه ۱۷۵۰ تومان پرداخت. حمید با نمایش تصویری روبرو کشف کرد که قیمت یک ساندویچ و قیمت یک شیشه نوشابه چقدر است.



هریک از مراحل حل مسئله توسط حمید را توضیح دهید.

روشی را که در فعالیت بالا مورد استفاده قرار گرفته است را **روش حذفی** برای حل دستگاه معادلات می‌نامند. برای بیان ریاضی این عملیات می‌توانیم قیمت یک ساندویچ را با x و قیمت یک شیشه نوشابه را با y نشان دهیم. در این صورت می‌توانیم بنویسیم :

$$\begin{cases} ۳x+۲y=۵۰۰۰ \\ x+y=۱۷۵۰ \end{cases}$$

دستگاهی را که از چند معادله و چند مجهول تشکیل می‌شوند را دستگاه معادلات می‌نامند. مقادیری از متغیرهای این معادلات را که هم‌زمان تساوی‌های این معادلات را برقرار می‌کنند، جواب‌های این دستگاه می‌نامند. یافتن جواب‌های یک دستگاه را حل آن دستگاه می‌نامند.

برای حل دستگاه معادلات بالا، برای ایجاد ضریب‌های یکسان از یکی از متغیرها، معادلهٔ دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5000 \\ 2x + 2y = 3500 \end{cases}$$

با کم کردن این دو معادله از هم خواهیم داشت :

$$(3x \quad 2y) \quad (2x \quad 2y) \quad 5000 \quad 3500$$

$$3x \quad 2x \quad 2y \quad 2y \quad 1500$$

$$x \quad 1500$$

با جایگذاری $x \quad 1500$ در هرکدام از معادلات بالا می‌توان y را پیدا کرد.

$$1500 \quad y \quad 1750$$

$$y \quad 250$$

با جایگذاری این مقادیر از x و y در معادلهٔ اول می‌توانید درستی حل خود را امتحان کنید.

مثال : دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$$

برای حل این دستگاه، معادلهٔ اول را در ۳ ضرب می‌کنیم تا به شکل $3x \quad 3y \quad 9$ درآید. با جمع دو معادله می‌توان مجهول y را حذف کرد : $3x \quad 3y \quad 4x \quad 3y \quad 5 \quad 9$.

پس از ساده کردن این معادله خواهیم داشت $7x \quad 14$ و نتیجه می‌شود $x \quad 2$. با جایگذاری در یکی از معادلات نتیجه می‌شود $y \quad 1$.

برای حل این دستگاه معادلات، همچنین می‌توانیم ابتدا متغیر x را حذف کنیم و y را بیابیم. بنابراین، معادلهٔ اول را در (۴) ضرب می‌کنیم : $4x \quad 4y \quad 12$.

با جمع این معادله با معادلهٔ دوم خواهیم داشت $4x \quad 4y \quad 4x \quad 3y \quad 12 \quad 5$. پس از ساده‌سازی داریم $7y \quad 7$ که نتیجه می‌دهد $y \quad 1$. اکنون با جایگذاری در معادلهٔ اول داریم $x \quad (\quad 1) \quad 3$ که نتیجه می‌دهد : $x \quad 2$.

تمرین در کلاس

دستگاه معادلهٔ زیر را یک بار با حذف x و یک بار با حذف y حل کنید.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 23 \\ -2x + 7y = -24 \end{cases}$$

روش جایگذاری

فعالیت

معادلهٔ $۳x \quad ۲y \quad ۵۰۰۰$ را در نظر بگیرید :

۱ــ به‌ازای $y \quad ۱۰۰۰$ مقدار x را بیابید؛

۲ــ به ازای $y \quad ۱۷۵۰$ مقدار x را بیابید؛

۳ــ به ازای $y \quad ۱۷۵۰ \quad x$ مقدار x را بیابید.

یکی از روش‌های حل دستگاه معادلات روش جایگذاری است. در این روش ابتدا به کمک یکی از معادله‌ها یکی از متغیرها برحسب متغیر دیگر حساب می‌شود. سپس همانند بند ۳ فعالیت بالا با جایگذاری آن متغیر در معادلهٔ دیگر، به یک معادله برحسب یک متغیر می‌رسیم، آن‌گاه آن‌را با روش‌هایی که می‌شناسیم حل می‌کنیم.

مثال : دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x - y = ۳ \\ ۴x + ۲y = ۶ \end{cases}$$

از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود که $x \quad y \quad ۳$. اگر در معادلهٔ دوم به جای x، مقدار $y \quad ۳$ را قرار دهیم به یک معادله برحسب y می‌رسیم و می‌توان آن را حل کرد؛ پس $۴(y \quad ۳) \quad ۲y \quad ۶$.

پس از ساده کردن، این معادله به‌صورت $۶y \quad ۱۲ \quad ۶$ درمی‌آید و نتیجه می‌شود $y \quad ۱$.

با استفاده از تساوی $x \quad y \quad ۳$ و این که $y \quad ۱$، نتیجه می‌گیریم $x \quad ۲$.

در این روش با استفاده از یکی از معادله‌ها، یکی از دو مجهول را برحسب مجهول دیگر به‌دست می‌آوریم. سپس مجهول محاسبه‌شده را در معادلهٔ دیگر جایگذاری می‌کنیم. در مثال بالا با استفاده از معادلهٔ اول، x را برحسب y حساب کردیم، سپس در معادلهٔ دوم روی x جایگذاری کردیم. با این عمل به یک معادله برحسب یک متغیر می‌رسیم و می‌توانیم آن را حل کنیم. این روش را، روش جایگذاری می‌نامند.

بیندیشیم

در روش جایگذاری، آیا فرقی می‌کند که کدام متغیر را برحسب متغیر دیگر به‌دست آوریم؟

مثال : دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} ۲m + ۳n = ۱۵ \\ ۳m + ۲n = ۱۵ \end{cases}$$

این دستگاه را یک بار با روش حذفی و یک بار با روش جایگذاری حل می‌کنیم.

روش حذفی : معادلهٔ اول را در (۳) و معادلهٔ دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم و یک دستگاه جدید به شکل زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} -۶m - ۹n = -۴۵ \\ ۶m + ۴n = ۳۰ \end{cases}$$

جمع دو معادلهٔ صفحهٔ قبل معادلهٔ زیر را می‌سازد.

$$۶m \quad ۹n \quad ۶m \quad ۴n \quad ۴۵ \quad ۳۰$$

$$۵n \quad ۱۵$$

$$n \quad ۳$$

در معادلهٔ اول به‌جای n مقدار ۳ را قرار می‌دهیم و به معادلهٔ ۱۵ ۳×۳ ۲m می‌رسیم، درنتیجه ۳ m.

روش جایگذاری : از معادلهٔ اول n را برحسب m حساب می‌کنیم.

$$۲m \quad ۳n \quad ۱۵$$

$$۳n \quad ۱۵ \quad ۲m$$

$$n = ۵ - \frac{۲}{۳}m$$

در معادلهٔ دوم جای n قرار می‌دهیم $۵ - \frac{۲}{۳}m$، و معادلهٔ به‌دست‌آمده برحسب m را حل می‌کنیم :

$$۳m + ۲ \times (۵ - \frac{۲}{۳}m) = ۱۵$$

$$۳m + ۱۰ - \frac{۴}{۳}m = ۱۵$$

$$\frac{۵}{۳}m = ۵$$

$$m \quad ۳$$

با جایگذاری ۳ m در معادلهٔ اول نتیجه می‌شود ۱۵ ۳n ۳×۲ و پس از ساده کردن خواهیم داشت : ۹ ۳n که نتیجه می‌دهد ۳ n.

مثال : معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقاط $A = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

قبلاً با استفاده از روش یافتن شیب خط، این گونه مسائل را حل می‌کردیم. اما، در این بخش با استفاده از حل دستگاه‌ها نیز می‌توانیم این مسئله را حل کنیم.

معادلهٔ کلی یک خط به‌صورت y mx b است. اگر این خط بخواهد از نقطهٔ A بگذرد باید با جایگذاری طول و عرض آن در معادله این خط تساوی برقرار گردد، یعنی b (۱)m ۲ و درنتیجه ۲ m b. اگر این خط بخواهد از نقطهٔ B بگذرد باید داشته باشیم b ۲m ۳ . با این دو معادله یک دستگاه معادلهٔ خطی دومجهولی تشکیل می‌شود که جواب آن، خط مورد نظر را مشخص می‌کند.

مسئله :باب پنجاه و چهارم از کتاب مفتاح المعاملات

دو نفر در ر هی هم سفر بودند. به جایی رسیدند و خو ستند که با هم نان بخورند، همر ه یکی ز آنها ۳ نان بود و همر ه دیگری ۲ نان. با هم مشغول خوردن شدند. نفر سومی ز ر ه رسید، تعارف کردند، و هم با آنها هم‌سفره شد و هر سه به یک سهم نان خوردند. نفر سوم ۵ درهم به آن دو نفر د د و گفت هر کد م به تعد د نان خود سهمش ر ز ین پول برد رد.

حال چگونه ین پول ر میان دو نفر تقسیم کنیم و سهم هر یک چند درهم ست؟

مسائل

۱ــ دستگاه معادلات (الف) را به روش جایگزینی و (ب) را به روش حذفی حل کنید.

الف) $\begin{cases} y = 5 - 2x \\ 2y - 3x = 17 \end{cases}$　　　ب) $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

۲ــ نوعی کود از مخلوط شدن دو نوع که یکی سرعت‌دهندهٔ رشد و دیگری غنی‌کننده مواد غذایی گیاه است، درست می‌شود. مخلوط های متفاوت اثرات متفاوتی دارد.

مخلوط (A) ۴ پیمانه از نوع اول و ۳ پیمانه از نوع دوم است که ۲۰۰ تومان قیمت دارد. مخلوط (B) ۳ پیمانه از نوع اول و ۵ پیمانه از نوع دوم است که ۱۷۰ تومان قیمت دارد. اگر یک پیمانه از نوع اول x تومان و یک پیمانه از نوع دوم y تومان قیمت داشته باشد،

الف) برای قیمت مخلوط A و B روابطی برحسب x و y بنویسید.

ب) مقدار x و y را پیدا کنید.

ج) مخلوطی که دارای ۵ پیمانه از نوع اول و ۲ پیمانه از نوع دوم باشد، چه قیمتی دارد؟

۳ــ آیا می‌توان مقدار a را به گونه‌ای تعیین کرد که نقطه $\begin{bmatrix} a \\ -1 \end{bmatrix}$ محل برخورد دو خط $5 \quad 2y \quad x$ و $5 \quad y \quad 2x$ باشد.

۴ــ با رسم نمودارهای دو خط $y = \frac{3}{2}x - 5$ و $3 \quad 5x \quad 2y$ تحقیق کنید این دو خط در چه ربعی همدیگر را قطع می‌کنند. سپس با حل جبری دستگاه تشکیل‌شده از این معادله‌ها، مختصات نقطهٔ محل تقاطع آن را به‌دست آورید و جواب خود را بررسی کنید.