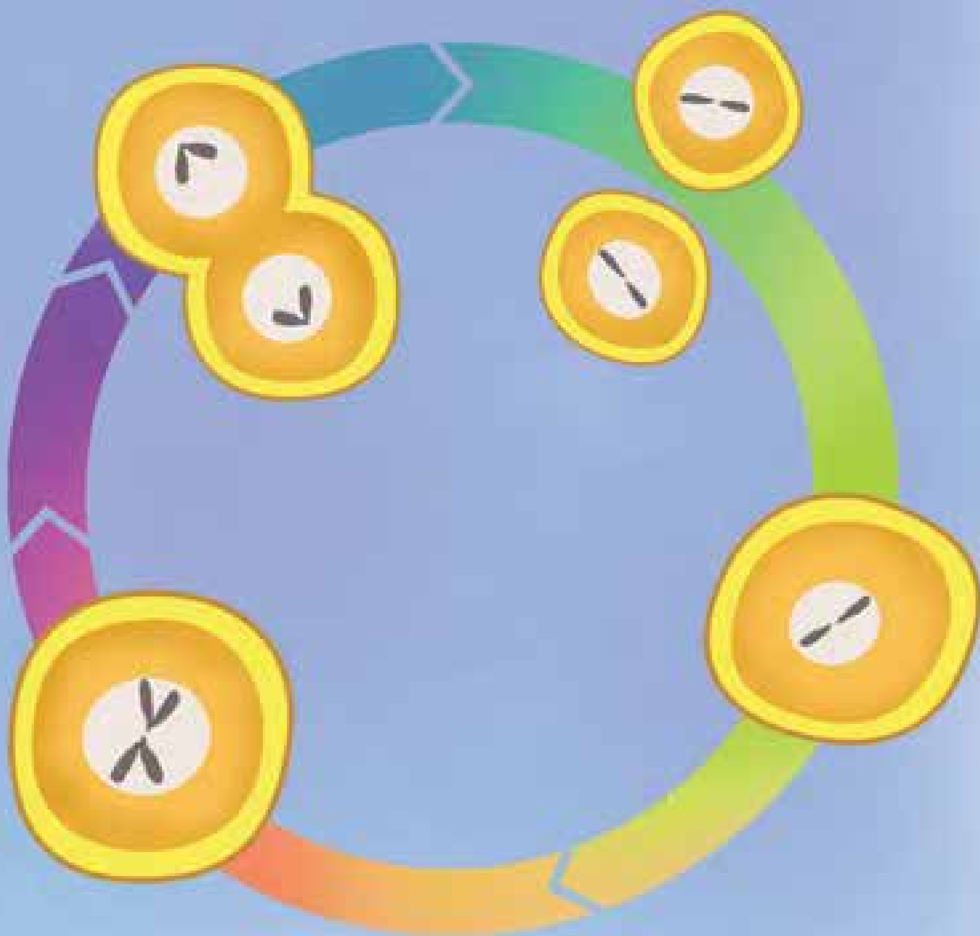
۳

توان‌رسانی و ریشه‌گیری



سلول‌ها با تقسیمات متوالی خود، جانداران را شکل می‌دهند. یک جاندار کوچک از میلیاردها سلول تشکیل شده است.

فکر می‌کنید چه‌قدر طول می‌کشد تا از یک سلول یک جاندار کوچک به‌وجود آید؟

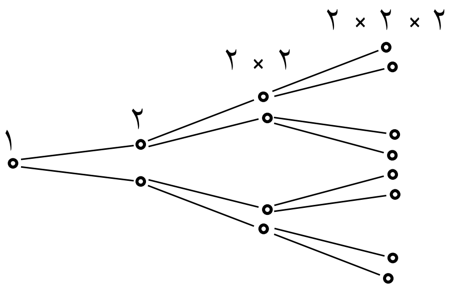
توان رسانی و قواعد آن

شما با توان و به توان رساندن اعداد در دورهٔ راهنمایی آشنا شده‌اید. در این بخش، علاوه بر یادآوری مطالب قبلی با نکات جدیدی در توان، آشنا خواهید شد.

فعالیت

در علوم و زیست‌شناسی خوانده‌اید که رشد موجودات تک سلولی به گونه‌ای است که در یک واحد زمانی هر موجود تک سلولی به دو سلول تقسیم می‌شود و این تقسیم‌شدن ادامه پیدا می‌کند. شکل و جدول زیر با شروع از یک تک سلول، تعداد این سلول‌ها را پس از چند واحد زمانی نشان می‌دهد.

واحد زمانی	۰	۱	۲	۳	۴
تعداد	۱	۲	۴	?	?



۱ــ جدول بالا را تکمیل کنید.

۲ ــ پس از ۷ واحد زمانی چند موجود تک سلولی تولید می‌شود؟ این تعداد را به صورت عدد توان‌دار نشان دهید.

۳ــ پس از چند واحد زمانی تعداد موجودات تک سلولی به ۳۲ عدد می‌رسد؟ روش یافتن جواب خود را توضیح دهید.

اگر بخواهیم عددی را چند بار در خود ضرب کنیم، برای خلاصه‌نویسی این عمل ضرب، از نماد توان استفاده می‌کنیم. برای مثال :

$$۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \quad ۳^{۵}$$

$$۱/۲ \times ۱/۲ \times ۱/۲ \times ۱/۲ \quad (۱/۲)^{۴}$$

$$\sqrt{۵} \times \sqrt{۵} \times \sqrt{۵} = (\sqrt{۵})^{۳}$$

اگر a یک عدد حقیقی و $n > ۱$ یک عدد طبیعی باشد، داریم :

$$a^{n} = \overbrace{a \times \ldots \times a}^{\text{n تا}}$$

بنا به تعریف $a \quad a^{۱}$.

قسمت (۳) فعالیت صفحهٔ قبل نشان می‌دهد که نمایش اعداد به صورت توانی علاوه بر ساده‌نویسی مزایای دیگری هم در حل مسائل دارد. در نمایش توانی اعداد، عددی که در خودش ضرب می‌شود را **پایه** و تعداد دفعاتی که آن عدد در عمل ضرب نوشته می‌شود را **توان** می‌نامند.

فعالیت

به تساوی‌های زیر توجه کنید.

$$۵^{۶} \quad ۵\times۵\times۵\times۵\times۵\times۵ \quad (۵\times۵\times۵\times۵\times۵)\times۵ \quad ۵^{۵}\times۵^{۱}$$

$$۵^{۶} \quad (۵\times۵\times۵\times۵)\times(۵\times۵) \quad ۵^{۴}\times۵^{۲}$$

۱ــ با توجه به تساوی‌های بالا به‌جای نقطه‌چین عدد مناسب بنویسید.

$$۵^{۶} \quad ۵^{۵}\times\ldots \quad ۵^{۴}\times\ldots \quad ۵^{۳}\times\ldots \quad ۵^{۲}\times\ldots \quad ۵^{۱}\times\ldots$$

۲ــ تساوی‌های بالا را برای عدد $۷^{۴}$ بنویسید.

۳ــ در زیر، به جای نقطه‌چین مقدار مناسب قرار دهید.

$$۸^{۵} \quad ۸^{۳}\times۸^{۲} \quad ۸^{۴}\times\ldots \quad \ldots\times۸^{۲} \quad \ldots\times۸^{۱}$$

$$\ldots \quad ۳^{۴}\times\ldots \quad ۳^{۵}\times۳^{۳} \quad ۳^{۲}\times\ldots \quad \ldots\times۳^{۱}$$

$$\ldots=(\frac{۲}{۵})^{۲}\times(\frac{۲}{۵})^{۸}=(\frac{۲}{۵})^{۳}\times\ldots=(\frac{۲}{۵})^{۴}\times\ldots=(۰/۴)^{۵}\times\ldots$$

$$a^{۷} \quad a^{۶}\times\ldots \quad \ldots\times a^{۳} \quad a^{۵}\times\ldots \quad \ldots\times a^{۴}$$

$$\ldots \quad b^{۴}\times b^{۵} \quad b^{۲}\times\ldots \quad \ldots\times b^{۶} \quad \ldots\times b^{۱}$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که اگر n و m دو عدد طبیعی و a یک عدد حقیقی باشد داریم:

$$\boxed{a^{n+m}=a^{n}\times a^{m}}$$

توجه کنید

در حالت کلی $a^{n} \quad a^{m}\neq a^{n \quad m}$

تمرین در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $\overbrace{۴\times۴\times\ldots\times۴}^{۵۰}$ ب) $۲^{۶}\times۲^{۷}$ ج) ۹×۳^{۴}

د) $(\frac{۱}{۲})^{۳}\times(۰/۵)^{۴}$ هـ) $(۳^{۲}\times۳^{۴})\times۳^{۵} \quad ۳^{۲}\times۳^{۴}\times۳^{۵}$

و) $a^{۲}\times a^{۳}\times a^{۴}$ ز) $a^{m}\times a^{n}\times a^{k}$

اگر یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ را به صورت حاصل ضرب دو یا چند عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ بنویسیم، گوییم آن عدد را تجزیه کرده‌ایم. برای مثال، ۲۴ را می‌توانیم به شکل‌های زیر تجزیه کنیم :

$$۲۴ \quad ۳\times۸ \quad ۶\times۴ \quad ۱۲\times۲ \quad ۳\times۲^{۳}$$

به تساوی‌های زیر توجه کنید :

$$۴^{۵}\div۴^{۲}=\frac{۴^{۵}}{۴^{۲}}=\frac{۴^{۳}\times۴^{۲}}{۴^{۲}}=۴^{۳}=۴^{۵-۲}$$

$$۹^{۱۲}\div۹^{۷}=\frac{۹^{۱۲}}{۹^{۷}}=\frac{۹^{۵}\times۹^{۷}}{۹^{۷}}=۹^{۷}=۹^{۱۲-۷}$$

تساوی‌های بالا در حالت کلی هم برقرارند. برای یک عدد مخالف صفر a و دو عدد طبیعی m و n که $m>n$، در تقسیم a^m بر a^n داریم :

$$\boxed{a^m\div a^n=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}}$$

به تساوی‌های زیر توجه کنید :

$$۳۰^{۳} \quad (۶\times۵)^{۳} \quad (۶\times۵)\times(۶\times۵)\times(۶\times۵) \quad (۶\times۶\times۶)\times(۵\times۵\times۵) \quad ۶^{۳}\times۵^{۳}$$

$$۳۰^{۳} \quad (۱۰\times۳)^{۳} \quad (۱۰\times۳)\times(۱۰\times۳)\times(۱۰\times۳) \quad (۱۰\times۱۰\times۱۰)\times(۳\times۳\times۳)$$

$$۱۰^{۳}\times۳^{۳}$$

تساوی‌های بالا در حالت کلی هم برقرارند. اگر a و b دو عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد داریم :

$$\boxed{(ab)^n=a^n\times b^n}$$

به تساوی‌های زیر توجه کنید :

$$۱۲^{۳}\div۴^{۳}=\frac{۱۲^{۳}}{۴^{۳}}=\frac{۱۲\times۱۲\times۱۲}{۴\times۴\times۴}=\frac{۱۲}{۴}\times\frac{۱۲}{۴}\times\frac{۱۲}{۴}=(\frac{۱۲}{۴})^{۳}$$

$$۲۵^{۴}\div۱۶^{۴}=\frac{۲۵^{۴}}{۱۶^{۴}}=\frac{۲۵\times۲۵\times۲۵\times۲۵}{۱۶\times۱۶\times۱۶\times۱۶}=\frac{۲۵}{۱۶}\times\frac{۲۵}{۱۶}\times\frac{۲۵}{۱۶}\times\frac{۲۵}{۱۶}=(\frac{۲۵}{۱۶})^{۴}$$

تساوی های بالا در حالت کلی هم برقرارند. برای دو عدد a و b (b مخالف صفر است) و عدد طبیعی n، در تقسیم a^n بر b^n داریم :

$$\boxed{a^n\div b^n=\frac{a^n}{b^n}=(\frac{a}{b})^n}$$

تمرین در کلاس

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۳) $a^۵ \div a^۳$	۲) $(\frac{۱}{۴})^۷ \div (۰/۲۵)^۳$	۱) $۶^{۱۵} \div ۶^۸$
۶) $۸a^۳$	۵) $(\frac{۱}{۲})^۴ \times ۵^۴$	۴) $۴^۳ \times ۵^۳$
۹) $۲^۷ \div (\frac{۱}{۳})^۷$	۸) $۶^۳ \div ۲^۳$	۷) ۲۷×۵^۳
۱۲) $a^۳ \times \frac{۸b^۳}{۲۷}$	۱۱) $\frac{۱۶a^۴}{۳^۴}$	۱۰) $\frac{۴^۵ \times ۲^۵}{۸^۲}$

توجه کنید

در حالت کلی
$a^۲ \quad b^۲ \neq (a \quad b)^۲$
و
$a^۲ \quad b^۲ \neq (a \quad b)^۲$

۲ــ در هر یک از دو عبارت $۳^۲ \quad ۴^۲$ و $(۳ \quad ۴)^۲$ مشخص کنید، آیا ابتدا عمل جمع انجام می‌شود یا عمل به توان رساندن.

۳ــ با به دست‌آوردن مقدارهای $۳^۲ \quad ۴^۲$ و $(۳ \quad ۴)^۲$ مشخص کنید که این دو مقدار مساوی‌اند یا نه.

۴ــ دو سؤال بالا را برای دو عبارت $۳^۲ \quad ۴^۲$ و $(۳ \quad ۴)^۲$ نیز جواب دهید.

فعالیت

به تساوی‌های زیر توجه کنید :

$$(۵^۳)^۲ \quad ۵^۳ \times ۵^۳ \quad ۵^{۳\ ۳} \quad ۵^{۲\times ۳}$$

$$(۱۴^۹)^۴ \quad ۱۴^۹ \times ۱۴^۹ \times ۱۴^۹ \times ۱۴^۹ \quad ۱۴^{۹\ ۹\ ۹\ ۹} \quad ۱۴^{۴\times ۹}$$

۱ــ با توجه به تساوی‌های بالا، در زیر، به جای نقطه چین‌ها مقدار مناسب قرار دهید.

$$(۲^۳)^۴ \quad ۲^۳ \times \dots \times \dots \times \dots \quad ۲^{۳\ \dots\ \dots\ \dots} \quad ۲^{۳\times \dots}$$

$$(a^۴)^۳ \quad a^۴ \times \dots \times \dots \quad a^{۴\ \dots\ \dots} \quad a^{\dots\times ۳}$$

$$(a^n)^۴ \quad a^{n\times \dots\times\dots\times\dots} \quad a^{n\ \dots\ \dots\ \dots} \quad a^{\dots\times\dots}$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود برای عدد a و دو عدد طبیعی n و m، اگر a^n را به توان m برسانیم داریم :

$$\boxed{(a^n)^m = a^{nm}}$$

تمرین در کلاس

۱ــ عدد $۲۷^{۵}$ را به صورت یک عدد توان‌دار با پایهٔ ۳ بنویسید.

۲ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $(۲^{۳})^{۴} \times ۲^{۶}$ ب) $۲۷^{۲} \times ۳^{۵}$ ج) $(a^{5})^{3} \times (b^{3})^{5}$

۳ــ حاصل عبارت‌های $(۲^{۲})^{۳}$ و $۲^{(۲^{۳})}$ را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.

توجه کنید

در حالت کلی
$(a^{n})^{m} \neq a^{(n^{m})}$

فعالیت

۱ــ اعداد $۲^{۲}$، $۲^{۳}$، $۲^{۴}$و $۲^{۵}$ را حساب کنید و از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

۲ــ هرچه توان‌های بالاتری از ۲ را حساب کنیم، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود یا کوچک‌تر؟ دلیل خود را بیان کنید.

۳ــ اعداد $۲^{۲}$، $۳^{۲}$ و $۴^{۲}$ را حساب کنید و از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

۴ــ برای هر عدد طبیعی n، حدس می‌زنید کدام‌یک از دو عدد ۲^{n} و ۳^{n} بزرگ‌ترند؟ حدس خود را به‌ازای ۴ n و ۵ n بیازمایید.

به‌طور کلی اگر a عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد، هرچه توان‌های بالاتری از آن را حساب کنیم، حاصل بزرگ‌تر می‌شود. برای مثال :

$$a < a^{۲} < a^{۳} < a^{۴} \;,\; a^{n} < a^{n\ ۱}$$

همچنین، اگر a و b دو عدد مثبت باشند که $a < b$، با محاسبه توان‌های یکسان از a و b داریم :

$$a^{۲} < b^{۲} \;, a^{۳} < b^{۳} \;, a^{۴} < b^{۴} \;, a^{n} < b^{n}$$

مثال : اعداد $۸^{۴}$ و $۲^{۱۱}$ و $۱۶^{۳}$ را با هم مقایسه کنید.

تمام این اعداد را می‌توانیم به صورت توانی از ۲ بنویسیم :

$$۱۶^{۳} \quad (۲^{۴})^{۳} \quad ۲^{۱۲} \qquad , \qquad ۸^{۴} \quad (۲^{۳})^{۴} \quad ۲^{۱۲}$$

بنابراین :

$$۱۶^{۳} \quad ۸^{۴} \quad ۲^{۱۲} > ۲^{۱۱}$$

مثال : از دو عدد $۸^{۴}$ و $۸۱^{۳}$ کدام یک بزرگ‌تر است؟

این دو عدد را می‌توان به صورت دو عدد توان‌دار با توان‌های یکسان نوشت :

$$۸۱^{۳} \quad (۳^{۴})^{۳} \quad ۳^{۱۲} \;,\; ۸^{۴} \quad (۲^{۳})^{۴} \quad ۲^{۱۲}$$

بنابراین : $۸^{۴} \quad ۲^{۱۲} < ۳^{۱۲} \quad ۸۱^{۳}$

مسائل

۱ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

الف) $(\;\; ۴) \times (\;\; ۴) \times (\;\; ۴)$

ب) $(\;\; ۰/۰۳) \times (\;\; ۰/۰۳) \times (\;\; ۰/۰۳)$

ج) $\frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} =$

د) $\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} \times \sqrt{۳} \times \sqrt{۳} \times \sqrt{۳} =$

هـ) $\frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲} =$

و) $(a \;\; b)(a \;\; b)(a \;\; b)$

ز) $(a^۲ \;\; ۱)(a^۲ \;\; ۱)(a^۲ \;\; ۱)(a^۲ \;\; ۱)$

بیندیشیم
اگر a عددی مثبت و $a < ۱$، با مقایسهٔ توان‌های a با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۲ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

الف) $(\frac{۱}{۲})^۷ \times (\frac{۱}{۳})^۷ \times (\frac{۱}{۴})^۷ =$

ب) $۰/۰۴ \times ۵^۲$

ج) $x^۲x^۳x^۵$

د) $x^۴y^۴z^۴$

هـ) $۲/۵^۷ \div ۵^۷$

و) $۳^۳ \times ۳^۲ \times ۴^۵ \times ۱۲^۴$

ز) $a^۶ \div ۲^۶$

ح) $(۲^۳)^۵ \times (۳^۵)^۳ \times ۶^{۱۵}$

ط) $\frac{۳^۲ \times ۴^۲ \times ۱۲^۵}{۲^۴ \times ۶^۴} =$

۳ــ عدد $۸^۶$ را به صورت حاصل‌ضرب‌های زیر بنویسید.

الف) دو عدد توان دار مساوی

ب) دو عدد توان‌دار با توان ۶

ج) دو عدد توان‌دار که یکی ۶۴ برابر دیگری باشد.

د) سه عدد توان‌دار مساوی با پایه ۸

هـ) سه عدد توان‌دار مساوی با توان ۲

۴ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

الف) $۳ \times ۳^۲ \quad ۳^۳ \quad ۳^۳$

ب) $\frac{۳^۵ \times (۴^۶ + ۴^۶ + ۴^۶)}{۶^۶} =$

ج) $۸^۳ \times ۹^۲ \times ۲۵^۵ \times (۳^۶ \quad ۳^۶)$

د) $a^۴ \times b^۴ \times (ab)^۵$

هـ) $\frac{x^۵y^۴}{x^۲yz^۳} = \qquad (x, y, z \neq ۰)$

۵ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $۲ \quad ۳ \times ۴^{۲}$

ب) $۲ - ۴ \times (\frac{۱}{۲})^{۳} =$

ج) $\dfrac{۱ - (\frac{۱}{۲^{۴}}) \times ۳ \times ۴^{۲}}{۲ - (\frac{۱}{۳}) \times ۶^{۲}} =$

۶ــ اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

$۲۵^{۳} \;,\; ۲^{۱۲} \;,\; ۳۶^{۳}$

در باب چهل و چهارم از کتاب مفتاح‌المعاملات مسئلهٔ زیر مطرح شده است :

سؤال : به شخصی گفتند که وارد این بوستان شو که در آن هفت دهلیز متوالی است و از درختان آن به تعدادی میوه بچین که هنگام بیرون آمدن در کنار هر دهلیز نصف میوه‌ها را بگذاری و هنگامی که از آخرین دهلیزخارج شدی تنها یک میوه برایت بماند. حال چند میوه باید بچیند؟

توان صفر و توان منفی

فعالیت

۱ــ جدول زیر را تکمیل کنید.

عدد توان‌دار	$۳^{۴}$	$۳^{۳}$	$۳^{۲}$	$۳^{۱}$
حاصل	۸۱			

۲ــ چه رابطه‌ای بین اعداد سطر دوم جدول می‌یابید؟

۳ــ سطر اول را ادامه دهید و عدد بعدی را $۳^{۰}$ قرار دهید. با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد سطر دوم پیدا کرده‌اید، چه عددی را برای $۳^{۰}$ پیشنهاد می‌کنید؟

۴ــ جدول بالا را برای پایه‌های ۲ و ۶ با همان توان‌ها نیز تشکیل دهید. چه عددی را برای $۲^{۰}$ و $۶^{۰}$ پیشنهاد می‌کنید؟

۵ــ برای عدد مخالف صفر a، جدول بالا را برای توان‌های a بنویسید. چه عددی را برای $a^{۰}$ پیشنهاد می‌کنید؟

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که مناسب است برای هر عدد مخالف صفر a، تعریف کنیم :

$\boxed{a^{۰} \quad ۱}$

فعالیت

۱ــ جدول زیر را تکمیل کنید.

عدد توان‌دار	$۳^{۳}$	$۳^{۲}$	$۳^{۱}$	۳
حاصل	۲۷			

۲ــ چه رابطه‌ای بین اعداد سطر دوم جدول می‌یابید؟

۳ــ سطر اول را ادامه دهید و عدد توان‌دار بعدی را $۳^{۱}$ قرار دهید. اکنون با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد سطر دوم پیدا کرده‌اید، چه عددی را برای $۳^{۱}$ پیشنهاد می‌کنید؟

۴ــ جدول بالا را برای پایه‌های ۲ و ۶ با همان توان‌ها نیز تشکیل دهید. چه عددی را برای $۲^{۱}$ و $۶^{۱}$ پیشنهاد می‌کنید؟

۵ــ برای عدد مخالف صفر a، جدول بالا را برای توان‌های a بنویسید. چه عددی را برای $a^{۱}$ پیشنهاد می‌کنید؟

۶ــ سطر اول را ادامه دهید و اعداد بعدی را $a^{۲}$ و $a^{۳}$ قرار دهید. با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد سطر دوم پیدا کرده‌اید، چه اعدادی را برای $a^{۲}$ و $a^{۳}$ پیشنهاد می‌کنید؟

از این فعالیت نتیجه می‌شود که مناسب است برای هر عدد حقیقی مخالف صفر مانند a، تعریف کنیم:

$\frac{۱}{a} = a^{-۱}$ و $\frac{۱}{a^{۲}} = a^{-۲}$. در حالت کلی برای یک عدد طبیعی n تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{۱}{a^{n}}}$$

مثال:

$$۴^{-۱} = \frac{۱}{۴}\ ,\ (۰/۱)^{-۷} = \frac{۱}{(۰/۱)^{۷}}\ ,\ (۱/۲)^{۳} = \frac{۱}{(۱/۲)^{-۳}}\ ,\ (-۵)^{-۲۱} = \frac{۱}{(-۵)^{۲۱}}$$

تمرین در کلاس

۱ــ عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت با توان منفی بنویسید.

الف) ۰/۰۰۱ ب) $\frac{۱}{۴^{۵}}$ ج) ۰/۲۵ د) $\frac{۱}{b}$ هـ) $\frac{۱}{b^{۳}}$

۲ــ عبارت‌های زیر را با توان مثبت بنویسید.

الف) $۵^{۲}$ ‏ ‏ ‏ ب) $(\sqrt{۷})^{-۵}$ ‏ ‏ ‏ ج) $(\frac{۱}{۲})^{-۳}$ ‏ ‏ ‏ د) $۲\pi^{۳}$

۳ــ عبارت‌های زیر را به صورتی بنویسید که کسری نباشند.

الف) $\frac{۱}{a^{۳}}$ ‏ ‏ ‏ ب) $\frac{۱}{b^{-۲}}$ ‏ ‏ ‏ ج) $\frac{-۱}{b^{۲}}$ ‏ ‏ ‏ د) $\frac{\pi^{۲}}{\pi^{-۳}}$

۴ــ حاصل اعداد $۴^{۲}$ ، $(۴^{۱})^{۲}$ و $(۴^{۲})^{۱}$ را بنویسید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ــ اعداد $(۰/۱۲۵)^{۳}$ ، $(۰/۲۵)^{۴}$ و $(۰/۵)^{۳}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

با چنین تعریفی از توان‌های مثبت و منفی اعداد حقیقی مخالف صفر، می‌توان نشان داد که اگر a و b دو عدد مخالف صفر و p و q دو عدد صحیح باشند، خواص مهم توان رسانی به شکل زیر برقرارند :

$\frac{a^{p}}{a^{q}} = a^{p-q}$	$a^{p+q} = a^{p} \times a^{q}$
$(\frac{a}{b})^{p} = \frac{a^{p}}{b^{p}}$	$(ab)^{p} = a^{p} \times b^{p}$
$a^{-p} = \frac{۱}{a^{p}}$	$(a^{p})^{q} = a^{pq}$

مثال :

$$(۵ \times ۷)^{۴} \quad ۵^{۴} \times ۷^{۴}$$

$$(۶^{۳})^{۲} \quad ۶^{۲\times۳}$$

$$\frac{۴^{-۲}}{۴^{-۷}} = ۴^{-۲-(-۷)} = ۴^{۵}$$

$$(\frac{۲}{۳})^{-۷} = \frac{۲^{-۷}}{۳^{-۷}}$$

$$۷^{-۳} = \frac{۱}{۷^{۳}}$$

مسائل

۱ــ هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عبارت با توان منفی بنویسید.

الف) ۰/۰۰۰۰۱   ب) $\frac{۱}{bc}$ ج) ۰/۰۰۸   د) $\frac{۱}{۳^{۱۱}}$

۲ــ هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت با توان مثبت بنویسید.

الف) $۳^{\ ۵}$ ب) $(\frac{۱}{۵})^{-۴}$ ج) $(\frac{۲}{۳})^{-۳} \times (\frac{۲}{۳})^{-۴}$

د) $a^{\ ۲} \times b^{\ ۲}$ هـ) $a^{\ ۳} \times b^{۳} \times (c^{۳})^{\ ۲}$

۳ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $۳^{\ ۲} \quad ۲^{\ ۳}$ ب) $(۲^{\ ۳})^{۲} \quad (۴^{۲})^{\ ۱}$ ج) $۵^{\ ۱} \times ۲ \quad ۴^{\ ۱} \times ۳ \quad ۲$

۴ــ با استفاده از تعریف توان‌های منفی، ثابت کنید که برای هر عدد حقیقی مخالف صفر a و هر عدد طبیعی n داریم :

$$a^{\ n} \quad (a^{\ ۱})^{n} \quad (a^{n})^{\ ۱}$$

نماد علمی

آیا می‌دانید دور کرهٔ زمین در استوا چند متر است؟ اندازه‌گیری‌ها نشان می‌دهد که این طول تقریباً ۴۰,۰۰۰,۰۰۰ متر است. اگر طول هر مورچه یک میلی‌متر باشد، چند مورچه لازم است تا با هم دور کرهٔ زمین در استوا را بپوشانند؟ چون هر متر ۱۰۰۰ میلی‌متر است، پس ۴۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ مورچه برای این کار لازم است. آیا می‌توانید این عدد را بخوانید؟ این عدد چند صفر دارد؟ در عمل به عددهای بزرگ‌تر از این هم برخورد می‌کنیم. مثلاً قطر کهکشان راه شیری چند متر است؟ آیا می‌توان چنین اعدادی را روی کاغذ نوشت؟ روشن است که این شیوه نوشتن برای اعداد بزرگ مناسب نیست. با این شیوه، نمی‌توان آن‌ها را روی کاغذ نوشت و اگر هم بنویسیم نمی‌توانیم متوجه میزان بزرگی آن‌ها شویم و محاسبه‌ای روی آن‌ها انجام دهیم.

یکی از کاربردهای توان اعداد، نوشتن اعداد بسیار بزرگ و اعداد بسیار کوچک به صورت توانی است[1]. مثلاً توان‌های مثبت ۱۰ را به صورت 10، 10^{2}، 10^{3}، 10^{4} و ... حساب کنید. این اعداد رفته رفته بزرگ می‌شوند به گونه‌ای که حتی نمی‌توان آن‌ها را روی کاغذ نوشت. آیا می‌توانید عدد 10^{5000} را در نمایش دهدهی آن روی کاغذ بنویسید؟ توان‌های منفی ۱۰ را به صورت 10^{1}، 10^{2}، 10^{3}، 10^{4} و ... حساب کنید. این اعداد رفته‌رفته کوچک می‌شوند و میزان کوچکی آن‌ها به قدری است که نمی‌توان نمایش اعشاری آن‌ها را روی کاغذ نوشت. استفاده از توان به ما کمک می‌کند که اعداد بسیار بزرگ و بسیار کوچکی را که با آن‌ها برخورد می‌کنیم به راحتی بنویسیم و روی آن‌ها محاسبه انجام دهیم.

یکی از شیوه‌های نوشتن اعداد بزرگ، استفاده از توان‌های مثبت ۱۰ است. مثلاً، 10^{40} عدد بسیار بزرگی است و اگر بخواهیم با شیوه‌های معمولی آن را بنویسیم، می‌بایست چهل صفر جلوی ۱ بگذاریم. هیچ کس با یک نگاه نمی‌تواند تعداد این صفرها را بشمارد و مقدار واقعی این عدد را تشخیص دهد. اما، نمایش آن به صورت 10^{40}، به خوبی اندازهٔ این عدد را نشان می‌دهد و کار محاسباتی با آن را عملی می‌کند.

هر عدد مثبت اعشاری را می‌توان به شکل‌های گوناگونی به صورت ضرب یک عدد اعشاری در توان مثبتی از ۱۰، نوشت.

۱ــ این مبحث بیشتر در فیزیک، شیمی و نجوم کاربرد دارد و مربوط به نمایش اعداد است.

مثال :

$۲۴۰۸۷/۶۴ \quad ۲۴۰۸/۷۶۴ \times ۱۰^{۱} \quad ۲۴۰/۸۷۶۴ \times ۱۰^{۲} \quad ۲۴/۰۸۷۶۴ \times ۱۰^{۳} \quad ۲/۴۰۸۷۶۴ \times ۱۰^{۴}$

$۵۴۳۲ \times ۱۰^{۲۲} \quad ۵/۴۳۲ \times ۱۰^{۱۵}$

$۱۰۲۳۴۵۶۰۰۰۰۰ \quad ۱/۰۲۳۴۵۶ \times ۱۰^{۱۱}$

$۰/۰۶۷۲ \times ۱۰^{۱۴} \quad ۶/۷۲ \times ۱۰^{۱۲}$

اعداد سمت راست تساوی‌ها، همان نماد علمی اعداد سمت چپ تساوی‌ها هستند.

از طریق نماد علمی، به خوبی می‌توان میزان بزرگی آن عدد را فهمید و آن را با دیگر اعداد مقایسه کرد.

مثال : جرم زمین تقریباً $۶/۰ \times ۱۰^{۲۴}$ و جرم ماه تقریباً $۷/۳۴ \times ۱۰^{۲۲}$ و جرم خورشید تقریباً $۲/۰ \times ۱۰^{۳۰}$ کیلوگرم است. جرم زمین چند برابر جرم ماه است؟ جرم خورشید چند برابر جرم زمین است؟

$$\frac{\text{جرم زمین}}{\text{جرم ماه}} = \frac{۶/۰ \times ۱۰^{۲۴}}{۷/۳۴ \times ۱۰^{۲۲}} \simeq ۸/۱۷ \times ۱۰$$

$$\frac{\text{جرم خورشید}}{\text{جرم زمین}} = \frac{۲/۰ \times ۱۰^{۳۰}}{۶/۰ \times ۱۰^{۲۴}} \simeq ۳/۳۳ \times ۱۰^{۵}$$

مشکل نمایش معمولی اعداد بسیار بزرگ، برای اعداد بسیار کوچک هم وجود دارد. برای نمایش اعداد بسیار کوچک، می‌توان از توان‌های منفی ۱۰ استفاده کرد. به عنوان مثال، جرم یک ذره غبار تقریباً ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۷ کیلوگرم است. آیا میزان کوچکی این عدد را می‌توانید درک کنید؟ اعداد اعشاری بسیار کوچک را می‌توان به صورت ضرب یک عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی مخالف صفر در یک توان منفی از ۱۰ نمایش داد. برای مثال :

$$۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۷ = ۶/۷ \times \frac{۱}{۱۰^{۹}} = ۶/۷ \times ۱۰^{-۹}$$

اگر یک عدد اعشاری مثبت را به صورت ضرب یک عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی مخالف صفر، در توان صحیحی از ۱۰ بنویسیم، این نمایش را نماد **علمی آن** عدد می‌نامند.

هر عدد اعشاری کوچکی را نیز می‌توان با این روش نوشت، مثلاً :

$۰/۰۰۰۰۴۵۶۷ \quad ۴/۵۶۷ \times ۱۰^{۵}$

$۰/۰۰۰۱۰۲۳ \times ۱۰^{۷} \quad ۱/۰۲۳ \times ۱۰^{۱۱}$

$۶۷۲ \times ۱۰^{۱۷} \quad ۶/۷۲ \times ۱۰^{۱۵}$

مثال : جرم یک الکترون تقریباً $۹/۱ \times ۱۰^{۲۸}$ کیلوگرم و جرم اتم هیدروژن تقریباً $۱/۷ \times ۱۰^{۲۴}$ کیلوگرم است. آیا می‌توانید میزان کوچکی این اعداد را تصور کنید؟ کدام یک جرم بیشتری دارد و جرم آن چند برابر دیگری است؟
در نماد علمی جرم اتم هیدروژن، توان ۱۰، عدد (۲۴) و در نماد علمی جرم الکترون، توان ۱۰، عدد (۲۸) است که نشان می‌دهد جرم این ذرات بسیار کوچک است. هر قدر توان منفی از لحاظ قدر مطلق بزرگ‌تر باشد، عدد کوچک‌تر است، پس جرم اتم هیدروژن بیشتر از جرم الکترون است. با تقسیم جرم اتم هیدروژن بر جرم الکترون، عددی به دست می‌آید که نشان می‌دهد جرم اتم هیدروژن چند برابر بیشتر است.

$$\frac{\text{جرم اتم هیدروژن}}{\text{جرم الکترون}}=\frac{۱/۷\times۱۰^{-۲۴}}{۹/۱\times۱۰^{-۲۸}}=\frac{۱/۷}{۹/۱}\times۱۰^{-۲۴}\times\frac{۱}{۱۰^{-۲۸}}=\frac{۱/۷}{۹/۱}\times\frac{۱}{۱۰^{۲۴}}\times۱۰^{۲۸}$$

$$=\frac{۱/۷}{۹/۱}\times۱۰^{۴}\simeq۰/۱۸۶۸\times۱۰^{۴}=۱/۸۶۸\times۱۰^{۳}$$

مسائل

۱ــ نماد علمی اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۲۶۴۷۸۹۱۴   ب) ۰/۰۰۰۴۸۹۲   ج) ۱۲×۱۵۰۰۰۰ د) ۲ ۴۲۳×۲۰۰

هـ) $۱۲/۸ \times ۱۰^{۴} \times ۵^{۶}$ و) $\frac{۳۲\times۱۱\times۱۰^{۱۲}}{۴۴\times۸۰}$ ز) $\frac{۱}{۲۰۰۰۰}$

۲ــ نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید.

الف) $۱/۴۳ \times ۱۰^{۵}$ ب) $۲/۵۴۳ \times ۱۰^{\ ۳}$

ج) $۱/۲۳ \times ۱۰^{۶}$ د) $۰/۰۰۴۲۱ \times ۱۰^{\ ۴}$

۳ــ جرم یک الکترون تقریباً $۹/۱ \times ۱۰^{۲۵}$ گرم است. جرم یک جسم ۲۵۴۹ تنی چند برابر جرم یک الکترون است؟ حاصل را به صورت نماد علمی بنویسید. (هر تن برابر ۱۰۰۰ کیلوگرم است.)

ریشه گیری

کشاورزی، یک قطعه زمین به شکل مربع دارد. او برای کاشت و کار در زمین خود در هر مترمربع ۵۰ گرم بذر مصرف کرده است. اگر این کشاورز برای کاشتن در همهٔ زمین خود ۵ کیلوگرم بذر مصرف کرده باشد، محیط زمین او چقدر است؟

برای حل این مسئله ابتدا مساحت زمین را به دست می‌آوریم. مساحت زمین بر حسب متر مربع برابر است با $\frac{۵۰۰۰}{۵۰}=۱۰۰$. طول زمین عددی است که مربع آن ۱۰۰ می‌شود.

اگر طول ضلع مربعی x باشد، می‌دانیدکه مساحت آن $x^۲$ است. اگر مساحت مربعی ۱۰۰ متر مربع باشد، طول یک ضلع آن چند متر است؟ باید دنبال عدد مثبتی بگردیم که مربع آن ۱۰۰ باشد. این عدد ۱۰ است، زیرا ۱۰۰ $۱۰^۲$.

پس محیط آن : متر ۴۰ ۱۰×۴ خواهد بود.

برای مثال می‌دانید ۹ $۳^۲$ $(۳)^۲$). هر دو عدد ۳ و (۳) ریشهٔ دوم ۹ نامیده می‌شوند. اما، بنا به تعریف $\sqrt{۹}$ ، آن ریشهٔ دوم ۹ است که مثبت هم باشد، بنابراین $\sqrt{۹}=۳$.

فرض کنید a عددی مثبت باشد و b $a^۲$، در این صورت b $a^۲$ $(a)^۲$ و a و a را **ریشه‌های دوم** b می‌نامند.

برای یک عدد حقیقی مثبت b، بنا به تعریف $\sqrt{b}$ آن ریشهٔ دوم b است که مثبت هم باشد.

مثال :

$$\sqrt{۰/۰۱}=۰/۱ \quad , \quad \sqrt{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{۲}{۵} \quad , \quad \sqrt{۶۴}=۸$$

ریشهٔ دوم صفر، همان صفر است و $\sqrt{۰}=۰$.

توجه کنید

$$-\sqrt{۹}=-۳ \quad , \quad \sqrt{۹}\neq -۳ \quad , \quad \sqrt{۹}=۳$$

بیندیشیم

آیا همهٔ اعداد ریشهٔ دوم دارند؟ کدام اعداد ریشهٔ دوم دارند؟

فعالیت

۱ــ درستی تساوی‌های زیر را با محاسبهٔ طرفین تساوی توضیح دهید.

$$\sqrt{(-3)^2}=|-3| \quad , \quad \sqrt{5^2}=|5| \quad , \quad \sqrt{4^2}=\sqrt{(-4)^2}=|-4|=4$$

۲ــ درستی تساوی $\sqrt{a^2}=|a|$ را به ازای چند مقدار مثبت یا منفی که برای a انتخاب می‌کنید، بررسی کنید.

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که برای هر عدد a داریم :

$$\boxed{\sqrt{a^2}=|a|}$$

مثال :

$$\sqrt{(-6)^2}=|-6|=6 \quad , \quad \sqrt{6^2}=|6|=6 \quad , \quad \sqrt{(-\pi)^2}=|-\pi|=\pi$$

مثال : $\sqrt{c^4}=c^2$ ، زیرا c^2 نامنفی است و $|c^2|=c^2$ و $c^4 \quad (c^2)^2$.

توجه داشته باشید که

> هر وقت عبارت $\sqrt{b}$ را به کار می‌بریم، فرض بر آن است که b عددی نامنفی است، زیرا فقط اعداد نامنفی ریشهٔ دوم دارند.

تمرین در کلاس

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{(-6)^2} \quad , \quad \sqrt{b^4c^4} \quad , \quad \sqrt{a^8}$$

۲ــ با استفاده از تعریف $\sqrt{b}$ درستی تساوی $(\sqrt{b})^2=b$ را توضیح دهید.

اگر اندازهٔ حجم مکعبی را بدانید، اندازهٔ طول ضلع آن را چگونه به دست می‌آورید؟
اگر طول ضلع مکعبی x باشد، می‌دانید که حجم آن x^3 است. برای مثال، اگر حجم مکعبی ۶۴ باشد، برای یافتن طول ضلع آن، باید دنبال عددی بگردیم که توان سوم آن ۶۴ باشد. این عدد ۴ است، زیرا $64 \quad 4^3$. بنا به تعریف ۴ را مکعب یا ریشهٔ سوم ۶۴ می‌نامند و با $\sqrt[3]{64}$ نشان می‌دهند، یعنی $\sqrt[3]{64}=4$.

> به طور کلی، اگر a و b دو عدد باشند به طوری که $a^3 \quad b$، a را **ریشهٔ سوم b** می‌نامند و آن را با $\sqrt[3]{b}$ نشان می‌دهند.

توجه داشته باشید که هر عدد فقط یک ریشهٔ سوم دارد.

مثال :

$$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3\times3\times3}=3$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\sqrt[3]{\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}$$

$$\sqrt[3]{-0/001}=\sqrt[3]{(-0/1)\times(-0/1)\times(-0/1)}=-0/1$$

بیندیشیم

آیا همهٔ اعداد ریشهٔ سوم دارند؟ علامت ریشهٔ سوم اعداد مثبت چیست؟ علامت ریشهٔ سوم اعداد منفی چیست؟

تمرین در کلاس

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$\sqrt[۳]{x^{۴}x^{۵}}$, $\sqrt[۳]{b^{۶}}$, $\sqrt[۳]{a^{۳}}$, $\sqrt[۳]{-۱۲۵}$

۲ــ با استفاده از تعریف $\sqrt[۳]{b}$ درستی تساوی $(\sqrt[۳]{b})^{۳} = b$ را توضیح دهید.

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

فعالیت

۱ــ جدول زیر را کامل کنید.

a	۹	۲۵	$\frac{۱}{۴}$
b	۴	۴	۱۰۰
$\sqrt{a}\sqrt{b}$			
$\sqrt{ab}$			

۲ــ چه رابطه‌ای بین اعداد سطر سوم و چهارم می‌بینید؟

۳ــ با انتخاب چند عدد دیگر برای a و b که مربع یک عدد گویا هستند، درستی نتیجه‌ای را که گرفته‌اید بررسی کنید.

از فعالیت بالا می‌توان نتیجه گرفت که برای هر دو عدد نامنفی مانند a و b داریم :

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}}$$

توجه کنید که در تساوی بالا هر دو عدد a و b باید مثبت باشند. اگر a و b هر دو منفی باشند، سمت چپ تساوی معنا دارد، ولی سمت راست تساوی معنا ندارد.

به طور مشابه برای ریشهٔ سوم‌گیری نیز برای هر دو عدد a و b، داریم :

$$\boxed{\sqrt[۳]{ab} = \sqrt[۳]{a}\,\sqrt[۳]{b}}$$

مثال :

$$\sqrt{2}\times\sqrt{32}=\sqrt{2\times 32}=\sqrt{64}=8$$

$$\sqrt[3]{-9}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{-9\times 3}=\sqrt[3]{-27}=-3$$

$$\sqrt[3]{ba^2}\times\sqrt[3]{ab^2}=\sqrt[3]{ba^2ab^2}=\sqrt[3]{a^3b^3}=\sqrt[3]{(ab)^3}=ab$$

$$(\sqrt[3]{a})^2=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a\times a}=\sqrt[3]{a^2}$$

تمرین در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

1) $\sqrt{28}\times\sqrt{7}$

2) $\sqrt[3]{0/01}\times\sqrt[3]{0/8}$

3) $\sqrt[3]{2b^2}\times\sqrt[3]{4b^2}$

4) $\sqrt[3]{abc}\times\sqrt[3]{a^2b^5c^8}$

در محاسبات با رادیکال‌ها، برای نشان‌دادن ضرب یک عدد در یک رادیکال و ضرب چند رادیکال در یکدیگر از علامت «×» استفاده نمی کنیم. برای مثال ضرب $2\times\sqrt{3}$ را به صورت $2\sqrt{3}$ و ضرب $5\times\sqrt[3]{14}$ را به صورت $5\sqrt[3]{14}$ می نویسیم.

با انجام عملیات روی رادیکال‌ها سعی می کنیم عبارت‌های ساده‌تری به دست آوریم. این عمل را ساده‌کردن می‌نامند.

مثال : $\sqrt{75}$ را ساده کنید.

$$\sqrt{75}=\sqrt{25\times 3}=\sqrt{25}\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

مثال : عبارت $\sqrt{162b^5c^4}$ را ساده کنید.

$$\sqrt{162b^5c^4}=\sqrt{81b^4c^4\times(2b)}=\sqrt{(9b^2c^2)^2}\sqrt{2b}=9b^2c^2\sqrt{2b}$$

مثال : عبارت $\sqrt[3]{54b^4c^6}$ را ساده کنید.

$$\sqrt[3]{54b^4c^6}=\sqrt[3]{27b^3c^6\times(2b)}=\sqrt[3]{(3bc^2)^3}\sqrt[3]{2b}=3bc^2\sqrt[3]{2b}$$

تمرین در کلاس

۱ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$۲\sqrt{۱۵۰}\ ,\ \sqrt{۱۲۸a^{۵}}\ ,\ \sqrt[۳]{۵۴}\ ,\ \sqrt[۳]{۰/۰۰۳}\ ,\ \sqrt[۳]{۲۵۰a^{۷}b^{۳}}$$

مشابه قانون ضرب رادیکال‌ها، در تقسیم رادیکال‌ها نیز برای هر دو عدد a و b، که $b \neq ۰$، روابط زیر برقرارند :

$$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\quad ,\quad \frac{\sqrt[۳]{a}}{\sqrt[۳]{b}}=\sqrt[۳]{\frac{a}{b}}}$$

مثال :

$$\sqrt{\frac{۱۸}{۲۵}}=\frac{\sqrt{۹\times۲}}{\sqrt{۲۵}}=\frac{\sqrt{۹}\times\sqrt{۲}}{۵}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}=\frac{۳}{۵}\sqrt{۲}$$

مثال :

$$\sqrt[۳]{\frac{۸۱a^{۵}}{۱۲۵c^{۶}}}=\frac{\sqrt[۳]{۸۱a^{۵}}}{\sqrt[۳]{۱۲۵c^{۶}}}=\frac{\sqrt[۳]{۳^{۳}a^{۳}\times۳a^{۲}}}{\sqrt[۳]{۵^{۳}(c^{۲})^{۳}}}=\frac{۳a\sqrt[۳]{۳a^{۲}}}{۵c^{۲}}=\frac{۳a}{۵c^{۲}}\sqrt[۳]{۳a^{۲}}$$

گویا کردن مخرج کسرها

عدد $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ را در نظر بگیرید. برای درک بهتر این‌گونه اعداد و میزان بزرگی آن‌ها می‌توانیم، آن‌ها را به گونه‌ای بنویسیم که در مخرج کسر، اعداد رادیکالی نداشته باشیم. برای مثال عدد $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم :

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{۱\times\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

این عمل را گویا کردن مخرج کسر می‌نامند.

مثال : مخرج کسر $\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}}$ را گویا کنید و آن را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}}=\frac{۲\times(\sqrt[۳]{۵})^{۲}}{\sqrt[۳]{۵}\times(\sqrt[۳]{۵})^{۲}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۵^{۲}}}{(\sqrt[۳]{۵})^{۳}}=\frac{۲(\sqrt[۳]{۲۵})}{۵}=\frac{۲}{۵}\sqrt[۳]{۲۵}$$

جمع و تفریق رادیکال‌ها

فعالیت

به تساوی‌های زیر توجه کنید :

$$۶\sqrt{۳} = (۲+۴)\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳} + ۴\sqrt{۳}$$

$$۷\sqrt[۳]{۴} = (۲+۵)\sqrt[۳]{۴} = ۲\sqrt[۳]{۴} + ۵\sqrt[۳]{۴}$$

۱ــ در تساوی‌های بالا از کدام خاصیت ضرب استفاده شده است؟

۲ــ در عبارت‌های $۵\sqrt{۱۱}$ و $۵\sqrt[۳]{۶}$ ، به جای ۵ عبارت $(۲\ \ ۷)$ را قرار دهید و مشابه محاسبهٔ بالا را انجام دهید.

در جمع و تفریق عبارت‌های رادیکالی، در صورت وجود رادیکال‌های یکسان، می‌توان با فاکتورگیری از آن، ضرایب آن‌ها را با هم جمع یا از هم تفریق کرد.

مثال :

$$۵\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} - ۹\sqrt{۲} + \frac{۵\sqrt{۲}}{۳} = (۵+۳-۹+\frac{۵}{۳})\sqrt{۲} = \frac{۲}{۳}\sqrt{۲}$$

مثال : عبارت $۳\sqrt{۳۲} - ۵\sqrt{۲}$ را ساده کنید.

$$۳\sqrt{۳۲} - ۵\sqrt{۲} = ۳\sqrt{۱۶\times ۲} - ۵\sqrt{۲} = ۳\sqrt{۱۶}\sqrt{۲} - ۵\sqrt{۲} = ۳\times ۴\sqrt{۲} - ۵\sqrt{۲} = ۷\sqrt{۲}$$

مثال : عبارت $\sqrt{۴۵} - ۳\sqrt{۲۰} + ۲\sqrt{۵} + \sqrt{۷} - \sqrt{۶۳}$ را ساده کنید.

$$\sqrt{۴۵} - ۳\sqrt{۲۰} + ۲\sqrt{۵} + \sqrt{۷} - \sqrt{۶۳} = \sqrt{۹\times ۵} - ۳\sqrt{۴\times ۵} + ۲\sqrt{۵} + \sqrt{۷} - \sqrt{۹\times ۷}$$
$$= ۳\sqrt{۵} - ۶\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵} + \sqrt{۷} - ۳\sqrt{۷} = -\sqrt{۵} - ۲\sqrt{۷}$$

مثال : عبارت $\sqrt[۳]{۸۱}+\sqrt[۳]{-۲۴}-\sqrt[۳]{۰/۰۰۳}$ را ساده کنید.

$$\sqrt[۳]{۸۱}+\sqrt[۳]{-۲۴}-\sqrt[۳]{۰/۰۰۳}=\sqrt[۳]{۲۷\times ۳}+\sqrt[۳]{(-۸)\times ۳}-\sqrt[۳]{\frac{۳}{۱۰۰۰}}$$

$$=۳\sqrt[۳]{۳}-۲\sqrt[۳]{۳}-\frac{\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۳]{۱۰۰۰}}=(۳-۲-\frac{۱}{۱۰})\sqrt[۳]{۳}$$

$$=\frac{۹}{۱۰}\sqrt[۳]{۳}$$

تمرین در کلاس

۱ــ دو مقدار $\sqrt{۱۶}+\sqrt{۹}$ و $\sqrt{۱۶+۹}$ را به دست آورید. آیا این دو مقدار مساوی‌اند؟

۲ــ دو مقدار $\sqrt{۳۶}-\sqrt{۱۰۰}$ و $\sqrt{۱۰۰-۳۶}$ را به دست آورید. آیا این دو مقدار مساوی‌اند؟

توجه کنید

در حالت کلی

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

و

$$\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

مسائل

۱ــ ریشه‌های دوم اعداد زیر را به دست آورید.

الف) ۳۶ ب) ۰/۰۴

ج) $\frac{۱}{a^{۸}}$ د) $۹a^{۲}$

۲ــ ریشهٔ سوم اعداد زیر را محاسبه کنید.

الف) ۲۷ ب) $-\frac{۱}{۸}$ ج) $۶۴b^{۳}$

۳ـ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt{۴x^{۲}}$ ب) $\sqrt{۲۵}$ ج) $\sqrt{۰/۰۴}$

د) $\sqrt[۳]{a^{۳}b^{۶}}$ و) $\sqrt[۳]{۲۷}$ هـ) $\sqrt[۳]{-۸}$

۴ـ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{۳۰۰}$ ب) $\sqrt{۲\frac{۱}{۴}}$

ج) $\sqrt[۳]{-۱۶}$ د) $\sqrt[۳]{۵۴}$

۵ـ حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید و آن‌ها را ساده کنید.

الف) $\sqrt{۲۷}\times\sqrt{۳}$ ب) $-۳\sqrt{۵}\times(-۲\sqrt{۲۰})$ ج) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}\times\sqrt{\frac{۸}{۲۷}}$

د) $\sqrt[۳]{۳۶}\times\sqrt[۳]{۶}$ هـ) $۲\sqrt{a^{۴}b}\times۳\sqrt{a^{۲}b^{۳}}$

۶ـ مخرج اعداد و عبارت‌های زیر را گویا کنید و آن‌ها را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ب) $\sqrt{\frac{۵}{۶}}$

ج) $\frac{۴}{\sqrt[۳]{۱۶}}$ د) $\sqrt[۳]{\frac{۲}{۳}}$

هـ) $\frac{۱}{\sqrt{۲a}}$ و) $\sqrt[۳]{\frac{۳}{۴a}}$

۷ـ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱) $۲\sqrt{۳}+۵\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $۳\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵}+۴\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۸}+\sqrt{۳۲}-\sqrt{۱۸}$

۵) $\sqrt[۳]{۱۶}-\sqrt[۳]{۲}$ ۶) $۴\sqrt{۲^{۲}+۳^{۲}}+\sqrt{۵۲}$

۷) $\frac{\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}}{۶\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}}$

۸) $\sqrt[۳]{۴}+۲\sqrt[۳]{۴}$

۹) $۴\sqrt{x}-۵\sqrt{x}$

۱۰) $۳\sqrt[۳]{y}-۲\sqrt[۳]{y}$

۸ــ به جای $\square$ عدد مناسب قرار دهید.

۱) $\boxed{}-\sqrt{۶}=۵\sqrt{۶}$

۲) $-۲\sqrt{۷}-\boxed{}=-۳\sqrt{۷}$

۳) $\sqrt[۳]{۲}-\boxed{}=۲\sqrt[۳]{۲}$