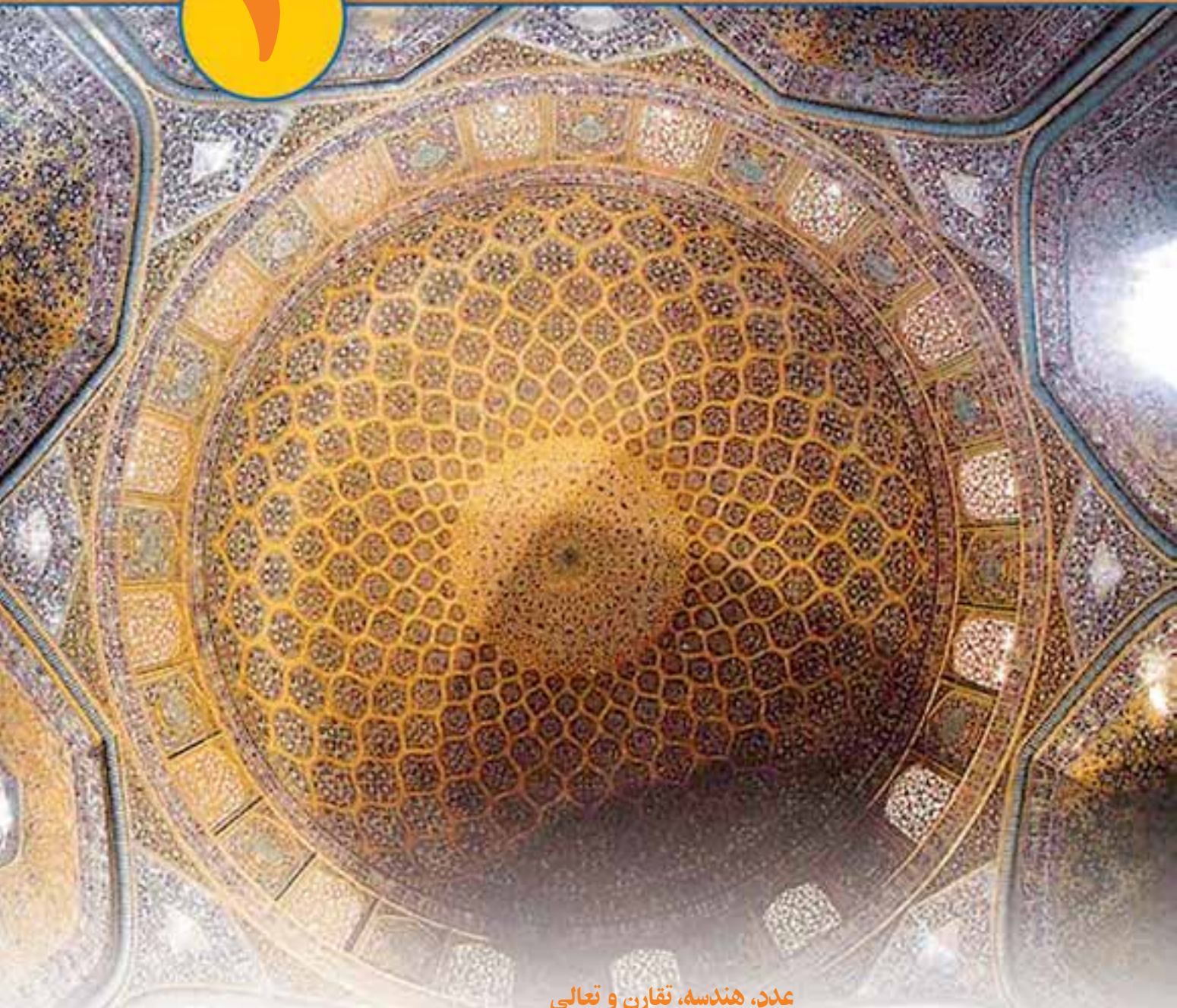


اعداد و نمادها



عدد، هندسه، تقارن و تعالی

ریاضیات و کاربردهای آن بر دو پایه اساسی اعداد و هندسه و ارتباط بین این دو استوار است. علاوه بر استفاده‌های بی‌شمار اعداد و هندسه در علوم تجربی و علوم نظری، این مفاهیم در معماری و هنر نیز به کار می‌آیند. جایی که عظمت و ظرافت در هم می‌آمیزند و ما را به تعالی می‌رسانند.

اعداد طبیعی

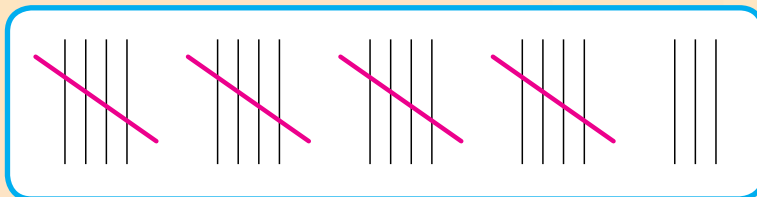
عدد یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است. تعداد افراد، میزان سود و زیان، حجم اشیاء، وزن اجسام، مساحت زمین، طول قد، درجه حرارت و بسیاری چیزهای دیگر همگی با اعداد نشان داده می‌شوند. شناخت بشر از اعداد و نمایش آن‌ها، از ابتدا به گونه‌ای که امروز می‌بینیم نبوده است.

خواندنی‌ها

شمارش یکی از اولین نیازهای بشر بوده است. برخی از انسان‌های قبایل بدوی فقط اعداد ۱ و ۲ و ۳ را می‌شناختند و اعداد بزرگ‌تر از ۳ را «خیلی» می‌گفتند.

با گذشت زمان، شناخت بشر از اعداد بیشتر شد و او راه‌هایی برای نمایش اعداد بزرگ‌تر کشف کرد. به نظر شما، اگر فردی تعداد زیادی گوسفند می‌داشت، چگونه می‌توانست تعداد آن‌ها را به دست آورد و آن را در جایی ثبت کند؟ یک فرد چگونه می‌توانست تعداد روزهایی که در محلی حضور داشته است را ثبت کند؟

می‌توان گفت، احتمالاً او تعداد گوسفندان خود را با تعداد سنگ‌ریزه‌هایی که در تناظر با گوسفندان بودند نگهداری می‌کرد، به این شکل که با هر بار ورود یک گوسفند به آغل یا خروج یک گوسفند از آغل، یک سنگ‌ریزه را از یک کیسه به کیسه دیگر وارد می‌کرد. در مورد تعداد روزها هم از روش شمارش شیار روی یک سنگ یا چوب استفاده می‌کرد. این روش امروزه نیز برای نمایش تعداد اشیاء به کار می‌رود.



شماره‌های بالا عدد ۲۳ را نشان می‌دهند.

در حساب کردن، مسئله فقط ثبت و نمایش اعداد نبود، بلکه مسائل پیچیده‌تری مانند جمع و ضرب اعداد، در محاسبه محیط و مساحت زمین‌ها مطرح شد. جدول صفحه بعد نمونه‌هایی از شیوه‌های نمایش اعداد، توسط اقوام و تمدن‌های مختلف را نشان می‌دهد.

عدد	بابلی	مصری	میخی	رومی	مایا
۲۱	●●●	ننن	◀◀۲	XXI	
۸	●●●●		۲۲۲۲	VIII	
۳۶	●●●●●	ننن	◀◀◀ ۲۲۲	XXXVI	
۹۷	●●●●●●●	نننن	۲◀◀◀۲۲۲	XCVII	
۱۷۴	●●●●●●●●	نننن	۲۲◀◀◀۲۲	CLXXIV	

آیا می‌توانید قواعدی که برای نمایش اعداد طبیعی با این روش‌ها به کار رفته است را کشف کنید؟ اگر قواعد عددنویسی رومی را کشف کردید، از یک تا بیست را با این روش بنویسید.

باید دانست که در تمام شیوه‌های عددنویسی اولیه، اعداد ۵ و ۱۰ و ۲۰ نقش اساسی داشتند. این سه عدد، به ترتیب تعداد انگشتان یک دست، دو دست و دو پا هستند.

همان‌گونه که در جدول بالا می‌بینید تعدادی از این شیوه‌های نمایش اعداد، شبیه شیوه نمایش دهدهی مرسوم خودمان است، با این تفاوت که در این شیوه‌ها، نمایشی برای صفر وجود ندارد. همین موضوع باعث شده است که برای نمایش اعداد تعداد زیادی نماد وارد شود و کار در این شیوه‌ها را مشکل سازد. وارد شدن صفر در اعداد یک انقلاب بود که ریاضیات را وارد مرحله جدیدی کرد. اولین بار هندیان بودند که صفر و نمایشی برای صفر را وارد نظام اعداد کردند و پس از آن مسلمانان آن را به جهانیان معرفی کردند. پیشگام این کار ریاضیدان بزرگ ایرانی محمدبن موسی خوارزمی بود.

با ورود صفر به نظام اعداد و قبول آن به عنوان یک عدد، نمایش دهدهی اعداد امکان پذیر شد. نمایش دهدهی اعداد، انجام چهار عمل اصلی را به شکل بسیار ساده‌ای درآورد. شما این اعمال را در دبستان فرا گرفته‌اید و خوب است توجه داشته باشید که صدها سال طول کشید تا نمایش اعداد و انجام چهار عمل اصلی روی آن‌ها به صورت کنونی آن درآید.

شیوه‌ای که امروزه برای نمایش اعداد به کار می‌رود، نمایش دهدهی اعداد نام دارد. در این شیوه نمایش، برای اعداد از صفر تا نه، نمادهایی به عنوان نشانه این اعداد انتخاب می‌شود. در زبان فارسی این نمادها عبارت‌اند از:

۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹

در زبان‌های دیگر نمادهای دیگری انتخاب شده است. به کمک این نمادها، با استفاده از قاعده دسته‌بندی‌های ده‌تایی، بقیه اعداد نیز نمایش داده می‌شوند. مثلاً، «۱۳۵» نشان‌دهنده تعداد یک دسته صدتایی و سه دسته ده‌تایی و پنج یکی است.

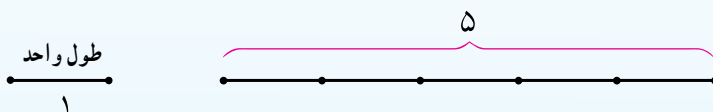
خوب است بدانید که بسیار طول کشید تا صفر کشف و به عنوان عدد شناخته شود، به همین خاطر، صفر جزء اعداد طبیعی به حساب نمی‌آورند، اگرچه در نمایش دهدهی اعداد طبیعی، صفر نقش مهمی دارد.

ملا محمد باقر یزدی

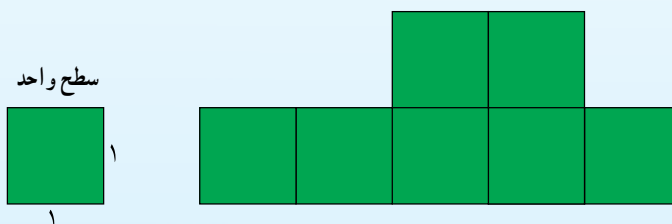
دانشمند، ریاضی‌دان، منجم و عالم دینی دوره صفویه بوده است. او در علوم متداول روزگار خود از جمله جبر، هندسه و نجوم مهارت داشت به خصوص در علم ریاضی قواعد جدیدی ابداع کرد. از جمله آثار او می‌توان به کتاب عیون الحساب اشاره نمود که در فصلی از این کتاب به محاسبه اعداد متحابه پرداخت (دو عدد را متحابه هم گویند هرگاه مجموع مقسوم علیه‌های هریک با دیگری برابر باشد. برای مثال ۲۲ و ۲۸۴ دو عدد متحابه‌اند). یزدی قبل از دکارت به این نتیجه رسید که دو عدد ۹۳۶۳۵۸۴ و ۹۴۳۷۰۵۶ متحابه‌اند. از آثار دیگر او می‌توان به حاشیه بر تحریر مخروطات آپولونیوس و شرح کتاب الاشکال الكنزیه و شرح المقالة العاشر من (تحریر) اصول اقلیدس اشاره نمود. او در سال ۱۰۵۶ ق در اصفهان درگذشت.

اندازه گیری با اعداد طبیعی

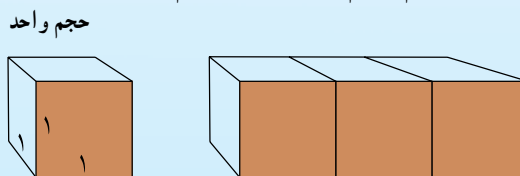
شمارش، یک نوع اندازه گیری است که تعداد اشیاء یا چیزها را معلوم می کند. هر نوع شمارشی با داشتن یک واحد آغاز می شود. به عنوان مثال، با انتخاب یک پاره خط به عنوان پاره خط واحد، طول آن را طول واحد در نظر می گیریم. با به دنبال هم قرار دادن چند پاره خط واحد، پاره خطی ساخته می شود، که اندازه آن با یک عدد طبیعی بیان می شود. مثلاً، اندازه پاره خط زیر، با توجه به پاره خط واحد انتخاب شده، ۵ واحد طول می باشد.



با انتخاب یک طول واحد، مساحت مربعی که طول هر ضلع آن برابر طول واحد است، سطح واحد در نظر گرفته می شود و آن را مربع واحد می نامند. شکل هایی که با کنار هم گذاردن مربع واحد ساخته می شوند، دارای مساحتی هستند که با اعداد طبیعی قابل اندازه گیری هستند. مثلاً، مساحت شکل زیر ۷ واحد سطح است.



با انتخاب طول واحد، حجم مکعبی که طول هر ضلع آن برابر طول واحد است، حجم واحد در نظر گرفته می شود. اجسامی که با کنار هم گذاردن مکعب واحد ساخته می شوند دارای حجمی هستند که با اعداد طبیعی قابل اندازه گیری هستند. مثلاً، حجم جسم زیر ۳ واحد حجم است.



تمرین در کلاس

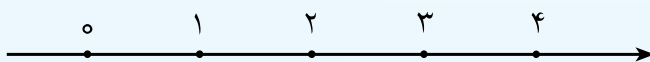
۱- کلیه مستطیل هایی که اندازه محیط آن ها ۲۰ سانتی متر است و طول و عرض آن ها بر حسب سانتی متر، اعداد طبیعی هستند را رسم کنید.

۲- چند مستطیل رسم کردید؟ مساحت هر کدام چقدر است؟

۳- کدام مستطیل بیشترین مساحت را دارد؟

اعداد صحیح

یک خط افقی به شکل زیر رسم و نقطه‌ای به عنوان مبدأ روی آن انتخاب می‌کنیم. یک جهت روی این خط انتخاب می‌کنیم و آن را جهت مثبت می‌نامیم. روی این خط، نیم خط به ابتدای مبدأ در جهت مثبت را نیم خط مثبت و نیم خط مقابل آن را نیم خط منفی می‌نامیم. یک پاره خط واحد انتخاب می‌کنیم و آن را روی نیم خط مثبت، از مبدأ رسم می‌کنیم. با پشت سر هم قرار دادن پاره خط‌های واحد، نقاطی به دست می‌آیند که آن‌ها را نقاط نظیر اعداد طبیعی می‌نامند.



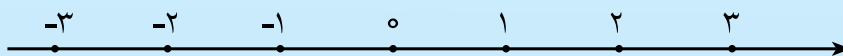
خطی که روی آن، یک مبدأ، یک جهت و یک پاره خط واحد انتخاب شده است را یک محور اعداد می‌نامند.

تصور در کلاس



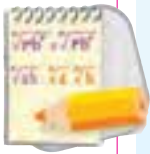
A و B دو نقطه روی نیم خط مثبت هستند. A نظیر عدد ۴ و طول پاره خط AB برابر ۶ است. B نظیر کدام عدد طبیعی است؟

اگر پاره خط واحد را روی نیم خط منفی، از مبدأ رسم کنیم و این رسم را به دنبال هم تکرار کنیم، نقاطی به دست می‌آیند که آن‌ها را نقاط نظیر اعداد صحیح منفی می‌نامند. پس، به ازای هر عدد طبیعی، یک عدد صحیح منفی نیز وجود دارد که فاصله نقاط نظیر آن‌ها تا مبدأ با هم مساوی است. این اعداد را قرینه هم می‌نامند و قرینه هر عدد طبیعی به صورت همان عدد که علامت منفی « - »، پشت آن قرار گرفته است، نمایش داده می‌شود. مثلاً، قرینه ۲ عدد « ۲- » است و نقاط نظیر آن‌ها، تا مبدأ فاصله مساوی دارند.



۱- در خط‌هایی که به صورت افقی رسم می‌شوند معمولاً جهت سمت راست را به عنوان جهت مثبت انتخاب می‌کنند.

اعداد طبیعی، صفر و قرینه اعداد طبیعی با هم را اعداد صحیح می‌نامند. اعداد صحیح مثبت، همان اعداد طبیعی هستند و اعداد صحیح نامنفی همان اعداد طبیعی به همراه صفر هستند. اعداد صحیح نامنفی را اعداد حسابی نیز می‌نامند.



مسائل

۱- عملیات ریاضی زیر را انجام دهید.

الف) 5×6

ب) $2 \times (7 \times 5)$

ج) (3×5)

د) $(3 \times 6) \times (3)$

ه) $(3 \times 2) \div (4 \times 6)$

۲- درآمد ماهیانه خانواده‌ای $350,000$ تومان است، اگر مخارج سالانه این خانواده $4,000,000$ تومان باشد، آیا این خانواده می‌تواند پولی را پس‌انداز کند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

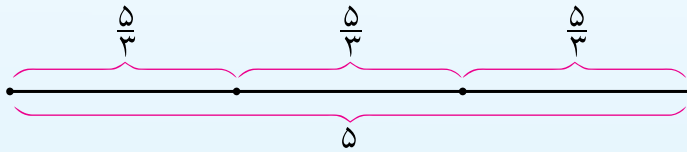
ابوجعفر محمدبن ایوب طبری

ریاضیدان ایرانی (متوفی پس از ۴۸۵ هـ.ق) از مردم طبرستان (مازندران کنونی) بود. طبری در علم حساب به‌ویژه در تألیفات خود معتقد به معرفی جامع‌نگر فصل‌های گوناگون علم حساب و هندسه بوده است و از این کار هدف تعلیماتی داشته است. از آثار وی می‌توان به شمارنامه و مفتاح‌المعاملات اشاره کرد. یک نسخه خطی از کتاب مفتاح‌المعاملات در کتابخانه ایاصوفیای استانبول موجود است.

اعداد گویا

در بسیاری از اندازه‌گیری‌ها، اعداد صحیح کافی نیستند. به عنوان مثال، در اندازه‌گیری وزن، وزن بسیاری از اجسام را نمی‌توان با یک عدد طبیعی نشان داد.

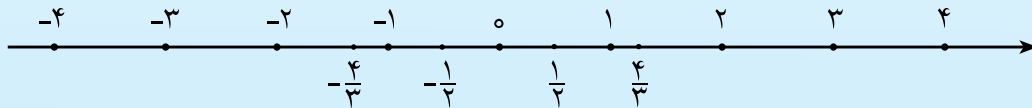
اگر پاره خط واحد را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم، طول هر یک از دو پاره خط به دست آمده چقدر است؟ روشن است که طول این پاره خط‌ها برابر یک عدد طبیعی نیست و شما قبلاً آن را با $\frac{1}{2}$ نشان داده‌اید که نشان‌دهنده تقسیم ۱ بر ۲ است. همین‌طور اگر پاره خطی به طول ۵ را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم، سه پاره خط به دست می‌آید که طول هر یک $\frac{5}{3}$ است.



اگر روی محور اعداد، پاره خط‌هایی به ابتدای مبدأ و انتهای یک عدد صحیح را در نظر بگیریم و آن‌ها را به چند قسمت مساوی تقسیم کنیم، نقاط تازه‌ای به دست می‌آیند که آن‌ها را نقاط نظیر اعداد گویا می‌نامند.

اعداد گویا را می‌توان به صورت تقسیم یک عدد صحیح بر یک عدد طبیعی نمایش داد.

تقسیم دو عدد بر هم را به صورت کسری نشان می‌دهند.



اگر به مکان دو عدد گویا روی محور اعداد توجه کنید، می‌بینید عددی که بزرگ‌تر است، سمت راست عدد کوچک‌تر قرار می‌گیرد. برای آن که تشخیص دهیم، از دو عدد گویای مثبت، کدام یک بزرگ‌تر است، کافی است آن‌ها را به شکلی بنویسیم که مخرج مساوی داشته باشند. سپس، صورت هر کدام که بزرگ‌تر بود، آن عدد بزرگ‌تر است.

مثال: از دو عدد $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{7}$ کدام بزرگ‌تر است؟

این اعداد گویا را به شکلی می‌نویسیم که مخرج مساوی داشته باشند. برای انجام این کار، کافی است صورت

و مخرج هر کدام را در مخرج دیگری ضرب کنیم.

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 5}{7 \times 5} = \frac{20}{35} \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35}$$

با مقایسه بین صورت کسرها نتیجه می شود که $\frac{20}{35} < \frac{21}{35}$ ، پس $\frac{4}{7} < \frac{3}{5}$.



تمرین در کلاس

الف) دو عدد $\frac{4}{3}$ و $\frac{7}{4}$ را روی محور اعداد مشخص کنید. کدام یک بزرگ ترند؟
 ب) این دو عدد را به گونه ای بنویسید که مخرج مساوی داشته باشند و سپس تعیین کنید، کدام یک بزرگ ترند.

ج) از طریق نمایش روی محور اعداد و هم مخرج کردن، تعیین کنید که کدام یک از دو عدد $-\frac{5}{3}$ و $-\frac{7}{5}$ بزرگ ترند.

در فعالیت زیر می خواهیم نشان دهیم که بین هر دو عدد گویا می توان یک عدد گویای دیگر معرفی کرد.



فعالیت

- ۱- یک عدد گویا بین $\frac{2}{7}$ و $\frac{5}{7}$ نام ببرید.
 - ۲- آیا می توانید یک عدد گویا بین $\frac{4}{7}$ و $\frac{5}{7}$ نام ببرید؟ آیا با ضرب صورت و مخرج هر دو کسر در ۲ می توان یک عدد گویا بین آنها معرفی کرد؟ بررسی کنید.
 - ۳- یک عدد گویا بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{7}$ نام ببرید.
- (راهنمایی: ابتدا این دو عدد را به گونه ای بنویسید که مخرج مساوی پیدا کنند.)

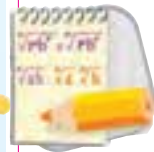
از این فعالیت نتیجه می شود که :

بین هر دو عدد گویای متمایز حداقل یک عدد گویای دیگر وجود دارد.



بیندیشیم

بین دو عدد گویای متمایز چند عدد گویا می‌توان پیدا کرد؟



مثال: دو عدد گویا بین عددهای $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{5}$ بیابید.

صورت و مخرج این کسرها را در ۳ ضرب می‌کنیم. پس، باید بین $\frac{6}{15}$ و $\frac{9}{15}$ دو عدد گویا بیابیم. اعداد زیر بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{5}$ می‌باشند.

$$\frac{7}{15}, \frac{8}{15}$$

مثال: سه عدد گویا بین عددهای $\frac{4}{11}$ و $\frac{5}{11}$ بیابید.

صورت و مخرج این کسرها را در ۴ ضرب می‌کنیم. پس، باید بین $\frac{16}{44}$ و $\frac{20}{44}$ سه عدد گویا بیابیم. اعداد زیر بین $\frac{4}{11}$ و $\frac{5}{11}$ می‌باشند.

$$\frac{17}{44}, \frac{18}{44}, \frac{19}{44}$$

مسائل

۱- عملیات زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{2}{5} - \frac{3}{5} =$

ب) $\frac{4}{3} + \frac{2}{5} =$

ج) $\frac{5}{6} - \frac{5}{4} =$

د) $3\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3} =$

هـ) $(2\frac{3}{4}) \times (-3\frac{1}{3}) =$

و) $(\frac{-7}{4} + \frac{3}{5}) \div \frac{20}{37} =$

۲- $\frac{2}{5}$ از نصف یک میله یک متری چند سانتی متر است؟

۳- حمید دانش آموز منظمی است و برای خود برنامه روزانه دارد. او $\frac{1}{3}$ از شبانه‌روز را استراحت می‌کند، ۶ ساعت در مدرسه است، $\frac{1}{4}$ شبانه‌روز را به مطالعه درس‌های خود اختصاص می‌دهد و $\frac{1}{8}$ شبانه‌روز را به کارهای پیش‌آمده اختصاص داده است و بقیه زمان را هم به فعالیت‌های ورزشی می‌پردازد. حمید در یک شبانه‌روز چند ساعت فعالیت‌های ورزشی انجام می‌دهد؟

۴- بین هر دو عدد از عددهای گویای زیر، چهار عدد گویای دیگر به دست آورید.

ج) $-\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}$

ب) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$

الف) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$

۵- اعداد گویای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{24}, \frac{3}{7}$$

نمایش اعشاری و اعداد اعشاری

با اعداد طبیعی، صحیح و گویا و نمایش آن‌ها روی محور اعداد آشنا شده‌اید.

امروزه برای نوشتن اعداد طبیعی از دستگاه دهدهی استفاده می‌شود. این شیوه از نمایش اعداد طبیعی را نمایش اعشاری اعداد طبیعی نیز می‌نامند. در این شیوه نمایش، هر رقم دارای ارزش مکانی است. مثلاً در عدد ۲۳۷، رقم ۷ در مرتبه یکان و رقم ۳ در مرتبه دهگان و رقم ۲ در مرتبه صدگان است. این به معنای آن است که:

$$۲۳۷ = ۲ \times ۱۰^۲ + ۳ \times ۱۰ + ۷ \times ۱$$

در این شیوه نمایش، همه اعداد طبیعی را می‌توان نمایش داد. برای نوشتن (به نمایش درآوردن) اعداد کمتر از ۱ می‌توانیم ارزش‌های مکانی به اندازه $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{100}$ ، $\frac{1}{1000}$ و... را نیز در نظر بگیریم. برای مشخص کردن

رقم‌هایی که در مرتبه $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{100}$ ، ... دارند از علامت ممیز (/) استفاده می‌شود. مثلاً در عدد $\frac{3}{4}$ ، رقم ۳ در مرتبه یکان و رقم ۴ در مرتبه $\frac{1}{10}$ است، یعنی:

$$\frac{3}{4} = 3 + 4 \times \frac{1}{10}$$

به‌عنوان مثالی دیگر در عدد $\frac{35}{42}$ ، رقم ۳ در مرتبه دهگان و رقم ۵ در مرتبه یکان و رقم ۴ در مرتبه $\frac{1}{10}$ و رقم ۲ در مرتبه $\frac{1}{100}$ است، یعنی:

$$\frac{35}{42} = 3 \times 10 + 5 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100}$$

اعدادی را که بتوانیم با این شیوه نمایش بنویسیم اعداد اعشاری مثبت می‌نامیم. این اعداد و قرینه آن‌ها را اعداد اعشاری می‌نامند.

اعداد اعشاری بخشی مهم از اعداد گویا هستند. یک عدد اعشاری مثل $\frac{2573}{63}$ را می‌توان به‌عنوان عدد گویا به صورت زیر نوشت:

$$\frac{2573}{63} = 2573 + 6 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} = \frac{257363}{100}$$

در عدد اعشاری $\frac{2573}{63}$ ، ۲۵۷۳ را قسمت صحیح و $\frac{63}{63}$ را قسمت اعشاری این عدد می‌نامند. به‌طور کلی، در یک عدد اعشاری مثبت، عدد حسابی قبل از ممیز را قسمت صحیح آن عدد اعشاری می‌نامند و با قرار دادن صفر به‌جای قسمت صحیح، عدد اعشاری ساخته شده را قسمت اعشاری آن عدد می‌نامند.

به عنوان مثال، در عدد اعشاری $21/564$ ، قسمت صحیح آن ۲۱ و قسمت اعشاری آن $564/1000$ است. توجه داشته باشید که اعداد طبیعی هم، از یک نظر، عدد اعشاری محسوب می‌شوند. به عنوان مثال، عدد طبیعی ۳۵ را می‌توانید به صورت $35/100$ در نظر بگیرید. قسمت اعشاری اعداد طبیعی صفر است. در تمرین زیر با چند خاصیت مهم اعداد اعشاری آشنا می‌شوید.



تمرین در کلاس

۱- قسمت صحیح و قسمت اعشاری اعداد زیر را بیابید و هر کدام را به صورت یک عدد گویا بنویسید.

د) $12/1$ ج) $0/023$ ب) $452/500$ الف) $86/000$

۲- چه ویژگی مشترکی بین مخرج‌های اعداد گویای به دست آمده در بالا که یک عدد اعشاری هستند می‌یابید؟

۳- در زیر جاهای خالی را با یک عمل ضرب یا تقسیم، مانند نمونه، پر کنید.

$$56294 \boxed{\div 10} = 5629/4$$

$$0/0327 \boxed{\times 10} = 0/327$$

$$56294 \boxed{\quad} = 56/294$$

$$0/0327 \boxed{\quad} = 32/7$$

$$56294 \boxed{\quad} = 562/94$$

$$0/0327 \boxed{\quad} = 3/27$$

$$56294 \boxed{\quad} = 5/6294$$

$$0/0327 \boxed{\quad} = 327$$

۴- اعداد $24/37$ ، $24/370$ ، $24/3700$ ، $24/37000$ و $24/370000$ را با هم مقایسه کنید. آیا تفاوتی با هم دارند؟ به طور کلی در یک عدد اعشاری، در مورد رقم‌های صفر بعد از ممیز که بعد از آن‌ها رقم غیر صفر دیگری قرار ندارد، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

می‌دانید که برای جمع دو عدد اعشاری، آن دو عدد را به گونه‌ای زیر هم می‌نویسیم که ممیزهای این اعداد زیر هم قرار بگیرند؛ سپس، طبق قواعد جمع اعداد طبیعی، با حفظ ممیز در جای خود، عمل جمع را انجام می‌دهیم. مثلاً، برای جمع دو عدد اعشاری $23/672$ و $5/80$ داریم:

$$\begin{array}{r} 23/672 \\ + 5/80 \\ \hline 28/752 \end{array}$$

با نوشتن این دو عدد اعشاری به صورت اعدادی گویا با مخرج‌های مساوی که توانی از 10 باشند، درستی روش بالا را می‌توان نشان داد.



- می خواهیم حاصل ضرب دو عدد اعشاری $۲/۰۷۲$ و $۴۶/۳۴$ را به دست آوریم.
- ۱- دو عدد بالا را به صورت اعداد گویایی که مخرج آن‌ها توانی از ۱۰ است بنویسید و به صورت دو عدد گویا در یکدیگر ضرب کنید.
 - ۲- حاصل ضرب به دست آمده در بالا را به صورت یک عدد اعشاری بنویسید.
 - ۳- یک روش برای ضرب اعداد اعشاری پیشنهاد کنید.

در ضرب دو عدد اعشاری کافی است نخست ممیز این اعداد را نادیده بگیریم و آن‌ها را مانند دو عدد طبیعی در هم ضرب کنیم. سپس، به اندازه مجموع تعداد ارقام بعد از ممیز آن‌ها، در عدد به دست آمده، رقم‌های سمت راست را بعد از ممیز قرار دهیم.

مثال: حاصل ضرب $۱۴/۱ \times ۳۲/۰۲۵$ را به دست آورید.

ممیزها را در این اعداد نادیده می‌گیریم و حاصل ضرب زیر را حساب می‌کنیم.

$$۳۲۰۲۵ \times ۱۴۱ \quad ۴۵۱۵۵۲۵$$

با توجه به آن که اولین عدد، سه رقم و دومین عدد، یک رقم اعشار (بعد از ممیز) دارد برای حاصل ضرب به دست آمده چهار رقم اعشار در نظر می‌گیریم. پس،

$$۳۲/۰۲۵ \times ۱۴/۱ \quad ۴۵۱/۵۵۲۵$$

در کتاب مفتاح المعاملات، مراحل ضرب دو عدد مخلوط، $۲\frac{۱}{۴}$ و $۳\frac{۱}{۳}$ به شکل زیر بیان شده است:

$$۲\frac{۱}{۴} \times ۳\frac{۱}{۳}$$

$$۲\frac{۱}{۴} \times ۳ = ۶\frac{۳}{۴}$$

$$۲ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۱۲}$$

$$۶\frac{۳}{۴} + \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۱۲} = ۷\frac{۱}{۲}$$

آیا می‌توانید دلیل درستی این روش را بیان کنید؟



۱- اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$۹/۸۹ \times ۱۰^۴, ۹۹۰۰۰, ۱ \times ۱۰^۵, ۹۸ \times ۱۰^۳$$

۲- اعداد زیر را از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

$$۰/۴۶, \frac{-۲۶}{۵۰}, ۰/۴۷, \frac{-۱}{۲}, ۰/۴۸۸, \frac{۵۰۵}{۱۰۰۰}$$

۳- محاسبات زیر را بدون استفاده از ماشین حساب انجام دهید. درستی محاسبات خود را با ماشین حساب کنترل کنید. (در صورت داشتن ماشین حساب)

۱) $۰/۵۵ \quad ۰/۱۹$

۲) $۰/۸۴ \quad ۰/۰۰۳$

۳) $۲ \quad ۰/۴$

۴) $۰/۰۴ \times ۱۲$

۵) $۲/۵۵ \times ۱/۲$

۶) $۲۲۰ \div ۰/۰۵$

۷) $۳/۶ \times ۱۰^۲ \quad ۲/۵ \times ۱۰^۲$

۸) $۸/۶۵ \times ۱۰^۳ \quad ۲/۹۲ \times ۱۰^۳$

نزدیک به ۲۵۰۰ سال پیش، فیثاغورس، دانشمند یونانی، مکتبی را بنیان نهاد که برای اعداد صحیح اهمیت بسیاری قائل می‌شد. بنا به اعتقاد فیثاغورسیان طول هر پاره خطی باید یک عدد گویا باشد. روزی یکی از آن‌ها متوجه شد که طول وتر مثلث قائم الزاویه‌ای که طول دو ضلع دیگر آن ۱ است، طبق قضیه فیثاغورس $\sqrt{2}$ است که عددی گویا نیست. این برای فیثاغورسیان ابداً خوشایند نبود، با این حال $\sqrt{2}$ طول یک پاره خط بود.

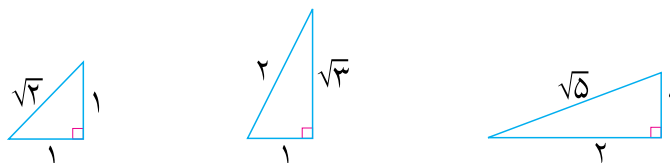
نظیر هر عدد گویا نقطه‌ای روی محور اعداد می‌توان یافت. آیا هر نقطه روی محور اعداد نظیر یک عدد گویا است؟ بر روی محور اعداد نقاطی وجود دارند که نظیر هیچ عدد گویایی نیستند. این گونه نقاط، اعدادی را نشان می‌دهند که آن‌ها را اعداد گنگ می‌نامند. اعداد گنگ و اعداد گویا را با هم، «اعداد حقیقی» می‌نامند.

با استفاده از نماد $\sqrt{\quad}$ (رادیکال) که به معنای جذرگیری است، اعداد گنگ بسیاری را می‌توان معرفی کرد. برای مثال، $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ اعدادی گنگ هستند. π نیز عددی گنگ است.



تمرین در کلاس

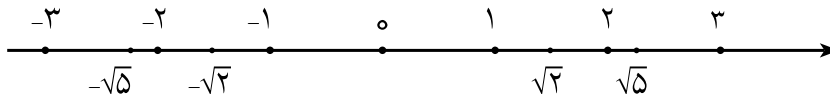
۱- توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلث‌های قائم الزاویه زیر را رسم کرد و پاره‌خط‌هایی با طول‌های $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ساخت.



۲- با استفاده از رسم‌های بالا، روی محور اعداد، نقاط نظیر اعداد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ را بیابید.

اگر دو نقطه، یکی روی نیم خط مثبت و یکی روی نیم خط منفی انتخاب کنیم به طوری که فاصله آن‌ها تا مبدأ مساوی باشند، اعداد نظیر این نقاط را دو عدد قرینه هم می‌نامند. هر نقطه روی نیم خط منفی نشان‌دهنده یک عدد حقیقی منفی است و قرینه یک عدد حقیقی مثبت می‌باشد. قرینه هر عدد حقیقی را مانند اعداد گویا با

گذاشتن علامت منفی « - »، در سمت چپ آن نشان می‌دهند. اعداد حقیقی مثبت را به همراه صفر، اعداد حقیقی نامنفی می‌نامند.



در تمرین زیر می‌خواهیم با محور اعداد حقیقی بیشتر آشنا شویم.

تمرین در کلاس



- ۱- یک محور اعداد حقیقی رسم کنید و روی آن، نقاط متناظر اعداد $1, 2, 3, \frac{1}{4}, 1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}$ را بیابید.
- ۲- اگر عددی از عدد دیگری بزرگ‌تر باشد، مکان هریک از آن دو روی محور اعداد نسبت به دیگری چگونه است؟ اگر عددی را با عدد مثبتی جمع کنیم، مکان آن روی محور اعداد چه تغییری می‌کند؟ حاصل از عدد قبلی بزرگ‌تر می‌شود یا کوچک‌تر؟
- ۳- اعداد بند اول همین تمرین را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

برای بیان این که یک عدد از عدد دیگر کوچک‌تر است از علامت «<» یا «>» استفاده می‌کنیم. برای مثال برای بیان این که ۲ از ۳ کوچک‌تر است، می‌نویسیم $2 < 3$. این مطلب را به صورت $3 > 2$ نیز می‌توانیم بنویسیم.

گاهی اوقات برای سادگی در نوشتن دو نامساوی مانند $4 < 5$ و $1 < 4$ ، هر دوی آن‌ها را همزمان به صورت $1 < 4 < 5$ نیز می‌نویسیم.

فعالیت



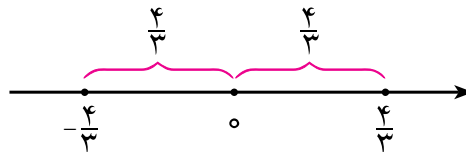
- ۱- نقاط نظیر اعداد ۳ و ۵ و ۱۲ را روی محور اعداد در نظر بگیرید. فاصله این نقاط تا مبدأ چقدر است؟
- ۲- چه رابطه‌ای بین فاصله این اعداد تا مبدأ و خود این اعداد مشاهده می‌کنید؟
- ۳- نقاط نظیر اعداد (۳) و (۵) و (۱۲) را روی محور اعداد در نظر بگیرید. فاصله این نقاط تا مبدأ چقدر است؟

- ۴- چه رابطه‌ای بین فاصله این اعداد تا مبدأ و خود این اعداد مشاهده می‌کنید؟
- ۵- نتیجه‌ای که به دست آورده‌اید را برای یک عدد دلخواه مثبت و یک عدد منفی دلخواه جداگانه بیان کنید.



فاصله نقطه نظیر یک عدد حقیقی روی محور اعداد تا مبدأ را قدرمطلق آن عدد می‌نامند.

مثال: فاصله نقاط نظیر دو عدد $\frac{4}{3}$ و $(-\frac{4}{3})$ تا مبدأ برابر $\frac{4}{3}$ است، پس قدرمطلق هر دو عدد $\frac{4}{3}$ و $(-\frac{4}{3})$ برابر $\frac{4}{3}$ است.



قدرمطلق را با استفاده از نماد $|\cdot|$ نشان می‌دهند.

به عنوان مثال، قدرمطلق $(-\frac{4}{3})$ را با $|\frac{4}{3}|$ و قدرمطلق $\frac{4}{3}$ را با $|\frac{4}{3}|$ نشان می‌دهند که هر دو، برابر $\frac{4}{3}$ هستند.

مثال: قدرمطلق اعداد $\frac{4}{3}$ ، 4 ، π ، $-\sqrt{7}$ و قرینه آن‌ها به شکل زیر است.

$$|-\frac{4}{3}| = |\frac{4}{3}| = \frac{4}{3}, \quad |-4| = |4| = 4, \quad |-\pi| = |\pi| = \pi, \quad |-\sqrt{7}| = |\sqrt{7}| = \sqrt{7}$$

قدرمطلق اعداد مثبت برابر خود آن اعداد است زیرا فاصله مثبت تا مبدأ برابر همان عدد است و

قدرمطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. در حالت کلی، قدرمطلق هر عددی، عددی نامنفی است.

مثال: $1 - \sqrt{2}$ عددی منفی است، پس $1 - \sqrt{2} = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$ ، همچنین $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ عددی منفی

$$\text{است، پس } |\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

تقریب‌های اعشاری اعداد حقیقی

$\sqrt{2}$ عددی گنگ است، ولی می‌توانیم اعدادی اعشاری را که نزدیک به آن باشد، بیابیم. برای مثال، $1/4$ به $\sqrt{2}$ نزدیک است و $1/41$ به $\sqrt{2}$ نزدیک‌تر است و $1/414$ به $\sqrt{2}$ بیشتر نزدیک است. این اعداد اعشاری را تقریب‌های اعشاری $\sqrt{2}$ می‌نامند. برای هر عدد حقیقی می‌توان از این تقریب‌های اعشاری یافت و هرچه عدد اعشاری به عدد حقیقی نزدیک‌تر باشد، دقت تقریب بالاتر است.

مثال: $\frac{1}{3}$ برابر هیچ عدد اعشاری نیست، ولی می‌توانیم تقریب‌های اعشاری آن را به دست آوریم. $\frac{1}{3}$ با دقت یک رقم اعشار برابر است با $0/3$ و با دقت دو رقم اعشار برابر است با $0/33$ و با دقت سه رقم اعشار برابر است با $0/333$. دقت این تقریب‌ها را هر چقدر که لازم باشد می‌توانیم بالا ببریم.

مثال ۱: تقریب اعشاری $\frac{2}{7}$ تا سه رقم اعشار چیست؟

۲ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را تا سه رقم اعشار محاسبه می‌کنیم. $\frac{2}{7}$ با دقت یک رقم اعشار برابر است با $0/2$ ، با دقت دو رقم اعشار برابر است با $0/28$ ، و با دقت سه رقم اعشار برابر است با $0/285$.

مثال ۲: $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ دو عدد گنگ هستند و $\sqrt{2}$ با دقت چهار رقم اعشار برابر است با $1/4142$ و $\sqrt{3}$ با دقت چهار رقم اعشار برابر است با $1/7320$.

مثال ۳: π یک عدد گنگ است و با دقت دو رقم اعشار برابر است با $3/14$. دقت این تقریب را تا هر قدر که بخواهیم می‌توانیم بالا ببریم. مثلاً، π با دقت ده رقم اعشار برابر است با $3/1415926535$.

توجه کنید که تقریب‌هایی که در این جا از آن صحبت کرده‌ایم، تقریب زدن با روش قطع کردن بوده است که در دوره راهنمایی با آن آشنا شده‌اید. در این روش تقریب زدن، مقدار تقریبی از مقدار واقعی کمتر است. می‌توان دید اگر به آخرین رقم آن یک واحد اضافه کنیم از مقدار واقعی بیشتر می‌شود. برای مثال، وقتی می‌گوییم $\sqrt{2}$ با دقت چهار رقم اعشار برابر $1/4142$ است، یعنی $1/4142 < \sqrt{2} < 1/4143$.

آسون در کلاس



۱- با توجه به تقریب‌های اعشاری $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ که در بالا داده شده است، مجموع $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ را با یک رقم اعشار حساب کنید و حاصل را با π که با دقت یک رقم اعشار نوشته شده است مقایسه کنید.

۲- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ را با دو رقم اعشار حساب کنید و آن را با عدد π که با دقت دو رقم اعشار نوشته شده است مقایسه کنید.

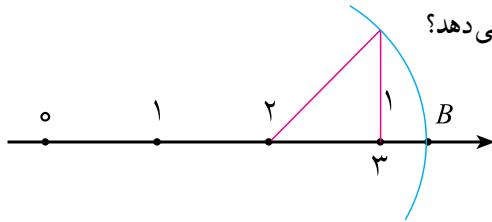
۳- آیا عدد π با مجموع $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ مساوی است؟

۴- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ را با سه رقم اعشار حساب کنید و آن را با عدد π که با دقت سه رقم اعشار نوشته شده است مقایسه کنید.

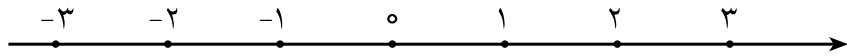


مسائل

۱- روی محور اعداد زیر، نقطه B چه عددی را نشان می دهد؟



۲- بر روی محور اعداد زیر، مکان هر یک از اعداد $\frac{2}{3}$ ، $-\frac{1}{4}$ ، $\frac{2}{4}$ و $\frac{5}{4}$ را مشخص کنید.



۳- اعداد $\sqrt{8}$ و $1-\sqrt{3}$ را روی محور بیابید.

۴- جدول زیر را کامل کنید و علامت اعداد مخالف صفر را تعیین کنید.

عدد	منفی	مثبت	صفر
$-\frac{2}{7}$			
$-\frac{2}{3}$			
$\frac{1}{2}$			
$1-\sqrt{2}$			
$(\frac{1}{2}-\frac{5}{2})$			
$\sqrt{3}-\sqrt{2}$			
$-(2-\sqrt{3})$			

۵- مقدار عبارت های زیر را در صورت امکان ساده کنید و بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$$|-2 \times (3-4)|, |\sqrt{3}-\sqrt{5}|, |1-\sqrt{2}|, |2-3 \times (1-2)|$$

۶- جدول روبه رو را کامل کنید.

عدد اعشاری	کسر	درصد
۰.۵۵	$\frac{55}{100}$	۵۵
۱/۲۵		
	$2\frac{1}{2}$	
	$\frac{3}{4}$	
	$\frac{4}{5}$	
		۸/۵
		۴۸

۷- در بین عددهای گویای زیر، عددهایی که اعشاری هستند را مشخص کنید و قسمت صحیح و قسمت اعشاری آن‌ها را بنویسید.

$$\frac{3}{7}, \frac{15}{6}, \frac{8}{5}, \frac{2}{3}$$

۸- حاصل هریک از عملیات زیر را به طور تقریبی به دست آورید. قبل از انجام عملیات، در صورت نیاز به نزدیکترین عدد مناسب، اعداد را گرد کنید.

الف) $3/9 \div 40/9$

ب) $69/3 \div 1/9$

ج) $(9/4 \times 2/35) \times 87/3$

د) $\frac{\sqrt{145} \times 7/96}{\sqrt{24}}$

۹- یک لکه روغن روی آب افتاده و به صورت دایره‌ای بزرگ می‌شود. لحظه‌ای می‌رسد که شعاع دایره برابر با ۴ سانتی متر شده و در لحظه‌ای بعد شعاع 2° سانتی متر افزایش می‌یابد. مساحت لکه چقدر افزایش می‌یابد؟ (مقدار π را برابر $3/14$ بگیرید.)

۱۰- دانش‌آموزی گفت: در جایی خوانده‌ام که برای حفظ تقریب اعشاری π تا ده رقم، می‌توان جمله زیر را حفظ کرد.

«خرد و بیشش و آگاهی دانشمندان ره سرمنزل مقصود بما آموزد»

به نظر شما چه ارتباطی بین این جمله و عدد π وجود دارد؟

ابوالحسن علی بن احمد نسوی

حکیم و ریاضی‌دان ایرانی است که در سال ۳۹۳ ق. در ری متولد شد. از خصوصیات او نقل می‌کنند که سیرتی نیکو داشت و به علم و هنر عشق می‌ورزید و مردی کریم، مهمان‌نواز، خوان‌گشاده، علم‌دوست و دانش‌گستر بود و در میان شاگردان و بزرگان زمان خود به استاد مختص معروف بود. از او ۱۱ اثر ریاضی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به اثر المقتع فی الحساب الهندی اشاره کرد که در آن به روش محاسبه با دستگاه شمارش اعشاری می‌پردازد که در آن هریک از ارقام بسته به مکانی که در آن قرار گرفته‌اند دارای ارزش اند و ارزش مکانی هر رقم نسبت به رقم سمت راست خود ده برابر است. مثلاً در دستگاه اعشاری $4, 52/4$ ، ۴ دارای ارزش مکانی دهم، ۲ دارای ارزش مکانی یکان و ۵ دهگان است که ارزش هر کدام ده برابر دیگری است. ایشان در زمینه هندسه و مثلثات نیز کارهای بسیار زیادی انجام داده‌اند. وی در سال ۴۷۲ ق. درگذشت.

برای آسان تر صحبت کردن در ریاضی، از نمادها استفاده می‌شود. مثلاً، تمام اعداد طبیعی را با کنار هم گذاردن نمادهایی که برای اعداد صفر تا نه انتخاب کرده‌ایم نمایش داده‌ایم. تمام اعداد صحیح را با استفاده از نمایش دهدهی اعداد طبیعی و علامت منفی « $-$ »، نمایش داده‌ایم. تمام اعداد گویا را با استفاده از نمایش اعداد طبیعی و علامت منفی و خط کسری نمایش داده‌ایم. اعمال جمع و ضرب را هم با نمادهای « $+$ » و « \times » و رابطه کوچک تری و بزرگ تری را با « $<$ » و « $>$ » نشان داده‌ایم.

سخن گفتن با استفاده از این نمادها را زبان ریاضی می‌نامیم. جملات در زبان ریاضی را به زبان فارسی نیز می‌توان بیان کرد. برای مثال، جمله فارسی زیر، خبری را در ریاضی بیان می‌کند:

«اگر به عدد پانزده، عدد دو را اضافه کنیم، حاصل آن هفده می‌شود.»

همین جمله را با استفاده از نمادها، به زبان ریاضی به شکل زیر می‌نویسیم:

$$15 + 2 = 17$$

عبارت بالا یک جمله ریاضی است که خبری را در مورد سه عدد ۱۵، ۲ و ۱۷ بیان می‌کند.



تمرین در کلاس

۱- جمله‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

(الف) حاصل جمع منفی دوازده و هجده، برابر شش است.

(ب) حاصل ضرب یک سوم در خودش برابر یک نهم است.

(ج) حاصل ضرب منفی یک در منفی سه به اضافه پنجاه، از پنجاه بزرگ تر است.

۲- جمله‌های ریاضی زیر را به زبان فارسی بنویسید.

$$(الف) 30 - 2 \times (3 + 12)$$

$$(ب) \frac{2}{5} - 2 = -\frac{8}{5}$$

$$(ج) -\frac{3}{2} \times \frac{2}{15} + 1 < \frac{13}{15}$$

برای سخن گفتن در مورد اعداد مشخص، از نمایش آن‌ها استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال، برای گفتن این که جمع یک دوم با خودش برابر یک است می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

اما اگر بخواهیم در مورد دسته‌ای از اعداد سخن بگوییم، آن را چگونه بنویسیم؟ فرض کنید می‌خواهیم بگوییم: «دو برابر هر عدد برابر است با جمع آن عدد با خودش.»

این جمله به معنای آن است که:

$$\begin{array}{ll} 1 & 1 & 2 \times 1 \\ 2 & 2 & 2 \times 2 \\ 3 & 3 & 2 \times 3 \\ 4 & 4 & 2 \times 4 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

همان‌طور که می‌بینید، این خاصیت مربوط به عدد خاصی نیست و برای همه اعداد برقرار است. اگر □ نشانه یک عدد دلخواه باشد، خاصیت بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\square \quad \square \quad 2 \times \square$$

اگر به جای □، هر عدد دلخواهی بگذاریم تساوی بالا برقرار می‌شود. در ریاضی معمولاً به جای استفاده از علامت □ از نمادهای حروف انگلیسی مانند a، b، c، ... استفاده می‌شود. به عنوان مثال، برای گفتن جمله «جمع هر عدد با خودش، مساوی با دو برابر همان عدد است.» می‌گوییم: عدد دلخواهی انتخاب کنید و آن را a بنامید، در این صورت:

$$a \quad a \quad 2 \times a$$

در جمله بالا، به جای حرف a از هر حرف دیگری هم می‌توانیم استفاده کنیم. برای مثال بالا می‌توانیم بگوییم: عدد دلخواهی انتخاب کنید و آن را x بنامید، در این صورت:

$$x \quad x \quad 2 \times x$$

هر دو این جملات یک چیز می‌گویند: جمع هر عدد با خودش، مساوی با دو برابر همان عدد است. بنا به قرارداد، ضرب یک عدد خاص مانند 2 در یک عدد دلخواه را که با یک نماد مانند a نشان داده شده است، به جای $2 \times a$ با $2a$ نشان می‌دهیم. این کار موجب سادگی نوشتن خواهد شد. به عنوان مثال:

$$3 \times a \quad 3a \quad (12) \times x \quad 12x \quad 1/7 \times z \quad 1/7z$$

به کمک نمادهایی که نشان‌دهنده یک عدد دلخواه هستند می‌توانیم خواصی از اعداد را که برای همه اعداد برقرارند راحت‌تر بیان کنیم.

مثال: برای بیان این که «حاصل جمع هر عدد با صفر برابر همان عدد می‌شود.»، می‌گوییم: عدد دلخواهی را

انتخاب کنید و آن را z بنامید، در این صورت

$$z \circ z$$

مثال: برای بیان این که «هر عددی که با یک جمع شود از آن عدد بزرگ تر می شود.» می گوییم: عدد دلخواهی را انتخاب کنید و آن را w بنامید، در این صورت:

$$w \quad 1 > w$$



تمرین در کلاس

۱- جمله های زیر را با استفاده از حروف انگلیسی که به عنوان نمادهای حرفی و نمادهای ریاضی به کار برده می شوند، بنویسید.

(الف) سه برابر هر عددی برابر است با سه بار جمع آن عدد با خودش.

(ب) ضرب هر عددی در صفر، صفر می شود.

(ج) تفاضل هر عدد از خودش برابر صفر می شود.

۲- جمله های ریاضی زیر را به زبان فارسی بنویسید.

(الف) $a \times a$ یا $a > a$

(ب) $x \times 1$ x

(ج) $4w$ $4 \times (1-w)$

(د) $x \times x$ $1 > x$

در بسیاری اوقات، می خواهیم مطلبی را در مورد دو عدد دلخواه بیان کنیم. در این موارد لازم است از دو نماد مختلف استفاده کنیم که هر کدام نشان دهنده عدد دلخواهی باشند.

مثال: برای بیان این که: «در جمع دو عدد، جمع اولی با دومی برابر است با جمع دومی با اولی»، می گوییم: دو عدد دلخواه انتخاب کنید و آن ها را x و y بنامید، در این صورت:

$$x \quad y \quad y \quad x$$

بنا به قرارداد برای نشان دادن ضرب دو عدد که با نمادهایی مانند a و b نشان داده شده اند، به جای $a \times b$ از ab استفاده می کنیم که ساده تر است.

ضرب یک عدد در خودش را مربع یا مجذور آن عدد می نامند.

مربع عدد a را با a^2 نشان می دهند. یعنی:

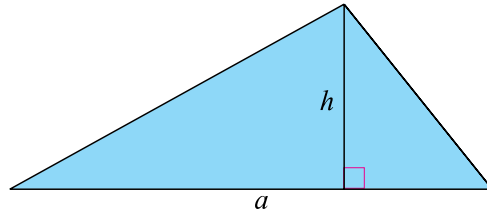
$$a \times a \quad aa \quad a^2$$

مثال : برای بیان این که : «در ضرب دو عدد، حاصل ضرب اولی در دومی برابر است با حاصل ضرب دومی در اولی.» می‌گوییم : دو عدد دلخواه انتخاب کنید و آن‌ها را x و y بنامید، در این صورت :

$$xy = yx$$

مثال : برای بیان این که : «مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول یک قاعده آن در ارتفاع نظیر آن قاعده.» می‌گوییم : یک مثلث دلخواه در نظر بگیرید و طول یک قاعده آن را a و ارتفاع نظیر آن قاعده را h بنامید، در این صورت :

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}ah$$



مثال : برای بیان این که : «حاصل ضرب دو عدد مثبت، عددی مثبت است.» می‌گوییم : دو عدد دلخواه مثبت انتخاب کنید و آن‌ها را x و y بنامید، در این صورت :

$$xy > 0$$

مثال : برای بیان این که : «حاصل جمع یک عدد مثبت با یک عدد دیگر، عددی بزرگ‌تر از عدد دوم می‌سازد.» می‌گوییم : دو عدد دلخواه انتخاب کنید و آن‌ها را z و w بنامید، فرض کنید $z > 0$ ، در این صورت :

$$z + w > w$$

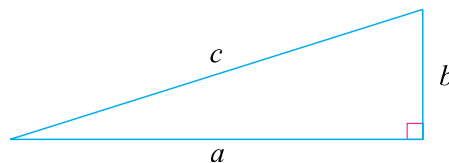
در موارد بسیاری لازم می‌شود که مطلبی را دربارهٔ سه عدد دلخواه بیان کنیم. در این حالت باید از سه نماد برای نشان دادن سه عدد دلخواه استفاده کنیم.

مثال : برای بیان این که «در جمع سه عدد، ترتیب جمع کردن به صورت جمع عدد اول با عدد دوم و سپس جمع با عدد سوم، یا جمع عدد دوم با عدد سوم و سپس جمع با عدد اول تغییری در نتیجه ایجاد نمی‌کند.» می‌گوییم : برای سه عدد x ، y و z ، داریم :

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

مثال : طبق قضیهٔ فیثاغورس «در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع طول وتر برابر است با مجموع مربعات طول دو ضلع دیگر.»، برای بیان این قضیه به زبان ریاضی، می‌گوییم : اگر طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه را a و b و c نشان دهیم و c طول وتر باشد، داریم :

$$a^2 + b^2 = c^2$$



به تساوی زیر توجه کنید :

$$12 \times 23 = (12 \times 5) + (12 \times 18)$$

این تساوی نشان می‌دهد که برای محاسبه حاصل ضرب ۱۲ در مجموع دو عدد ۵ و ۲۳ می‌توانستیم ابتدا ضرب ۱۲ در ۵ و سپس ضرب ۱۲ در ۲۳ را انجام دهیم و حاصل‌ها را با هم جمع کنیم. این ویژگی خاص اعداد ۱۲، ۵ و ۲۳ نیست و برای اعداد دیگر هم می‌توانیم این عمل را انجام دهیم. این ویژگی را «خاصیت پخشی» عمل ضرب نسبت به عمل جمع می‌نامند. در فعالیت زیر درستی این ویژگی را به طور هندسی بررسی می‌کنیم.



فعالیت

- ۱- مستطیلی رسم کنید و طول و عرض آن را با x و y نشان دهید.
- ۲- مستطیل دیگری رسم کنید که طول آن همان x ولی عرض آن عدد دیگری مانند z باشد.
- ۳- دو مستطیل بالا را به گونه‌ای کنار هم قرار دهید که یک مستطیل بزرگ‌تر ساخته شود.
- ۴- مساحت هر یک از این دو مستطیل و مستطیل بزرگ‌تر ساخته شده را برحسب نمادهای انتخاب شده بنویسید.
- ۵- مساحت مستطیل بزرگ‌تر ساخته شده برابر مجموع مساحت‌های دو مستطیل اول است. این مطلب را با استفاده از نمادهای انتخاب شده بنویسید.
- ۶- رابطه به دست آمده بین اعداد مثبت x ، y و z را به زبان فارسی بیان کنید.

برای سه عدد x ، y و z داریم: $x(y+z) = xy + xz$

اگر هر طرف تساوی بالا را داشته باشیم، می‌توانیم طرف دیگر را به دست آوریم. اگر ابتدا سمت چپ تساوی را داشته باشیم و سپس سمت راست تساوی را به دست آوریم، آن را «پخش کردن عمل ضرب روی عمل جمع» می‌نامند. اگر برعکس، ابتدا سمت راست تساوی را داشته باشیم، سپس سمت چپ تساوی را به دست آوریم، آن را «فاکتورگیری» می‌نامند و در این حالت در تساوی بالا می‌گوییم از x فاکتور گرفته‌ایم.



مستطیلی رسم کنید و روی طول آن یک نقطه انتخاب کنید. این نقطه، طول مستطیل را به دو پاره خط تقسیم می کند. طول این پاره خط ها را x و y و عرض این مستطیل را z بنامید.

۱- تساوی $z(x + y) = zx + zy$ را روی شکل نشان دهید.

۲- روی عرض این مستطیل نیز نقطه ای انتخاب کنید. این نقطه هم، عرض مستطیل را به دو قسمت تقسیم می کند. طول این دو قسمت را با a و b نشان دهید و رابطه بین a ، b و z را بنویسید.

۳- تساوی $z(x + y) = zx + zy$ را بر حسب a و b بنویسید.

۴- درستی تساوی های زیر را در مستطیل رسم شده نشان دهید.

$$(a + b)(x + y) = a(x + y) + b(x + y) \quad (a + b)x = (a + b)y \quad ax + ay = bx + by$$

بنا به قرارداد، در عبارت هایی که عملیات جمع و ضرب انجام می شود، اگر ترتیب عملیات با پرانتز مشخص نشده باشد، ابتدا عملیات ضرب و تقسیم به ترتیب از چپ به راست انجام می شود، سپس عملیات جمع یا تفریق به ترتیب از چپ به راست انجام خواهد شد.

مثال: در عبارت $4 \times 3 + 23 - 41 \times 2$ ابتدا ضرب 4×3 در 3 و سپس ضرب 41 در 2 انجام می شود و دربی آن عبارت $12 + 23 - 82$ ساخته می شود. سپس تفریق $23 - 82$ انجام می شود و حاصل آن با 82 جمع می شود.
مثال: در عبارت $12 - 4 \times 5 \div 2 + 1$ ابتدا ضرب 4×5 در 5 محاسبه و حاصل آن بر 2 تقسیم می شود که برابر 10 است. سپس تفریق $10 - 12$ انجام می شود که حاصل (-2) است و آخر، تفریق 1 از (-2) انجام می شود که حاصل (-3) است.



ترتیب عملیات را در عبارت های زیر تعیین کنید.

۱) $2 + 3 - 5$

۲) $1 + 4 \times 6 - 3 + 5 \times 12$

۳) $5 - 4 \div 2 + 14 \div 2 \times 7$

۴) $x + yz$

۵) $a + bx + c(x + a)$

۶) $ab + cd + 2(x + 1)$



مسائل

۱- در جمله‌های زیر، حروف a ، x و w ، نشان‌دهنده اعداد دلخواهی هستند. این جمله‌ها را به کوتاه‌ترین شکل به فارسی بنویسید.

(الف) $(a+x)(a-x) a^2 x^2$

(ب) $(aw)^2 a^2 w^2$

(ج) فرض کنید $a < 1$ ، در این صورت $a^2 < 1$.

(د) فرض کنید $a < 0$ و $x < 0$ و $a^2 x^2$ ، در این صورت $a x$.

(ه) فرض کنید aw ، در این صورت a یا w .

۲- برای مقادیر زیر که برحسب اعداد دلخواه a و b نوشته شده‌اند، مثال هندسی بیاورید.

(الف) a^2

(ب) $2a \quad 2b$

(ج) $a^2 \quad b^2 \quad 2ab$

(د) $\frac{1}{2}(a+b)$

۳- چهار عدد مثبت دلخواه را با a ، b ، c و z نشان داده‌ایم، با رسم یک شکل نشان دهید $z(a+b+c) = za + zb + zc$. بدون استفاده از شکل نیز درستی همین تساوی را نشان دهید.

۴- عبارت‌های زیر را با فاکتورگیری به شکل حاصل ضرب درآورید.

$xa \quad xb \quad , \quad x^2a \quad x^2b \quad , \quad zy \quad xy \quad , \quad ab^2 \quad cb^2 \quad , \quad a^2x^2 \quad ax^2 \quad , \quad x^2 \quad x$

۵- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$6 \div 2 \times 3$$

$$6 \quad 6(3 \quad 3 \times 2)$$

$$\frac{4\frac{1}{3} - 2\frac{2}{2}}{2 + \frac{-2}{3} - 2\frac{1}{3}} =$$

