فصل هفتم

ماتریس و دترمینان

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود :

۱ــ ماتریس، انواع وکاربردهای آن را بیان کند و جبر ماتریس‌ها را نشان دهد.

۲ــ جمع ماتریس‌ها، خصوصیّات آن‌ها، ضرب ماتریس در عدد و کاربرد آن را توضیح دهد.

۳ ــ ضرب ماتریس‌ها و کاربرد آن‌را انجام دهد.

۴ــ دترمینان را تعریف و مقدار آن‌را محاسبه کند و خواصّ آن‌را توضیح دهد.

۵ ــ معکوس ماتریس دو در دو و سه در سه و کاربرد آن‌را در مسائل انجام دهد.

۷ــ ماتریس و دترمینان

مقدمه

برای فهم ساده‌تر ریاضیّات ، گاهی از نمادها و قراردادهایی استفاده می‌شود. از آن‌جمله ماتریس است که به ما در حلّ بسیاری از مشکلات کمک کند.

مثلاً برای به حداکثر رساندن سود یک شرکت، با توجه به محدودیت‌هایی، مثل نیروی انسانی،ساعت کار،اعتبارات بانکی،مواد اولیه،عرضه و تقاضا، می‌توان از ماتریس استفاده کرد یا برای به حداقل رساندن هزینه‌ی یک بیمارستان یا یک مؤسسه دولتی ماتریس و معکوس ماتریس به‌کار می‌رود. امروزه در اکثر بنگاه‌های خصوصی و دولتی از برنامه‌ریزی خطی، سیمپلکس، ماتریس تصمیم‌گیری و مدل شبکه، مدل تخصیصی کار و حمل و نقل، که الفبای همه‌ی آن‌ها ماتریس است، استفاده فراوان می‌گردد.

برای مثال، فرض کنید شرکت نفت ایران سه انبار در محل‌های A، B و C دارد و سه پمپ بنزین باید از طریق این انبارها تغذیه شوند. اگر P_1 ، P_2 و P_3 پمپ‌های بنزین باشند و فاصله‌ی آن‌ها تا انبارهای مزبور به‌شرح زیر باشد :

فاصله‌ی A تا P_1 ۴۰ کیلومتر است

فاصله‌ی A تا P_2 ۲۵ کیلومتر است

فاصله‌ی A تا P_3 ۲۰ کیلومتر است

فاصله‌ی B تا P_1 ۳۰ کیلومتر است

فاصله‌ی B تا P_2 ۱۵ کیلومتر است

فاصله‌ی B تا P_3 ۳۵ کیلومتر است

فاصله‌ی C تا P_1 ۱۵ کیلومتر است

فاصله‌ی C تا P_2 ۳۰ کیلومتر است

فاصله‌ی C تا P_3 ۴۵ کیلومتر است

این اطلاعات را می‌توانیم در کروشه‌ای به‌این شکل نشان دهیم. در بعضی از کتاب‌ها به‌جای کروشه از پرانتز هم استفاده می‌گردد.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۴۰ & ۲۵ & ۲۰ \\ ۳۰ & ۱۵ & ۳۵ \\ ۱۵ & ۳۰ & ۴۵ \end{bmatrix} \end{array}$$

محلّ تلاقی خطوط افقی و قایم، فاصله‌ی انبار تا پمپ بنزین را نشان می‌دهد.

این آرایه‌ی اعداد مثالی از یک ماتریس است. به آرایه‌ای از اعداد در شکل زیر دقّت کنید. هرکدام از این آرایه‌ها را یک ماتریس می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۰ & ۴\\ ۲ & ۲ & ۵\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۲ & ۴\\ ۳ & ۵ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

نام هر ماتریس را با حروف بزرگ الفبای لاتین نشان می‌دهند مانند ماتریس A، B،C، D، E و . . . .

۱ــ۷ سطر یک ماتریس

هریک از اعداد داخل کروشه را یک درایه‌ی یا یک عضو ماتریس می‌نامند.

درایه‌هایی را که در امتداد یک خطّ افقی قرار گیرند، یک سطر ماتریس می‌نامند. مانند ۶، ۵، ۲، یا ۱، ۲، ۰ یا ۳، ۰، ۱ در ماتریس A.

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۵ & ۶\\ ۰ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$$

۲ــ۷ ستون یک ماتریس

درایه‌هایی را، که در امتداد یک خطّ قایم قرار گیرند، یک ستون ماتریس می‌نامند، مانند $\begin{smallmatrix}۲\\۰\\۱\end{smallmatrix}$ یا $\begin{smallmatrix}۵\\۲\\۰\end{smallmatrix}$ یا $\begin{smallmatrix}۶\\۱\\۳\end{smallmatrix}$ در همان ماتریس A.

بنابراین، این ماتریس دارای ۳ سطر و ۳ ستون است.

بدیهی است ۶، ۵، ۲ را سطر اوّل، ۱، ۲، ۰ را سطر دوم و ۳، ۰، ۱ را سطر سومِ ماتریس می‌نامند.

هم‌چنین $\begin{smallmatrix}۲\\۰\\۱\end{smallmatrix}$ را ستون اوّل، $\begin{smallmatrix}۵\\۲\\۰\end{smallmatrix}$ را ستون دوم و $\begin{smallmatrix}۶\\۱\\۳\end{smallmatrix}$ را ستون سوم می‌نامند.

به ماتریسی مانند A، که m سطر و n ستون داشته باشد، یک ماتریس m در n گفته می‌شود و آن‌را به‌صورت $A_{m\times n}$ نشان می‌دهند.

مثال ۱ـــ ماتریس

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc}\text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم}\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{سطر اوّل} \\ A = \\ \text{سطر دوم}\end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

را یک ماتریس ۲ در ۳ می‌نامند. $A_{2\times 3}$

مثال۲ـــ ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس یک در چهار است. $B_{1\times 4}$

۳ـــ۷ آدرس درایه

هر درایه معمولاً با حرف کوچک الفبای لاتین نشان داده می‌شود.

به‌علاوه آدرس هر درایه را به‌صورت اندیس در کنار آن می‌نویسیم.

رقم سمت چپ نشان‌دهنده‌ی سطر درایه و رقم سمت راست آن نشان‌دهنده‌ی ستون درایه است. به‌عبارت دیگر آدرس هر درایه عبارت است از سطر و ستونی که آن درایه در ماتریس دارد.

مثال ۳ـــ در ماتریس A، که یک ماتریس ۳×۲ است، آدرس درایه‌ی ۳ را مشخّص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad a_{12} = 3$$

به‌طورکلّی، هر درایه به‌صورت a_{ij} نشان‌داده می‌شود که نشان‌دهنده‌ی درایه‌ی سطر iام و ستون jام ماتریس است.

i و j از اعداد طبیعی هستند.

۴ـــ۷ قطر اصلی ماتریس مربّع

اگر در یک ماتریس، در درایه‌هایی که در آن i=j باشد دقّت کنیم، مشخّص می‌شود که همگی این درایه‌ها روی یک خط راست قرار گرفته‌اند و آن را قطر اصلی ماتریس مربع می‌نامند.

مثال ۴ ـــ در ماتریس مربّع ۴×۴

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

a_{11} ، a_{22}، a_{33} و a_{44} قطر اصلی را تشکیل می‌دهند که به ترتیب عبارت‌اند از : ۱، ۲، ۲و۳.

توضیح : دو درایه از دو ماتریس را زمانی متناظر گویند که آدرس آن‌ها (محل سطر و ستون) یکی باشد.

۵ــ۷ انواع ماتریس‌ها

۱ــ۵ــ۷ ماتریس صفر: به ماتریسی که کلیّه درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس صفر گویند.

مثال ۵ــ ماتریس A و B و C نمونه‌ای از ماتریس صفر هستند.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} ۰ \end{bmatrix}$$

۲ــ۵ــ۷ ماتریس مربع: اگردر یک ماتریس $m\times n$ داشته باشیم $m=n$ ، این ماتریس را ماتریس مربّع مرتبه n یا m گویند. به عبارت دیگر، ماتریس مربع ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابر باشند.

مثال ۶ ــ ماتریس $C_{۲\times۲}$ یک ماتریس مربّع است.

$$C=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

مثال ۷ ــ ماتریس $D_{۳\times۳}$ یک ماتریس مربّع است.

$$D=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۳ــ۵ــ ۷ ماتریس سطری: اگر در یک ماتریس $m\times n$ داشته باشیم $m=۱$ ، این ماتریس را ماتریس سطری می‌نامند.

مثال ۸ ــ ماتریس E را یک ماتریس سطری گویند.

$$E=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

۴ــ۵ــ۷ ماتریس ستونی: اگر در یک ماتریس $m\times n$ داشته باشیم $n=۱$ ، این ماتریس را ماتریس ستونی می‌نامند.

مثال ۹ ــ ماتریس F را یک ماتریس ستونی می‌نامند.

$$F=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

۵ـ۵ـ۷ ماتریس بالا مثلثی: به ماتریس مربعی که در آن کلیه‌ی درایه‌های زیر قطر اصلی صفر باشند ماتریس بالا مثلثی می‌گویند.

مثال ۱۰ ـ ماتریس M را یک ماتریس بالامثلثی گویند.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۶ـ۵ـ۷ ماتریس پایین مثلثی: به ماتریس مربعی که در آن کلیه‌ی درایه‌های بالای قطر اصلی صفر باشند ماتریس پایین مثلثی گویند.

مثال ۱۱ ـ ماتریس N را یک ماتریس پایین مثلثی گویند.

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۷ ـ۵ـ۷ ماتریس قطری: به ماتریس مربّعی که درایه‌های آن به‌جز درایه‌های روی قطر اصلی صفر باشند، ماتریس قطری گویند، مانند ماتریس B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۸ـ۵ـ۷ ماتریس واحد: یک ماتریس قطری است که کلیه درایه‌های روی قطر اصلی آن یک باشد. به ماتریس واحد، ماتریس یکانی نیز گفته می‌شود. معمولاً ماتریس واحد (یکانی) را با I_n نشان می‌دهند که در آن n تعداد سطرها یا ستون‌های ماتریس است، مانند ماتریس I_3 .

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۶ـ۷ ماتریس ترانهاده یا برگردان

هرگاه جای تمام سطرها و ستون‌های یک ماتریس مانند A را با هم عوض کنیم ماتریس جدیدی به‌دست می‌آید که آن را ماتریس ترانهاده‌ی ماتریس A می‌نامند و به صورت A' یا (A^t) نمایش داده می‌شود.

مثال ۱۲ ــ ترانهاده یا برگردان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۳ & ۲ \\ ۶ & ۷ & ۸ & ۵ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

$$A^t = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۸ & ۳ \\ ۷ & ۱ \\ ۶ & ۴ \end{bmatrix} \text{ یا } A'$$

۷ــ۷ دو ماتریس مساوی

دو ماتریس را زمانی مساوی یکدیگر گویند که اولاً تعداد سطرها، ثانیاً تعداد ستون‌ها، ثالثاً درایه‌های متناظر هر دو ماتریس مساوی باشند، یعنی $a_{۱۱}=b_{۱۱}$ و $a_{۱۲}=b_{۱۲}$ و $a_{۲۲}=b_{۲۲}$ و $a_{۲۱}=b_{۲۱}$ و ....

مثال ۱۳ ــ دو ماتریس A و B با هم مساوی هستند ؛ زیرا

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} \frac{۶}{۳} & \frac{۳}{۳} \\ ۲\times ۲ & \frac{۹}{۳} \end{bmatrix}$$

هر دو ماتریس ۲×۲ می‌باشند و درایه‌های متناظر با هم مساوی هستند.

$$۱=\frac{۳}{۳} \qquad ۲=\frac{۶}{۳}$$
$$۳=\frac{۹}{۳} \qquad ۴=۲\times ۲$$

۸ــ۷ جمع ماتریس‌ها

باید توجّه داشت دو ماتریس درصورتی می‌توانند با هم جمع شوند که تعداد سطرها و ستون‌های هر دو با هم مساوی باشند. درغیر این‌صورت، نمی‌توان آن‌ها را با هم جمع نمود.

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}$$

حاصل مجموع دو ماتریس، خود یک ماتریس است.

مثال ۱۴ ــ ماتریس A ، که دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، با ماتریس B که آن نیز دارای

۲ سطر و ۳ ستون است، قابل جمع کردن هستند، ولی ماتریس A با C را نمی‌توان جمع نمود، زیرا ماتریس C، دارای ۳ سطر و ۳ ستون است.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

اگر دو ماتریس A و B، $m\times n$ باشند، مجموع آن‌ها نیز یک ماتریس $m\times n$ مانند C است، به‌طوری که هر درایه‌ی آن مساوی مجموع درایه‌های متناظرش در A و B است.

مثال ۱۵ ــ مجموع دو ماتریس A و B را به‌دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \; B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} ۱+۳ & ۲+۱ & ۳+۲ \\ ۲+۱ & ۰+۰ & ۱+۲ \end{bmatrix}$$

چون هر دو ماتریس ۳×۲ می‌باشند، پس جمع آن‌ها شدنی است و نتیجه، ماتریس C می‌شود که یک ماتریس ۳×۲ است.

$$C=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

مثال ۱۶ــ شرکتی انواع کولر را با حجم‌های کوچک، متوسّط و بزرگ در مدل‌های عادی و لوکس تولید می‌نماید. اگر تولید آن در شش ماهه‌ی اوّل و دوم سال به‌ترتیب جدول زیر باشد، تعیین کنید شرکت در یک‌سال چند کولر با حجم‌ها و انواع مختلف تولید می‌کند.

	شش ماهه‌ی اوّل		شش ماهه‌ی دوم	
حجم کولر	**نوع عادی**	**نوع لوکس**	**نوع عادی**	**نوع لوکس**
کوچک	۲۷۰۰	۲۰۰۰	۱۴۰۰	۱۶۰۰
متوسط	۴۳۰۰	۴۱۰۰	۲۱۰۰	۲۰۰۰
بزرگ	۵۲۰۰	۱۵۰۰	۴۰۰۰	۱۱۰۰۰

$$A+B=C$$

ماتریس A را تولید در شش‌ماهه‌ی اوّل و ماتریس B را تولید در شش‌ماهه‌ی دوم سال فرض می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۲۰۰۰ & ۲۷۰۰ \\ ۴۱۰۰ & ۴۳۰۰ \\ ۱۵۰۰ & ۵۲۰۰ \end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix} ۱۶۰۰ & ۱۴۰۰ \\ ۲۰۰۰ & ۲۱۰۰ \\ ۱۱۰۰ & ۴۰۰۰ \end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix} ۳۶۰۰ & ۴۱۰۰ \\ ۶۱۰۰ & ۶۴۰۰ \\ ۲۶۰۰ & ۹۲۰۰ \end{bmatrix}$$

درنتیجه ماتریس C، که مجموع A و B است، تولید کولر در یک سال را مشخّص می‌نماید.

مثال ۱۷ــ ماتریس A و B را با هم جمع کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

به‌دلیل این‌که تعداد سطر و ستون دو ماتریس با هم یکی نیست، پس جمع آن‌ها امکان‌پذیر نیست.

۹ــ۷ ضرب عدد حقیقی درماتریس

اگر k عددی حقیقی و A ماتریس $m\times n$ باشد، حاصل‌ضرب k در A ماتریسی خواهد بود $m\times n$ ، که کلیّه‌ی درایه‌های آن برابر با درایه‌های ماتریس A ضربدر k است.

$$k\times A=k\times\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال ۱۸ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌ضرب عدد ۵ را در A بیابید.

$$۵\times A=۵\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ \\ ۰ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

مثال ۱۹ــ فرض کنید فروش فروردین ماه ۳ نوع محصول شرکت ایران خودرو (سمند، پژو۲۰۶ و پارس) در شهر تهران و اصفهان به‌صورت زیر است :

$$\begin{array}{ccc} & \text{پارس} & \text{پژو ۲۰۶} & \text{سمند} \\ F= & \left[\begin{array}{ccc} ۱۱۰ & ۷۰ & ۹۰ \\ ۶۰ & ۱۰۰ & ۱۴۰ \end{array}\right] & \begin{array}{c}\text{تهران}\\ \text{اصفهان}\end{array} \end{array}$$

اگر پیش‌بینی شود، فروش این شرکت در اردیبهشت ماه ۱۰٪ افزایش یابد، ارقام مربوط به

میزان فروش ماه اردیبهشت این شرکت در ۲ شهر تهران و اصفهان را به‌صورت ماتریس بنویسید.

$$\underset{\text{فروش اردیبهشت}}{F_{۲}} = \underset{\text{فروش فروردین}}{F_{۱}} + \underset{\text{۱۰٪ افزایش فروش}}{۰/۱F_{۱}} = ۱/۱F_{۱} = ۱/۱\begin{bmatrix} ۱۱۰ & ۷۰ & ۹۰ \\ ۶۰ & ۱۰۰ & ۱۴۰ \end{bmatrix}$$

$$F_{۲} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{سمند} & \text{پژو ۲۰۶} & \text{پارس} \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۱۲۱ & ۷۷ & ۹۹ \\ ۶۶ & ۱۱۰ & ۱۵۴ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{تهران} \\ \text{اصفهان} \end{array}$$

۱۰ــ۷ ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی

برای درک بهتر موضوع به مثال زیر توجّه کنید.

مثال ۲۰ــ درسال گذشته، شرکتی سه نوع کولر رومیزی، آبی و گازی را به تعداد ۵,۰۰۰، ۴,۰۰۰ و ۳,۰۰۰ به‌فروش رسانده است. اگر قیمت هر دستگاه کولر به‌ترتیب برابر با ۱۴۰,۰۰۰، ۲۵۰,۰۰۰ و ۳۰۰,۰۰۰ ریال باشد، فروش شرکت را در سال قبل تعیین کنید.

تعداد کولرها را می‌توان با یک ماتریس سطری A نمایش داد.

$$A_{۱\times۳} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{رومیزی} & \text{آبی} & \text{گازی} \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۵,۰۰۰ & ۴,۰۰۰ & ۳,۰۰۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

هم‌چنین، بهای فروش هر دستگاه را می‌توان با یک ماتریس ستونی نشان داد.

$$B_{۳\times۱} = \begin{bmatrix} ۱۴۰,۰۰۰ \\ ۲۵۰,۰۰۰ \\ ۳۰۰,۰۰۰ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{بهای کولر رومیزی} \\ \text{بهای کولر آبی} \\ \text{بهای کولر گازی} \end{array}$$

حاصل ضرب این دو ماتریس برابر است با :

$$A\times B = \begin{bmatrix} ۵,۰۰۰ & ۴,۰۰۰ & ۳,۰۰۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱۴۰,۰۰۰ \\ ۲۵۰,۰۰۰ \\ ۳۰۰,۰۰۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۵,۰۰۰\times۱۴۰,۰۰۰ + ۴,۰۰۰\times۲۵۰,۰۰۰ + ۳,۰۰۰\times۳۰۰,۰۰۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۷۰۰,۰۰۰,۰۰۰ + ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ + ۹۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲,۶۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \end{bmatrix}$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، اوّلین درایه‌ی ماتریس سطری را در اوّلین درایه‌ی ماتریس ستونی، سپس دومین درایه‌ی ماتریس سطری را در دومین درایه‌ی ماتریس ستونی و بالأخره سومین درایه‌ی ماتریس سطری را در سومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم. سرانجام حاصل‌ضرب‌های به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم تا نتیجه، که یک ماتریس ۱×۱ است، به‌دست آید.

دقّت کنید که ضرب یک ماتریس سطری A، در یک ماتریس ستونی B فقط وقتی شدنی است که تعداد ستون‌های ماتریس A مساوی با تعداد سطرهای ماتریس B باشد.

بنابراین، اگر A یک ماتریس n×۱ و B یک ماتریس ۱×n باشد، برای پیدا کردن حاصل‌ضرب A×B به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

اوّلین درایه‌ی ماتریس سطری را در اوّلین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم. سپس دومین درایه‌ی ماتریس سطری را در دومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم. پس از آن سومین درایه‌ی ماتریس سطری را در سومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم و بالأخره آخرین درایه‌ی ماتریس سطری را در آخرین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم.

حاصل‌ضرب‌های به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم تا نتیجه حاصل گردد.

مثال ۲۱

$$\underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}(2\times 1)+(3\times 2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\end{bmatrix}=8$$

مثال ۲۲

$$A\times B=\underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}=$$

چون ماتریس A، ۳×۱ و ماتریس B، ۱×۲ است، لذا ضرب آن‌ها عملی نیست.

۱۱ــ۷ ضرب ماتریس‌ها

اگر دو ماتریس A و B مفروض باشند، تنها شرطی که بتوان ماتریس A را در ماتریس B ضرب نمود (A×B)، این است که تعداد ستون‌های ماتریس A برابر با تعداد سطرهای ماتریس B باشد.

اگر ماتریس A یک ماتریس m×p و B یک ماتریس p×n باشد، برای به‌دست آوردن ماتریس

$A\times B$ که یک ماتریس $m\times n$ خواهد بود به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

اوّلاً، ماتریس B را به n ماتریس ستونی تجزیه می‌کنیم. ثانیاً، ماتریس A را طبق روش قبلی در هریک از این ماتریس‌های ستونی ضرب می‌نماییم. ثالثاً، ضرب‌های به‌دست آمده را که به‌صورت ماتریس‌های ستونی هستند از چپ به راست ستون‌های اوّل تا nام ماتریس حاصل‌ضرب قرار می‌دهیم.

مثال ۲۳ـــ حاصل‌ضرب $A\times B$ را پیدا کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱\times ۲+۲\times ۴ & ۱\times ۳+۲\times ۱ \\ ۳\times ۲+۴\times ۴ & ۳\times ۳+۴\times ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۵ \\ ۲۲ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

چون هر دو ماتریس ۲×۲ هستند، پس ضرب آن‌ها شدنی است ونتیجه، یک ماتریس ۲×۲ خواهد بود.

در این مثال می‌توان $B\times A$ را محاسبه نمود. چون هر دو ماتریس ۲×۲ هستند.

ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$A\times B\neq B\times A$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲\times ۱+۳\times ۳ & ۲\times ۲+۳\times ۴ \\ ۴\times ۱+۱\times ۳ & ۴\times ۲+۱\times ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۱ & ۱۶ \\ ۷ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & ۵ \\ ۲۲ & ۱۳ \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} ۱۱ & ۱۶ \\ ۷ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌شود حاصل‌ضرب $A\times B$ با $B\times A$ برابر نیست.

مثال ۲۴ـــ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$ مفروض است. حاصل‌ضرب $A\times B$ را پیدا کنید.

چون تعداد ستون‌های ماتریس A برابر با تعداد سطرهای ماتریس B است، پس این ضرب شدنی است.

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$۲\times ۲\leftrightarrow ۲\times ۳$$

زیرا $۲=۲$

ستون اوّل حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times۱+۳\times۲ \\ ۰\times۱+۵\times۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$

ستون دوم حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times۳+۳\times۴ \\ ۰\times۳+۵\times۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۸ \\ ۲۰ \end{bmatrix}$

ستون سوم حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times۵+۳\times۶ \\ ۰\times۵+۵\times۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۸ \\ ۳۰ \end{bmatrix}$

به‌طورخلاصه $A\times B = \begin{bmatrix} ۸ & ۱۸ & ۲۸ \\ ۱۰ & ۲۰ & ۳۰ \end{bmatrix}$

دقّت کنید که در این مثال $B\times A$ را نمی‌توان محاسبه نمود ؛ زیرا

$۲ \neq ۳$

$$\underset{۲\times۳ \leftrightarrow ۲\times۲}{B\times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}}$$

۱۲ــ۷ تفریق ماتریس‌ها

تفریق ماتریس‌ها نیز مانند جمع آن‌هاست، با درنظر گرفتن این مطلب که تفریق حالت خاصی از جمع است، لذا برای انجام عمل تفریق $A-B$ ، که در آن A و B دو ماتریس هم مرتبه‌ی دل‌خواه‌اند، در ابتدا تمام اعضای ماتریس B را در ۱− ضرب می‌کنیم و سپس عمل جمع $A+(-B)$ را انجام می‌دهیم.

مثال ۲۵ــ اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

و

$$B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

باشد، آن‌گاه $A-B$ را محاسبه کنید.

$$(-۱)\times B = -B = \begin{bmatrix} -۳ & -۲ & -۳ \\ -۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۳ & -۲ & -۳ \\ -۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۵-۳ & ۳-۲ & ۲-۳ \\ ۰-۲ & ۱-۱ & ۴-۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ -۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱۳ــ۷ دترمینان

فقط برای ماتریس مربّع می‌توان عددی به‌نام دترمینان به‌دست آورد و برای ماتریس‌هایی که سطر و ستون آن‌ها مساوی نباشد، محاسبه‌ی دترمینان امکان ندارد. دترمینان ماتریس مربّع A، که $n\times n$ است، به‌صورت $|A|$ نمایش داده می‌شود. اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۲×۲ باشد، عدد حقیقی $|A|$ برابر با $ad-bc$ را دترمینان ماتریس A می‌نامیم.

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد، دترمینان A را به شکل زیر محاسبه می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

روشن است که برای محاسبه‌ی دترمینان، ابتدا درایه‌ی $a_{۱۱}$ را در دترمینان ماتریس A با حذف سطر اوّل و ستون اوّل آن ضرب می‌کنیم. سپس، منفی درایه‌ی $a_{۱۲}$ را در دترمینان ماتریس A، با حذف سطر اوّل و ستون دوم آن ضرب می‌کنیم و بالأخره درایه‌ی $a_{۱۳}$ را در دترمینان ماتریس A، با حذف سطر اوّل و ستون سوم آن ضرب می‌نماییم تا از حاصل جمع این سه‌عدد، دترمینان A به‌دست آید.

$$|A|=a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg)$$

$$=aei-afh-bdi+bfg+cdh-ceg$$

مثال ۲۶ـــ دترمینان ماتریس A را به‌دست آورید.

$$|A|=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}=۱\times\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix}-۳\times\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}+۲\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix}=$$

$$۱\times(۶-۰)-۳\times(۴-۱)+۲\times(۰-۳)=۶-۹-۶=-۹$$

اگر A یک ماتریس ۴×۴ باشد، برای پیدا کردن دترمینان A با توجّه به مطالبی که گفته شد، به‌شرح زیر عمل می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}=a\times\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix}+$$

$$c\times\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix}-d\times\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

دقت کنید که علامت ضریب a_{ij} با استفاده از دستور $(-۱)^{i+j}$ به‌دست آمده است.

به‌طورکلّی، برای پیدا کردن دترمینان A، که یک ماتریس $n\times n$ است، به این صورت عمل می‌کنیم.

$$|A|=|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{۱۱}\ldots a_{۱j}\ldots . a_{۱n} \\ a_{n۱}\ldots a_{nj}\ldots . a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\,\hat{A}_{ij}$$

در این رابطه a_{ij} عبارت از درایه‌ی یک سطر یا یک ستون از ماتریس A است و $\hat{A}_{ij}$ را هم‌سازه‌ی (کوفاکتور یا زیر ماتریس) درایه‌ی a_{ij} گویند.

بنابراین، دترمینان ماتریس A عبارت است از حاصل‌ضرب داخلی درایه‌ی یک سطر با یک ستون ماتریس A در هم‌سازه‌های $\hat{A}_{ij}$.

مقدار $\hat{A}_{ij}$ برابر با $(-۱)^{i+j}$ ضربدر دترمینان ماتریس حاصل از A با حذف سطر i و ستون jام است.

مثال ۲۷ــ دترمینان ماتریس B را که ۴×۴ است، پیدا کنید.

$$B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |B|=\begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۰ & -۳ \end{vmatrix}$$

$$=-۱\times\begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{vmatrix}-۲\times\begin{vmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۳ \end{vmatrix}+۰\times\begin{vmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۳ \end{vmatrix}-۰\times\begin{vmatrix} ۰ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$=-۱\times\begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{vmatrix}-۲\times\begin{vmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۳ \end{vmatrix}+۰+۰$$

سپس دترمینان‌های مرتبه‌ی ۳ را برحسب ستون‌های اوّل آن‌ها بسط می‌دهیم.

$$|B|=(-۱)(-۱)\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & -۳ \end{vmatrix}+(-۲)(۱)\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}=$$

$$۱(۳-۰)-۲(۴+۱)=۳-۱۰=-۷$$

۱ــ۱۳ــ۷ ماتریس الحاقی: فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]$ یک ماتریس مربع $M\times M$ باشد. آن‌گاه بنا بر تعریف، ماتریس الحاقی برای ماتریس مربع A، که با adj.A نمایش داده می‌شود، عبارت است از برگردان ماتریس حاصل از A، به‌طوری که در آن به‌جای عناصر a_{ij} ، هم‌سازه‌های آن‌ها یعنی $\hat{A}_{ij}$ قرار گرفته‌اند. به عبارت دیگر ماتریس الحاقی adjA برابر است با برگردان ماتریس مربعی که به‌جای هر عنصر آن $(-۱)^{i+j}$ برابر دترمینان زیر ماتریس حاصل از همان عنصر قرار گرفته باشد.

مثال ۲۸ــ فرض کنیم

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

ماتریس الحاقی آن برابر است با

$$\mathrm{adj}A=\begin{bmatrix} \hat{A}_{۱۱} & \hat{A}_{۲۱} & \hat{A}_{۳۱} \\ \hat{A}_{۱۲} & \hat{A}_{۲۲} & \hat{A}_{۳۲} \\ \hat{A}_{۱۳} & \hat{A}_{۲۳} & \hat{A}_{۳۳} \end{bmatrix}$$

که در آن $\hat{A}_{ij}$ هم‌سازه‌ی a_{ij} است، مثل

$$\hat{A}_{۱۱}=(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

و یا

$$\hat{A}_{۱۲}=(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

مثال ۲۹ــ ماتریس الحاقی

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

را به‌دست آورید.

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال ۳۰ــ ماتریس الحاقی

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

را به‌دست آورید.

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۳ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} -۷ & ۶ & -۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱۴ــ۷ خواصّ دترمینان‌ها

۱ــ هرگاه جای تمام سطرها و ستون‌های یک ماتریس را با یکدیگر عوض کنیم، دترمینان آن ماتریس تغییر نمی‌کند.

$$\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix}$$

۲ــ از تعویض دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس مربّع با یکدیگر، تنها علامت دترمینان آن تغییر می‌یابد.

$$\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$$

۳ــ هرگاه دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس مساوی باشد، دترمینان آن ماتریس صفر خواهد بود.

$$\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} = ۰$$

۴ــ هرگاه تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون یک ماتریس در عددی مانند k ضرب شود، دترمینان آن ماتریس نیز در k ضرب می‌شود.

$$\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ ka_۲ & kb_۲ & kc_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} = k \times \begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix}$$

۵ ــ هرگاه تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریس صفر باشد، دترمینان آن برابر صفر خواهد بود.

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \end{vmatrix} = ۰$$

۶ــ هرگاه به سطر (یا ستون) یک ماتریس، مضرب‌هایی از سطرهای دیگر (یا از ستون‌های دیگر) اضافه کنیم، دترمینان ماتریس حاصل با دترمینان ماتریس قبلی مساوی است.

مرتبه‌ی یک ماتریس مربع: به تعداد سطرها یا ستون‌های یک ماتریس مربّع، مرتبه‌ی ماتریس نیز می‌گویند.

۷ــ هرگاه A و B دو ماتریس مربّع هم مرتبه باشند، داریم :

$$|A.B| = |A|.|B|$$

یعنی دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس، برابر است با حاصل‌ضرب دترمینان‌های آن دو ماتریس.

مثال ۳۱ــ دترمینان ماتریس B و A را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۰$$

در ماتریس A چون سطر اوّل صفر است، پس دترمینان آن صفر است.

$$B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$|B|=۰$$

در ماتریس B چون ستون اوّل صفر است، پس دترمینان آن صفر است و نیازی به محاسبه ندارد.

مثال ۳۲ــ دترمینان ماتریس A و B را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۴ & ۶ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix}=۱\times\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix}-۳\times\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}+۲\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$۱\times(۶-۰)-۳\times(۴-۱)+۲\times(۰-۳)=۶-۹-۶=-۹$$

$$|B|=\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۴ & ۶ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix}=۱\times\begin{vmatrix} ۶ & ۲ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix}-۳\times\begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}+۲\times\begin{vmatrix} ۴ & ۶ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$|B|=۱(۱۲-۰)-۳(۴\times۲-۱\times۲)+۲(۴\times۰-۱\times۶)$$

$$|B|=۱۲-۳(۸-۲)+۲(-۶)=۱۲-۱۸-۱۲=-۱۸$$

ملاحظه می‌شود که تنها تفاوت ماتریس A و B در آن است که سطر دوم ماتریس B همان سطر دوم ماتریس A است، که در عدد ۲ ضرب شده است. بنابراین، با توجّه به خاصیت (۴) دترمینان ماتریس B برابر است با همان دترمینان ماتریس A ضرب در عدد ۲. چون دترمینان ماتریس A، ۹− بوده است، پس دترمینان ماتریس B برابر با ۲×۹− یعنی ۱۸− است.

۱۵ــ۷ معکوس یک ماتریس

اگر برای یک ماتریس مربّع $A_{n\times n}$ ، یک ماتریس هم مرتبه با آن، مانند B وجود داشته باشد، به‌طوری که حاصل ضرب آن‌ها ماتریسی واحد باشد، چنین ماتریسی (B) را معکوس ماتریس A می‌نامند.

$$A_{n\times n}\times B_{n\times n}=I_n=B_{n\times n}\times A_{n\times n}$$

و به این صورت نشان می‌دهند.

$$B_{n\times n}=A_{n\times n}^{-۱}$$

ماتریس مربّع با هر مرتبه، تنها هنگامی دارای معکوس است که دترمینان آن مخالف صفر باشد. برای روشن‌تر شدن موضوع به مثال زیر توجّه فرمایید.

مثال ۳۳ــ معکوس ماتریس A را پیدا کنید.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$$

فرض می‌کنیم معکوس ماتریس A، ماتریس مانند B باشد. بنابراین، طبق آن‌چه قبلاً گفته شد

$$A\times B=I$$

و یا

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱} & a_{۱۱}b_{۱۲}+a_{۱۲}b_{۲۲} \\ a_{۲۱}b_{۱۱}+a_{۲۲}b_{۲۱} & a_{۲۱}b_{۱۲}+a_{۲۲}b_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

درنتیجه داریم :

(۱) $$a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}=۱$$

(۲) $$a_{۱۱}b_{۱۲}+a_{۱۲}b_{۲۲}=۰$$

(۳) $$a_{۲۱}b_{۱۱}+a_{۲۲}b_{۲۱}=۰$$

(۴) $$a_{۲۱}b_{۱۲}+a_{۲۲}b_{۲۲}=۱$$

برای پیدا کردن درایه‌های ماتریس B به‌شکل زیر عمل می‌کنیم.

از حلّ دستگاه (۱) و (۳) نتیجه می‌شود :

$$b_{۱۱}=\frac{a_{۲۲}}{a_{۱۱}a_{۲۲}-a_{۲۱}a_{۱۲}}$$

و

$$b_{۲۱}=\frac{-a_{۲۱}}{a_{۱۱}a_{۲۲}-a_{۲۱}a_{۱۲}}$$

و از حل دستگاه (۲) و (۴) نتیجه می‌شود :

$$b_{۱۲} = \frac{-a_{۱۲}}{a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۲۱}a_{۱۲}}$$

و

$$b_{۲۲} = \frac{a_{۱۱}}{a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۲۱}a_{۱۲}}$$

توجه کنید که مخرج هریک از این روابط، برابر با دترمینان A است.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۲۱}a_{۱۲}$$

بنابراین، اگر $|A| = ۰$ باشد ماتریس B نامعیّن و $A^{-۱}$ وجود ندارد. پس، هر ماتریس مربّع فقط زمانی دارای معکوس است که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

مثال ۳۴ــ معکوس ماتریس A را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۶ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \quad \det A = -۳ - ۲۴ = -۲۷ = |A|$$

چون $|A| \neq ۰$ پس معکوس آن وجود دارد.

$$b_{۱۱} = \frac{۳}{-۲۷} = -\frac{۱}{۹}$$

$$b_{۱۲} = \frac{-۶}{-۲۷} = \frac{۲}{۹}$$

$$b_{۲۱} = \frac{-۴}{-۲۷} = \frac{۴}{۲۷}$$

$$b_{۲۲} = \frac{-۱}{-۲۷} = \frac{۱}{۲۷}$$

پس،

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۶ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۹} & \frac{۲}{۹} \\ \frac{۴}{۲۷} & \frac{۱}{۲۷} \end{bmatrix} = A^{-۱}$$

توجه کنید که :

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۶ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۹} & \frac{۲}{۹} \\ \frac{۴}{۲۷} & \frac{۱}{۲۷} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ یا } A \times A^{-۱} = I$$

مثال ۳۵ــ معکوس ماتریس A را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -۳ & ۱۵ \\ ۱ & -۵ \end{bmatrix}$$

$$\det A = ۱۵ - ۱۵ = ۰$$

چون دترمینان آن مساوی صفر است، پس، ماتریس A معکوس ندارد. یک ماتریس، زمانی دارای معکوس است که اولاً، این ماتریس مربّع باشد و ثانیاً، دترمینان آن یعنی $|A|$ مخالف صفر گردد.

۱۶ــ۷ پیدا کردن ماتریس معکوس به روش عملیّات ردیفی

چون استفاده از روش قبلی در محاسبه‌ی معکوس یک ماتریس، همیشه عملی نیست و ممکن است محاسبات به‌طول انجامد، روش عملیّات ردیفی نیز قابل استفاده است. این روش بر سه اصل عمده‌ی زیر استوار است :

۱ــ قاعده‌ی کلّی $A \times A^{-۱} = I$

۲ــ ضرب یا تقسیم کردن ردیفی از ردیف‌های یک ماتریس در یک، یا بر یک عدد غیر صفر.

۳ــ اضافه یا کسر کردن مضربی از یک ردیف ماتریس به ردیف دیگری از ردیف‌های ماتریس.

برای محاسبه‌ی معکوس یک ماتریس مربع A، ابتدا ماتریس واحد هم مرتبه‌ی آن I_n را مجاور ماتریس A قرار می‌دهیم (یعنی $A \vdots I$). سپس، بر مبنای این که $A \times A^{-۱} = I$ و $A^{-۱} \times I = A^{-۱}$، عملیّات را به‌شکلی پس می‌گیریم که محلّ دو ماتریس مجاور در $(A \vdots I)$ با یکدیگر تعویض گردند، به شکلی که I محل خود را به $A^{-۱}$ بدهد و A به I مبدل شود (یعنی $I \vdots A^{-۱}$). لذا قواعد زیر در عملیّات ردیفی برای $A \vdots I$ به‌کار می‌رود.

۱ــ کلیه‌ی درایه‌های بالاترین ردیف ماتریس $A \vdots I$ را بر اوّلین درایه‌ی سمت چپ آن (برای مرحله‌ی اوّل عملیّات، درایه‌ی واقع در ردیف یکم و ستون یکم خواهد بود) تقسیم می‌کنیم (به‌شرطی که این درایه غیر صفر باشد). امّا اگر اوّلین درایه‌ی سمت چپ ردیف، صفر باشد ابتدا هر ردیف دیگری

از ماتریس را که اوّلین عنصر آن صفر نباشد با ردیف اوّل جمع می‌کنیم و سپس قاعده را به‌کار می‌بریم.

بدیهی است چنان‌چه ردیفی وجود نداشته باشد که اوّلین درایه‌ی سمت چپ آن غیر صفر باشد، ماتریس معکوس ندارد.

اجرای اوّلین قاعده سبب می‌گردد که بالاترین درایه‌ی سمت چپ به عدد یک تبدیل گردد و درنتیجه بتوان تجسس را برای داشتن بردار واحد شروع کرد.

۲ــ چنان مضربی از ردیف با اوّلین درایه‌ی تبدیل شده به واحد را با سایر ردیف‌ها جمع می‌کنیم، به‌شکلی که کلّیه‌ی درایه‌ی موجود در ستون حاوی درایه‌ی تبدیل شده به یک (ستون یکم) برابر صفر شوند به‌جز خود درایه‌ی تبدیل شده به واحد که باید تا آخر عملیّات واحد باقی بماند.

۳ــ قاعده‌ی یک و دو را برای کلّیه‌ی ردیف‌های باقی‌مانده تکرار می‌نماییم تا آن‌که A^{-1} مشخّص گردد. این روش برای حل دستگاه معادلات با استفاده از کامپیوتر کاربرد دارد.

مثال ۳۶ــ معکوس ماتریس A را با استفاده از روش عملیّات ردیفی پیدا کنید.

$$A=\begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$A \vdots I=\left(\begin{array}{ccc:ccc} ۳ & ۱ & ۵ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right)$$

کلّیه‌ی درایه‌های ردیف یکم را بر عدد ۳ تقسیم می‌کنیم.

$$=\left(\begin{array}{ccc:ccc} ۱ & \frac{۱}{۳} & \frac{۵}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right)$$

چنان مضربی از ردیف یکم را با سایر ردیف‌ها جمع می‌نماییم که کلّیه‌ی درایه‌های ستون یکم به‌استثنای درایه‌ی اوّل برابر صفر شوند. به این منظور باید مضرب صفر از ردیف یکم با ردیف دوم و مضرب ۱− از آن ردیف با ردیف سوم جمع شوند.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & \frac{۱}{۳} & \frac{۵}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} & ۰ & ۱ \end{array}\right)$$

سپس اوّلین درایه‌ی سمت چپ باقی‌مانده برای ردیف دوم عنصر یک است که عملیّات را بر روی آن شروع می‌نماییم.

کلّیه‌ی درایه‌های ردیف دوم را بر اوّلین درایه‌ی باقی‌مانده در سمت چپ (عدد یک) تقسیم می‌کنیم.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & \frac{۱}{۳} & \frac{۵}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} & ۰ & ۱ \end{array}\right)$$

چنان مضربی از ردیف دوم به سایر ردیف‌ها اضافه می‌کنیم که کلّیه‌ی درایه‌های ستون دوم به‌استثنای درایه‌ی واحد آن برابر صفر شوند. به این منظور باید مضرب $-\frac{۱}{۳}$ از آن با ردیف اوّل و مضرب $\frac{۱}{۳}$ از آن با ردیف سوم جمع گردد.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & \frac{۴}{۳} & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۱ \end{array}\right)$$

اینک عملیّات ردیفی را برای اوّلین درایه باقی‌مانده در سمت چپ ردیف سوم (یعنی $\frac{۲}{۳}$) انجام می‌دهیم. به عبارت دیگر، کلّیه‌ی درایه‌های ردیف سوم را بر عنصر $\frac{۲}{۳}$ تقسیم می‌نماییم.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & \frac{۴}{۳} & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{array}\right)$$

بالأخره برای تبدیل درایه‌های ستون سوم، به استثنای درایه‌ی سوم آن به صفر، باید مضرب -۱ از آن را با ردیف دوم و مضرب $-\frac{۴}{۳}$ از آن را با ردیف اول جمع نماییم.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & -\frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{array}\right)$$

ملاحظه می‌شود که دراثر عملیّات ردیفی ماتریس$(A \vdots I)$ تبدیل به$(I \vdots A^{-۱})$ می‌شود و معکوس A به‌دست آمده است.

۱ــ۱۶ــ۷ پیدا کردن ماتریس معکوس با استفاده از ماتریس الحاقی: روش دیگری که برای محاسبه‌ی ماتریس معکوس به‌کار می‌رود، استفاده از ماتریس الحاقی است. در این روش، دترمینان ماتریسی که می‌خواهیم معکوس آن را به‌دست آوریم، محاسبه می‌کنیم. اگر A ماتریس (غیرمنفرد، نامنفرد) معکوس‌پذیر باشد، یعنی $|A| \neq ۰$ در این‌صورت داریم :

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \operatorname{adj} A$$

مثال ۳۷ــ معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ را در صورت وجود تعیین کنید.

$$|A| = ۳$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

درنتیجه

$$A^{-۱} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ \frac{-۲}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

مثال ۳۸ــ معکوس ماتریس را در صورت وجود تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۳ \\ ۱ & ۳ & ۳ \\ -۱ & -۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۰ + ۲(-۲ + ۳) + (-۳)(-۲ + ۳) = -۱$$

پس عناصر ماتریس الحاقی عبارت‌اند از

$$\hat{A}_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۳ & ۳ \\ -۲ & -۲ \end{vmatrix} = -۶ + ۶ = ۰$$

$$\hat{A}_{۱۲} = (-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} = -(-۲ + ۳) = -۱$$

$$\hat{A}_{۱۳} = (-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} = -۲ + ۳ = ۱$$

$$\hat{A}_{۲۱} = (-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} -۲ & -۳ \\ -۲ & -۲ \end{vmatrix} = -(۴ - ۶) = ۲$$

$$\hat{A}_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۰ & -۳ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} = ۰ - ۳ = -۳$$

$$\hat{A}_{۲۳} = (-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۰ & -۲ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} = -(۰ - ۲) = ۲$$

$$\hat{A}_{۳۱} = (-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} -۲ & -۳ \\ ۳ & ۳ \end{vmatrix} = -۶ + ۹ = ۳$$

$$\hat{A}_{۳۲} = (-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۰ & -۳ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = -(۰ + ۳) = -۳$$

$$\hat{A}_{۳۳} = (-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۰ & -۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۰ + ۲ = ۲$$

$$\operatorname{adj}A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۳ & -۳ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

پس

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\text{adj}A = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۳ \\ ۱ & ۳ & ۳ \\ -۱ & -۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

۱۷ــ۷ دستگاه سه معادله‌ی سه‌مجهولی

برای حل دستگاه سه‌معادله‌ی سه مجهولی، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم.

ب) هم‌سازه‌های ستون اوّل را تشکیل می‌دهیم.

ج) $\hat{A}_{۱۱}$ را در معادله‌ی اوّل، $\hat{A}_{۲۱}$ را در معادله‌ی دوم و $\hat{A}_{۳۱}$ را در معادله‌ی سوم ضرب می‌نماییم.

د) هر سه معادله را با هم جمع و x را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۳۹ــ دستگاه را با استفاده از هم‌سازه، نسبت به x حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x + y + z = ۰ \\ x - y + ۵z = ۰ \\ x - ۲y - z = -۱۸ \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۵ \\ ۱ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_{۱۱} = (-۱)^{۲}\begin{vmatrix} -۱ & ۵ \\ -۲ & -۱ \end{vmatrix} = ۱ + ۱۰ = ۱۱$$

$$\hat{A}_{۲۱} = (-۱)^{۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{vmatrix} = -(-۱ + ۲) = -۱$$

$$\hat{A}_{۳۱} = (-۱)^{۴}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۵ \end{vmatrix} = ۵ + ۱ = ۶$$

$$\begin{cases} ۱۱(۲x + y + z) = ۰ \\ -۱(x - y + ۵z) = ۰ \\ ۶(x - ۲y - z) = -۱۸ \times ۶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲۲x+۱۱y+۱۱z=۰ \\ -x+y-۵z=۰ \\ ۶x-۱۲y-۶z=-۱۰۸ \end{cases}$$

$$(۲۲x-x+۶x)+(۱۱y+y-۱۲y)+(۱۱z-۵z-۶z)=-۱۰۸$$

$$۲۷x=-۱۰۸$$

$$x=-۴$$

مثال ۴۰ــ این دستگاه را با استفاده از هم‌سازه نسبت به x حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x+y=۲ \\ ۳x-۲z=۴ \\ y+۳z=۱ \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \qquad \hat{A}_{۱۱}=\begin{vmatrix} ۰ & -۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}=+۲$$

$$\hat{A}_{۲۱}=(-۱)^{۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}=-۳ \qquad \hat{A}_{۳۱}=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{vmatrix}=-۲$$

$$\begin{array}{r} ۲ \\ -۳ \\ \\ -۲ \end{array}\begin{cases} ۴x+۲y=۴ \\ -۹x+۶z=-۱۲ \\ \qquad\qquad \Rightarrow \quad ۵x=-۱۰ \Rightarrow x=۲ \\ -۲y-۶z=-۲ \end{cases}$$

روش دیگری برای حل دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی: برای حل دستگاه به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم و آن را Δ می‌نامیم.

ب) دترمینان Δ را محاسبه می‌کنیم. به شرطی که مخالف صفر باشد.

ج) در ماتریس ضرایب، ستون اوّل را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $\Delta_۱$

می‌نامیم.

د) در ماتریس ضرایب، ستون دوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $\Delta_۲$ می‌نامیم.

هـ) در ماتریس ضرایب، ستون سوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $\Delta_۳$ می‌نامیم.

و) دترمینان $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ و $\Delta_۳$ را محاسبه می‌نماییم.

ز) با استفاده از فرمول $\quad x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}\ ,\ i = ۱,۲,۳$

جواب‌های دستگاه به‌دست می‌آید.

مثال ۴۱ــ دستگاه معادلات

$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲ \\ x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ = ۵ \\ x_۱ + x_۲ + ۵x_۳ = -۷ \end{cases}$$

را حل کنید.

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر است با

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(۱۵-۱) - (۵-۱) + (۱-۳) = ۲۸ - ۴ - ۲ = ۲۲$$

حال، بقیه‌ی دترمینان‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta_{x_۱} = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۵ & ۳ & ۱ \\ -۷ & ۱ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(۱۵-۱) - (۲۵+۷) + (۵+۲۱) = ۲۸ - ۳۲ + ۲۶ = ۲۲$$

$$\Delta_{x_۲} = \begin{vmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۵ & ۱ \\ ۱ & -۷ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(۲۵+۷) - ۲(۵-۱) + (-۷-۵) = ۶۴ - ۸ - ۱۲ = ۴۴$$

$$\Delta_{x_۳} = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۵ \\ ۱ & ۱ & -۷ \end{vmatrix} = ۲(-۲۱-۵) - (-۷-۵) + ۲(۱-۳) = -۵۲ + ۱۲ - ۴ = -۴۴$$

درنتیجه

$$x_۱ = \frac{\Delta_{x_۱}}{\Delta} = \frac{۲۲}{۲۲} = ۱ \Rightarrow x_۱ = ۱$$

$$x_۲ = \frac{\Delta_{x_۲}}{\Delta} = \frac{۴۴}{۲۲} = ۲ \Rightarrow x_۲ = ۲$$

$$x_۳ = \frac{\Delta_{x_۳}}{\Delta} = \frac{-۴۴}{۲۲} = -۲ \Rightarrow x_۳ = -۲$$

حال امتحان می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲(۱)+۲+(-۲)=۲ \Rightarrow ۲=۲ \\ ۱+۳(۲)+(-۲)=۱+۶-۲=۵ \Rightarrow ۵=۵ \\ ۱+۲+۵(-۲)=۱+۲-۱۰=-۷ \Rightarrow -۷=-۷ \end{cases}$$

۱۸ــ۷ دستگاه چهار معادله‌ی چهار مجهولی (جهت مطالعه آزاد)

برای حل دستگاه چهار معادله‌ی چهار مجهولی، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم و آن را Δ می‌نامیم.

ب) دترمینان Δ را محاسبه می‌کنیم، به‌شرطی که مخالف صفر باشد.

ج) در ماتریس ضرایب، ستون اوّل را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $\Delta_۱$ می‌نامیم.

د) در ماتریس ضرایب، ستون دوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $\Delta_۲$ می‌نامیم.

هـ) در ماتریس ضرایب، ستون سوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $\Delta_۳$ می‌نامیم.

و) در ماتریس ضرایب، ستون چهارم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $\Delta_۴$ می‌نامیم.

ز) دترمینان $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ و $\Delta_۳$ و $\Delta_۴$ را محاسبه می‌نماییم.

ح) با استفاده از فرمول $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \;,\; i=۱,۲,\ldots,n$

جواب‌های دستگاه به‌دست می‌آید.

مثال ۴۲ـــ دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ - ۵x_۳ + x_۴ = ۸ \\ x_۱ - ۳x_۲ - ۶x_۴ = ۹ \\ ۲x_۲ - x_۳ + ۲x_۴ = -۵ \\ x_۱ + ۴x_۲ - ۷x_۳ + ۶x_۴ = ۰ \end{cases}$$

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر است با :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۵ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۰ & -۶ \\ ۰ & ۲ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ & -۷ & ۶ \end{vmatrix} = ۲۷ \neq ۰$$

حال، بقیه‌ی دترمینان‌ها را محاسبه می‌کنیم

$$\Delta_۱ = \begin{vmatrix} ۸ & ۱ & -۵ & ۱ \\ ۹ & -۳ & ۰ & -۶ \\ -۵ & ۲ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ & -۷ & ۶ \end{vmatrix} = ۸۱$$

$$\Delta_۲ = \begin{vmatrix} ۲ & ۸ & -۵ & ۱ \\ ۱ & ۹ & ۰ & -۶ \\ ۰ & -۵ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۷ & ۶ \end{vmatrix} = -۱۰۸$$

$$\Delta_۳ = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۸ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۹ & -۶ \\ ۰ & ۲ & -۵ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} = -۲۷$$

$$\Delta_۴ = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۵ & ۸ \\ ۱ & -۳ & ۰ & ۹ \\ ۰ & ۲ & -۱ & -۵ \\ ۱ & ۴ & -۷ & ۰ \end{vmatrix} = ۲۷$$

درنتیجه

$$x_۱ = \frac{\Delta_۱}{\Delta} = \frac{۸۱}{۲۷} = ۳$$

$$x_۲ = \frac{\Delta_۲}{\Delta} = \frac{-۱۰۸}{۲۷} = -۴$$

$$x_۳ = \frac{\Delta_۳}{\Delta} = \frac{-۲۷}{۲۷} = -۱$$

$$x_۴ = \frac{\Delta_۴}{\Delta} = \frac{۲۷}{۲۷} = ۱$$

حال امتحان می‌کنیم

$$\begin{cases} ۲(۳) + (-۴) - ۵(-۱) + ۱ = ۸ \Rightarrow ۶ - ۴ + ۵ + ۱ = ۸ \Rightarrow \quad ۸ = ۸ \\ ۳ - ۳(-۴) - ۶(۱) = ۹ \Rightarrow ۳ + ۱۲ - ۶ = ۹ \Rightarrow \quad ۹ = ۹ \\ ۲(-۴) - (-۱) + ۲(۱) = -۵ \Rightarrow \quad ۸ + ۱ + ۲ = -۵ \Rightarrow \quad -۵ = -۵ \\ ۳ + ۴(-۴) - ۷(-۱) + ۶(۱) = ۰ \Rightarrow ۳ - ۱۶ + ۷ + ۶ = ۰ \Rightarrow \quad ۰ = ۰ \end{cases}$$

تمرین‌های فصل هفتم

۱ــ ماتریس‌های زیر را دوبه‌دو با هم جمع کنید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} =$$

۲ــ ماتریس‌های زیر را در هم ضرب نمایید :

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۹ \end{bmatrix} =$$

۳ــ دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۷ \\ -۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۷ \\ ۰ & -۳ & ۴ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۱ & -۳ \\ ۲ & ۷ & ۴ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۰ & ۵ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۵ \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ & ۰ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} =$$

۴ــ معکوس ماتریس‌های زیر را در صورت وجود، پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۶ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} ۸ & ۳ & ۵ \\ ۴ & ۱۱ & ۷ \\ ۳ & ۹ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۱ \\ ۱ & -۳ & ۴ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۴ & -۶ \end{bmatrix}$$

۵ ــ دستگاه‌های زیر را با استفاده از هم‌سازه نسبت به x حل کنید.

$$\begin{cases} x+y+z=۶ \\ x+y-z=۰ \\ ۲x+۳y+z=۱۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=۰ \\ y-z=۰ \\ z-x=۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳x+۳y+z=۲ \\ x-y+۲z=۶ \\ ۲x+y-z=-۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=۳ \\ x-z=-۱ \\ ۲x+۲y=۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+۲z=۲۵ \\ ۲x+y-z=۹ \\ -x+y=۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+۲z=۴۵ \\ ۲x-y+z=۱۵ \\ x+y-z=۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-z=۱ \\ ۳x-z=۲ \\ ۴x-y=۵ \end{cases} \qquad \begin{cases} ۲x+y+z=۴ \\ y-z=-۱ \\ x+y-z=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۶ــ در ماتریس A ، مقدار x را طوری تعیین کنید که دترمینان A برابر ۱۵ــ باشد.

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ x & ۱ & x-۲ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۷ــ یک شرکت مقاطعه‌کاری برای هر ساعت کامیون بدون راننده ۶۰۰۰ تومان، بابت کرایه هر ساعت تراکتور بدون راننده ۲۰۰۰ تومان و برای هر ساعت جهت راننده ۱۰۰۰ تومان پرداخت می‌نماید. این شرکت از ماتریس A برای انجام کارهای مختلف استفاده می‌نماید.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \end{array} \\ A= & \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \end{array}$$

الف) اگر $P=\begin{bmatrix} ۶۰۰۰ , & ۲۰۰۰ , & ۱۰۰۰ \end{bmatrix}$ نشان‌دهنده‌ی ماتریس قیمت باشد، که توسط این شرکت پرداخت می‌شود، ماتریس PA را محاسبه کنید.

ب) فرض کنید که شرکت برای انجام یک طرح کوچک نیازمند ۲۰ ساعت کار از نوع I ، و ۳۰ ساعت کار از نوع II است. اگر S $S=\begin{bmatrix} ۲۰ \\ ۳۰ \\ \vdots \end{bmatrix}$ ماتریس تقاضا باشد AS را محاسبه کنید.

ج) PAS را محاسبه نمایید.

۸ــ یک فروشنده‌ی ماشین حساب پنج مدل ماشین‌حساب خود را در سه مغازه که در مناطق

مختلف شهر قرار دارند می‌فروشد. موجودی هر مدل در هر مغازه در ماتریس M خلاصه شده است. قیمت فروش کلی (W) و جزئی (R) در ماتریس N برای هر مدل نوشته شده است.

$$M=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}A & B & C & D & E\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}۴ & ۲ & ۳ & ۷ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۵ & ۰ & ۶\\ ۱۰ & ۴ & ۳ & ۴ & ۳\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{مغازه‌ی ۱}\\ \text{مغازه‌ی ۲}\\ \text{مغازه‌ی ۳}\end{array}$$

$$N=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{تومان} & \text{تومان}\\ W & R\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc}۷۰۰ & ۸۴۰\\ ۱۴۰۰ & ۱۸۰۰\\ ۱۸۰۰ & ۲۴۰۰\\ ۲۷۰۰ & ۳۳۰۰\\ ۳۵۰۰ & ۴۹۰۰\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E\end{array}$$

الف) قیمت جزئی موجودی مغازه‌ی ۲ چه‌قدر است؟

ب) قیمت کلی موجودی مغازه‌ی ۳ چه‌قدر است؟

ج) ماتریس MN را محاسبه نمایید.

۹ــ یک پیمان‌کار توافق کرده است که ۴ ویلا، ۳ آپارتمان و ۹ خوابگاه بسازد. این توافق را می‌توان در قالب ماتریس زیر نشان داد.

$$Q=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{ویلا} & \text{آپارتمان} & \text{خوابگاه}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc}۴ & ۳ & ۹\end{array}\right]\end{array}$$

مقادیر ریالی مصالح معدنی درساخت ساختمان‌ها و دستمزد کارگران به شرح ماتریس زیر است :

$$R=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\text{آجر} & \text{چوب} & \text{شیشه} & \text{بتن} & \text{دستمزد کارگران}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}۱۰۰ & ۳۰ & ۵۰ & ۳۰ & ۱۲۰\\ ۴۰ & ۸۰ & ۲۰ & ۴۰ & ۱۰۰\\ ۶۰ & ۵۰ & ۷۰ & ۲۰ & ۱۰۰\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{ویلا}\\ \text{آپارتمان}\\ \text{خوابگاه}\end{array}$$

مطلوب است : محاسبه‌ی $Q\times R$ ، که بیانگر میزان مصالح و کارگر لازم برای ساخت هر ساختمان است.

۱۰ــ امید و خواهرش مریم هر کدام به دو فروشگاه متفاوت می‌روند. امید ۴ کیلو شکر به ازای هر کیلو ۶۰۰ تومان، ۲ کیلو گوشت که هر کیلوی آن ۴۰۰۰ تومان و ۳ بسته نان که هر بسته‌ی آن ۱۲۰ تومان است می‌خرد. مریم نیز ۲ کیلوگرم شکر به ازای هر کیلو ۷۵۰ تومان ، ۱کیلوگوشت که هر کیلوی آن ۳۵۰۰ تومان و ۴ بسته نان که هر بسته آن ۱۰۰ تومان است می‌خرد.

مطلوب است :

۱ــ جمع کل پولی که امید و مریم هر کدام بابت خریدهایشان پرداخت کرده‌اند.

۲ــ مشخص کنید که اگر امید از فروشگاهی که مریم خرید کرده بود، خرید می‌کرد چه‌قدر پول باید می‌پرداخت؟

۳ــ اگر مریم ازفروشگاهی که امید از آن خریداری کرده بود، خرید می‌کرد، چه‌قدر پول باید می‌پرداخت؟

۱۱ــ فرض کنید شرکتی ۳ نوع شکلات (کاکائویی، قهوه‌ای و شیری) تولید می‌کند و قصد دارد از هر شکلات به تعداد زیر در ماه فروردین در ۲ مدرسه‌ی دخترانه و پسرانه بفروشد :

$$\begin{array}{cccc} \text{شکلات کاکائویی} & \text{شکلات قهوه‌ای} & \text{شکلات شیری} & \\ \end{array}$$
$$T=\left[\begin{array}{ccc} 120 & 70 & 105 \\ 65 & 100 & 145 \end{array}\right]\begin{array}{l} \text{مدرسه‌ی پسرانه} \\ \text{مدرسه‌ی دخترانه} \end{array}$$

اگر اطلاعات مربوط به فروش واقعی شکلات‌های این شرکت به‌صورت ماتریس زیر باشد ،اختلاف بین فروش پیش‌بینی شده و فروش واقعی این شرکت در هریک از این مدارس چه‌قدر است؟

$$\begin{array}{cccc} \text{شکلات کاکائویی} & \text{شکلات قهوه‌ای} & \text{شکلات شیری} & \\ \end{array}$$
$$J=\left[\begin{array}{ccc} 120 & 50 & 100 \\ 80 & 75 & 150 \end{array}\right]\begin{array}{l} \text{مدرسه‌ی پسرانه} \\ \text{مدرسه‌ی دخترانه} \end{array}$$

۱۲ــ سارا و زهرا و نیما به یک مغازه میوه فروشی رفته‌اند. سارا ۱۲ عدد پرتقال، ۵ عدد انار، ۲۰ عدد سیب، ۶ عدد موز و ۳ عدد لیموترش خرید. زهرا ۲۰ عدد پرتقال، ۳ عدد انار، ۱۰ عدد سیب و ۴ عدد موز خرید و نیما هم ۱۰ عدد پرتقال، ۱۰ عدد انار، ۱۲ عدد موز خرید. اگر قیمت هر عدد پرتقال ۳۰۰ تومان، انار ۲۰۰ تومان، سیب ۵۰ تومان، موز ۱۰۰ تومان و لیموترش ۱۰ تومان باشد.

مطلوب است :

الف) مقدار میوه‌های خریداری شده توسط هر یک از این ۳ نفر را در یک ماتریس افقی نشان دهید.

ب) قیمت خرید هر نوع میوه توسط این ۳ نفر را در یک ماتریس ستونی نشان دهید.

ج) از طریق ضرب ماتریس‌ها، صورت‌حساب هر کدام از این ۳ نفر را تهیه کنید.

د) با استفاده از جمع ماتریس‌ها مشخص کنید از هر نوع میوه، کلاً چند عدد خریداری شده است؟

هـ) با استفاده از ضرب ماتریس‌ها، حساب کنید برای خرید هر نوع میوه جمعاً چند تومان پرداخت شده است؟

پیوست

جدول ۱ــ ارزش نهایی سالواره یک ریالی که در پایان هر سال دریافت یا پرداخت می‌شود

n	1.5%	4.0%	4.5%	5.0%	5.5%	6.0%	7.0%
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	2.015000	2.040000	2.045000	2.050000	2.055000	2.060000	2.070000
3	3.045225	3.121600	3.137025	3.152500	3.168025	3.183600	3.214900
4	4.090903	4.246464	4.278191	4.310125	4.342266	4.374616	4.439943
5	5.152267	5.416323	5.470710	5.525631	5.581091	5.637093	5.750739
6	6.229551	6.632975	6.716892	6.801913	6.888051	6.975319	7.153291
7	7.322994	7.898294	8.019152	8.142008	8.266894	8.393838	8.654021
8	8.432839	9.214226	9.380014	9.549109	9.721573	9.897468	10.259803
9	9.559332	10.582795	10.802114	11.026564	11.256260	11.491316	11.977989
10	10.702722	12.006107	12.288209	12.577893	12.875354	13.180795	13.816448
11	11.863262	13.486351	13.841179	14.206787	14.583498	14.971643	15.783599
12	13.041211	15.025805	15.464032	15.917127	16.385591	16.869941	17.888451
13	14.236830	16.626838	17.159913	17.712983	18.286798	18.882138	20.140643
14	15.450382	18.291911	18.932109	19.598632	20.292572	21.015066	22.550488
15	16.682138	20.023588	20.784054	21.578564	22.408663	23.275970	25.129022
16	17.932370	21.824531	22.719337	23.657492	24.641140	25.672528	27.888054
17	19.201355	23.697512	24.741707	25.840366	26.996403	28.212880	30.840217
18	20.489376	25.645413	26.855084	28.132385	29.481205	30.905653	33.999033
19	21.796716	27.671229	29.063562	30.539004	32.102671	33.759992	37.378965
20	23.123667	29.778079	31.371423	33.065954	34.868318	36.785591	40.995492
21	24.470522	31.969202	33.783137	35.719252	37.786076	39.992727	44.865177
22	25.837580	34.247970	36.303378	38.505214	40.864310	43.392290	49.005739
23	27.225144	36.617889	38.937030	41.430475	44.111847	46.995828	53.436141
24	28.633521	39.082604	41.689196	44.501999	47.537998	50.815577	58.176671
25	30.063024	41.645908	44.565210	47.727099	51.152588	54.864512	63.249038
26	31.513969	44.311745	47.570645	51.113454	54.965981	59.156383	68.676470
27	32.986678	47.084214	50.711324	54.669126	58.989109	63.705766	74.483823
28	34.481479	49.967583	53.993333	58.402583	63.233510	68.528112	80.697691
29	35.998701	52.966286	57.423033	62.322712	67.711354	73.639798	87.346529
30	37.538681	56.084938	61.007070	66.438848	72.435478	79.058186	94.460786

n	8.0%	9.0%	10.0%	12.0%	14.0%	16.0%	18.0%
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	2.080000	2.090000	2.100000	2.120000	2.140000	2.160000	2.180000
3	3.246400	3.278100	3.310000	3.374400	3.439600	3.505600	3.572400
4	4.506112	4.573129	4.641000	4.779328	4.921144	5.066496	5.215432
5	5.866601	5.984711	6.105100	6.352847	6.610104	6.877135	7.154210
6	7.335929	7.523335	7.715610	8.115189	8.535519	8.977477	9.441968
7	8.922803	9.200435	9.487171	10.089012	10.730491	11.413873	12.141522
8	10.636628	11.028474	11.435888	12.299693	13.232760	14.240093	15.326996
9	12.487558	13.021036	13.579477	14.775656	16.085347	17.518508	19.085855
10	14.486562	15.192930	15.937425	17.548735	19.337295	21.321469	23.521309
11	16.645487	17.560293	18.531167	20.654583	23.044516	25.732904	28.755144
12	18.977126	20.140720	21.384284	24.133133	27.270749	30.850169	34.931070
13	21.495297	22.953385	24.522712	28.029109	32.088654	36.786196	42.218663
14	24.214920	26.019189	27.974983	32.392602	37.581065	43.671987	50.818022
15	27.152114	29.360916	31.772482	37.279715	43.842414	51.659505	60.965266
16	30.324283	33.003399	35.949730	42.753280	50.980352	60.925026	72.939014
17	33.750226	36.973705	40.544703	48.883674	59.117601	71.673030	87.068036
18	37.450244	41.301338	45.599173	55.749715	68.394066	84.140715	103.740283
19	41.446263	46.018458	51.159090	63.439681	78.969235	98.603230	123.413534
20	45.761964	51.160120	57.274999	72.052442	91.024928	115.379747	146.627970
21	50.422921	56.764530	64.002499	81.698736	104.768418	134.840506	174.021005
22	55.456755	62.873338	71.402749	92.502584	120.435996	157.414987	206.344785
23	60.893296	69.531939	79.543024	104.602894	138.297035	183.601385	244.486847
24	66.764759	76.789813	88.497327	118.155241	158.658620	213.977607	289.494479
25	73.105940	84.700896	98.347059	133.333870	181.870827	249.214024	342.603486
26	79.954415	93.323977	109.181765	150.333934	208.332743	290.088267	405.272113
27	87.350768	102.723135	121.099942	169.374007	238.499327	337.502390	479.221093
28	95.338830	112.968217	134.209936	190.698887	272.889233	392.502773	566.480890
29	103.965936	124.135356	148.630930	214.582754	312.093725	456.303216	669.447450
30	113.283211	136.307539	164.494023	241.332684	356.786847	530.311731	790.9479

جدول ۲ــ ارزش فعلی سالواره یک ریالی که در پایان هر سال دریافت یا پرداخت می‌شود

n	1.5%	4.0%	4.5%	5.0%	5.5%	6.0%	7.0%
1	0.985222	0.961538	0.956938	0.952381	0.947867	0.943396	0.934579
2	1.955883	1.886095	1.872668	1.859410	1.846320	1.833393	1.808018
3	2.912200	2.775091	2.748964	2.723248	2.697933	2.673012	2.624316
4	3.854385	3.629895	3.587526	3.545951	3.505150	3.465106	3.387211
5	4.782645	4.451822	4.389977	4.329477	4.270284	4.212364	4.100197
6	5.697187	5.242137	5.157872	5.075692	4.995530	4.917324	4.766540
7	6.598214	6.002055	5.892701	5.786373	5.682967	5.582381	5.389289
8	7.485925	6.732745	6.595886	6.463213	6.334566	6.209794	5.971299
9	8.360517	7.435332	7.268790	7.107822	6.952195	6.801692	6.515232
10	9.222185	8.110896	7.912718	7.721735	7.537626	7.360087	7.023582
11	10.071118	8.760477	8.528917	8.306414	8.092536	7.886875	7.498674
12	10.907505	9.385074	9.118581	8.863252	8.618518	8.383844	7.942686
13	11.731532	9.985648	9.682852	9.393573	9.117079	8.852683	8.357651
14	12.543382	10.563123	10.222825	9.898641	9.589648	9.294984	8.745468
15	13.343233	11.118387	10.739546	10.379658	10.037581	9.712249	9.107914
16	14.131264	11.652296	11.234015	10.837770	10.462162	10.105895	9.446649
17	14.907649	12.165669	11.707191	11.274066	10.864609	10.477260	9.763223
18	15.672561	12.659297	12.159992	11.689587	11.246074	10.827603	10.059087
19	16.426168	13.133939	12.593294	12.085321	11.607654	11.158116	10.335595
20	17.168639	13.590326	13.007936	12.462210	11.950382	11.469921	10.594014
21	17.900137	14.029160	13.404724	12.821153	12.275244	11.764077	10.835527
22	18.620824	14.451115	13.784425	13.163003	12.583170	12.041582	11.061240
23	19.330861	14.856842	14.147775	13.488574	12.875042	12.303379	11.272187
24	20.030405	15.246963	14.495478	13.798642	13.151699	12.550358	11.469334
25	20.719611	15.622080	14.828209	14.093945	13.413933	12.783356	11.653583
26	21.398632	15.982769	15.146611	14.375185	13.662495	13.003166	11.825779
27	22.067617	16.329586	15.451303	14.643034	13.898100	13.210534	11.986709
28	22.726717	16.663063	15.742874	14.898127	14.121422	13.406164	12.137111
29	23.376076	16.983715	16.021889	15.141074	14.333101	13.590721	12.277674
30	24.015838	17.292033	16.288889	15.372451	14.533745	13.764831	12.409041

n	8.0%	9.0%	10.0%	12.0%	14.0%	16.0%	18.0%
1	0.925926	0.917431	0.909091	0.892857	0.877193	0.862069	0.847458
2	1.783265	1.759111	1.735537	1.690051	1.646661	1.605232	1.565642
3	2.577097	2.531295	2.486852	2.401831	2.321632	2.245890	2.174273
4	3.312127	3.239720	3.169865	3.037349	2.913712	2.798181	2.690062
5	3.992710	3.889651	3.790787	3.604776	3.433081	3.274294	3.127171
6	4.622880	4.485919	4.355261	4.111407	3.888668	3.684736	3.497603
7	5.206370	5.032953	4.868419	4.563757	4.288305	4.038565	3.811528
8	5.746639	5.534819	5.334926	4.967640	4.638864	4.343591	4.077566
9	6.246888	5.995247	5.759024	5.328250	4.946372	4.606544	4.303022
10	6.710081	6.417658	6.144567	5.650223	5.216116	4.833227	4.494086
11	7.138964	6.805191	6.495061	5.937699	5.452733	5.028644	4.656005
12	7.536078	7.160725	6.813692	6.194374	5.660292	5.197107	4.793225
13	7.903776	7.486904	7.103356	6.423548	5.842362	5.342334	4.909513
14	8.244237	7.786150	7.366687	6.628168	6.002072	5.467529	5.008062
15	8.559479	8.060688	7.606080	6.810864	6.142168	5.575456	5.091578
16	8.851369	8.312558	7.823709	6.973986	6.265060	5.668497	5.162354
17	9.121638	8.543631	8.021553	7.119630	6.372859	5.748704	5.222334
18	9.371887	8.755625	8.201412	7.249670	6.467420	5.817848	5.273164
19	9.603599	8.950115	8.364920	7.365777	6.550369	5.877455	5.316241
20	9.818147	9.128546	8.513564	7.469444	6.623131	5.928841	5.352746
21	10.016803	9.292244	8.648694	7.562003	6.686957	5.973139	5.383683
22	10.200744	9.442425	8.771540	7.644646	6.742944	6.011326	5.409901
23	10.371059	9.580207	8.883218	7.718434	6.792056	6.044247	5.432120
24	10.528758	9.706612	8.984744	7.784316	6.835137	6.072627	5.450949
25	10.674776	9.822580	9.077040	7.843139	6.872927	6.097092	5.466906
26	10.809978	9.928972	9.160945	7.895660	6.906077	6.118183	5.480429
27	10.935165	10.026580	9.237223	7.942554	6.935155	6.136364	5.491889
28	11.051078	10.116128	9.306567	7.984423	6.960662	6.152038	5.501601
29	11.158406	10.198283	9.369606	8.021806	6.983037	6.165550	5.509831
30	11.257783	10.273654	9.426914	8.055184	7.002664	6.177198	5.516806

جدول ۳ــ ارزش فعلی اقساط مساوی یک ریالی را نشان می‌دهد که در ابتدای هر سال دریافت یا پرداخت می‌شود

n	1.5%	4.0%	4.5%	5.0%	5.5%	6.0%	7.0%
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	1.985222	1.961538	1.956938	1.952381	1.947867	1.943396	1.934579
3	2.955883	2.886095	2.872668	2.859410	2.846320	2.833393	2.808018
4	3.912200	3.775091	3.748964	3.723248	3.697933	3.673012	3.624316
5	4.854385	4.629895	4.587526	4.545951	4.505150	4.465106	4.387211
6	5.782645	5.451822	5.389977	5.329477	5.270284	5.212364	5.100197
7	6.697187	6.242137	6.157872	6.075692	5.995530	5.917324	5.766540
8	7.598214	7.002055	6.892701	6.786373	6.682967	6.582381	6.389289
9	8.485925	7.732745	7.595886	7.463213	7.334566	7.209794	6.971299
10	9.360517	8.435332	8.268790	8.107822	7.952195	7.801692	7.515232
11	10.222185	9.110896	8.912718	8.721735	8.537626	8.360087	8.023582
12	11.071118	9.760477	9.528917	9.306414	9.092536	8.886875	8.498674
13	11.907505	10.385074	10.118581	9.863252	9.618518	9.383844	8.942686
14	12.731532	10.985648	10.682852	10.393573	10.117079	9.852683	9.357651
15	13.543382	11.563123	11.222825	10.898641	10.589648	10.294984	9.745468
16	14.343233	12.118387	11.739546	11.379658	11.037581	10.712249	10.107914
17	15.131264	12.652296	12.234015	11.837770	11.462162	11.105895	10.446649
18	15.907649	13.165669	12.707191	12.274066	11.864609	11.477260	10.763223
19	16.672561	13.659297	13.159992	12.689587	12.246074	11.827603	11.059087
20	17.426168	14.133939	13.593294	13.085321	12.607654	12.158116	11.335595
21	18.168639	14.590326	14.007936	13.462210	12.950382	12.469921	11.594014
22	18.900137	15.029160	14.404724	13.821153	13.275244	12.764077	11.835527
23	19.620824	15.451115	14.784425	14.163003	13.583170	13.041582	12.061240
24	20.330861	15.856842	15.147775	14.488574	13.875042	13.303379	12.272187
25	21.030405	16.246963	15.495478	14.798642	14.151699	13.550358	12.469334
26	21.719611	16.622080	15.828209	15.093945	14.413933	13.783356	12.653583
27	22.398632	16.982769	16.146611	15.375185	14.662495	14.003166	12.825779
28	23.067617	17.329586	16.451303	15.643034	14.898100	14.210534	12.986709
29	23.726717	17.663063	16.742874	15.898127	15.121422	14.406164	13.137111
30	24.376076	17.983715	17.021889	16.141074	15.333101	14.590721	13.277674

n	8.0%	9.0%	10.0%	12.0%	14.0%	16.0%	18.0%
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	1.925926	1.917431	1.909091	1.892857	1.877193	1.862069	1.847458
3	2.783265	2.759111	2.735537	2.690051	2.646661	2.605232	2.565642
4	3.577097	3.531295	3.486852	3.401831	3.321632	3.245890	3.174273
5	4.312127	4.239720	4.169865	4.037349	3.913712	3.798181	3.690062
6	4.992710	4.889651	4.790787	4.604776	4.433081	4.274294	4.127171
7	5.622880	5.485919	5.355261	5.111407	4.888668	4.684736	4.497603
8	6.206370	6.032953	5.868419	5.563757	5.288305	5.038565	4.811528
9	6.746639	6.534819	6.334926	5.967640	5.638864	5.343591	5.077566
10	7.246888	6.995247	6.759024	6.328250	5.946372	5.606544	5.303022
11	7.710081	7.417658	7.144567	6.650223	6.216116	5.833227	5.494086
12	8.138964	7.805191	7.495061	6.937699	6.452733	6.028644	5.656005
13	8.536078	8.160725	7.813692	7.194374	6.660292	6.197107	5.793225
14	8.903776	8.486904	8.103356	7.423548	6.842362	6.342334	5.909513
15	9.244237	8.786150	8.366687	7.628168	7.002072	6.467529	6.008062
16	9.559479	9.060688	8.606080	7.810864	7.142168	6.575456	6.091578
17	9.851369	9.312558	8.823709	7.973986	7.265060	6.668497	6.162354
18	10.121638	9.543631	9.021553	8.119630	7.372859	6.748704	6.222334
19	10.371887	9.755625	9.201412	8.249670	7.467420	6.817848	6.273164
20	10.603599	9.950115	9.364920	8.365777	7.550369	6.877455	6.316241
21	10.818147	10.128546	9.513564	8.469444	7.623131	6.928841	6.352746
22	11.016803	10.292244	9.648694	8.562003	7.686957	6.973139	6.383683
23	11.200744	10.442425	9.771540	8.644646	7.742944	7.011326	6.409901
24	11.371059	10.580207	9.883218	8.718434	7.792056	7.044247	6.432120
25	11.528758	10.706612	9.984744	8.784316	7.835137	7.072627	6.450949
26	11.674776	10.822580	10.077040	8.843139	7.872927	7.097092	6.466906
27	11.809978	10.928972	10.160945	8.895660	7.906077	7.118183	6.480429
28	11.935165	11.026580	10.237223	8.942554	7.935155	7.136364	6.491889
29	12.051078	11.116128	10.306567	8.984423	7.960662	7.152038	6.501601
30	12.158406	11.198283	10.369606	9.021806	7.983037	7.165550	6.509831

فهرست منابع و مآخذ

اصغرپور، محمدجواد، **برنامه‌ریزی خطی**، دانشگاه الزهرا، ۱۳۶۳

پترویچ دوموریاد، الکساندر، **در قلمرو ریاضیات**، پرویز شهریاری (مترجم) امیرکبیر، ۱۳۴۸

تقوی، مهدی، **مقدمه‌ای بر تجزیه و تحلیل اقتصاد میکرو**، مؤسسه‌ی عالی علوم سیاسی و امور حزبی، ۱۳۵۴

جلیلی، میرزا، فرشید مین باشیان، **ریاضیات جدید**، شرکت چاپ و نشر ایران، ۱۳۶۷

دانش نارونی، غلامرضا، میرزا جلیلی، **ریاضیات جدید**، شرکت چاپ و نشر ایران، ۱۳۷۲

رودلف مک‌شین، آن‌کاتلر، **روش سریع تراختنبرگ در حساب**، محمد باقری، (مترجم) دانشمند، ۱۳۷۱

قربانی، ابوالقاسم، **جبر**، چاپخانه‌ی آرین، ۱۳۶۶

مصاحب، غلامحسین، **تئوری مقدماتی اعداد**، سروش، ۱۳۵۸

مولوی،رضا،**نظریه و مسائل ماتریس‌ها**،انتشارات میلاد، تهران،۱۳۷۴

وبر، اجین، **تحلیل‌های ریاضی و کاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی**، حسین علی‌پور کاظمی، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ۱۳۶۷

حافظی نسب، مصطفی، **ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت**، نشر آروین، ۱۳۷۷

جوادی، حسین، مصطفی، حافظی نسب، **ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت**، انتشارات اندرز، ۱۳۷۵

Gosling,"maths for Business and Finance" ,1995 , Pascal Press