فصل دوم

گروه‌بندی و پردازش داده‌های آماری

هدفهای رفتاری: در پایان این فصل، فراگیر باید بتواند :

۱ــ توضیح دهد که پردازش آماری به چه منظوری انجام می‌گیرد.

۲ــ مفهوم گروه‌بندی و نقش آن‌را برای توصیف آماری توضیح دهد.

۳ــ نتایج مشاهدات را در یک جامعهٔ آماری گروه‌بندی نماید.

۴ــ مفهوم فراوانی را توضیح دهد.

۵ــ توزیع فراوانیهای صفت متغیّر را در جامعه بیان کند.

۶ــ جدول «توزیع فراوانیهای صفت متغیّر» را با استفاده از نتایج مشاهدات، تشکیل دهد.

۷ــ نمودار جدول «توزیع فراوانیهای صفت متغیّر» را رسم کند.

۸ــ مفهوم «فراوانی انباشته» را تعریف نماید.

۹ــ براساس نتایج مشاهدات، فراوانیهای انباشته را محاسبه کرده، توزیع فراوانیهای انباشته را تشکیل دهد و نقش آن‌را به‌عنوان مشخّصهٔ صفت متغیّر توضیح دهد.

۱۰ــ لزوم واردکردن فاصله‌ها را برای مقادیر یک صفت متغیّر نشان دهد.

۱۱ــ لزوم واردکردن «مفهوم چگالی فراوانیها» را بیان کند.

۱۲ــ جدول توزیع چگالی فراوانی را تشکیل داده، نمودار آن را نیز رسم کند.

پردازش داده‌های آماری ــ توزیع صفت متغیّر

پردازش داده‌های آماری[1]

داده‌های آماری که در مرحلهٔ مشاهده به‌دست آمده است، اعداد یا ارقامی هستند که هیچ‌گونه

۱ــ Data processing

مفهوم خاصی نداشته و نیاز به پردازش دارند تا آنها را به‌صورت یک مجموعهٔ ادغام شده درآوَردْ. پردازش نتایج مشاهدات، شامل منظم کردن، طبقه‌بندی یا گروه‌بندی داده‌ها، تشکیل جداول، محاسبه سرجمعها و مشخصه‌های عددی است که آن‌را «مرحلهٔ پردازش» می‌نامند. بنابراین هدف از پردازش، ادغام نتایج مشاهدات، یا متراکم کردن اطلاعات، به‌دست‌آوردن مشخصه‌های کلی به‌منظور توصیف اجمالی خصوصیات جامعه‌ها می‌باشد.

توزیع صفت متغیّر

مطالعهٔ صفت درجامعه، بیشتر به‌منظور آشکارساختن تغییرپذیری صفت متغیّر صورت می‌گیرد. برای این‌کار لازم است عناصر جامعه در گروههای یکسان دسته‌بندی شوند. گروه‌بندی نتایج مشاهدات، یکی از اساسی‌ترین روشهای پردازش و تحلیل اولیه اطلاعات آماری است.

اگر صفت متغیر مورد بررسی کمی گسسته باشد، مقادیر مشاهده شده یکسان را که با یک عدد بیان می‌شوند به‌عنوان یک گروه درنظر گرفته، تعداد آنها را مشخص می‌کنیم. سپس تمامی مقادیر مختلف صفت متغیر را به‌ترتیب صعودی مرتب نموده در مقابل هریک از این مقادیر تعداد آنها (فراوانی[1]) را می‌نویسیم. نتیجه گروه‌بندی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$X:\ x_۱\ \ x_۲\ \cdots\ x_k$

$F_i:\ F_۱\ \ F_۲\ \cdots\ F_k$

دو مجموعه مقادیر صفت متغیر X و فراوانیها را با هم «توزیع فراوانیهای صفت متغیر» یا به‌طور ساده «توزیع صفت متغیر» می‌نامند.

تعداد عناصر را در هر گروه، «فراوانی مطلق[2]» آن گروه می‌نامند و برطبق معمول آن‌را با F_i نشان می‌دهند.

واضح است که برای فراوانیهای مطلق در یک توزیع صفت، همواره تساوی زیر برقرار است :

$$F_۱+F_۲+F_۳+\cdots+F_k=N \qquad (۱)$$

به‌عبارت دیگر، مجموع فراوانیهای مطلق صفت متغیّر در جامعه، همواره برابر N یعنی حجم جامعه می‌باشد.

۱ـ Frequency ۲ـ Absolute Frequency

توزیع صفت متغیّر، چگونگی تغییرات فراوانیها را برحسب تغییرپذیری صفت متغیّر منعکس می‌نماید. توزیع صفت متغیّر را با جدول نیز به‌صورت زیر می‌توان بیان نمود :

جدول ۱

X	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	......	x_k	–
F_i	$F_۱$	$F_۲$	$F_۳$	......	F_k	N

چنین جدولی را «جدول توزیع فراوانیهای مطلق» می‌نامند.

مثال ۱ : فرض کنیم جامعهٔ مورد مطالعه N=۲۰ خانوار باشد که صفت متغیّر X در آن تعداد اعضای هر خانوار است. برای هر خانوار، تعداد اعضای آن با پرسش تعیین شده و نتایج مشاهدات به‌صورت زیر به‌دست آمده است :

X:۲, ۴, ۳, ۴, ۴, ۵, ۲, ۲, ۴, ۵, ۵, ۳, ۴, ۴, ۳, ۳, ۲, ۴, ۳, ۵

اگر مقادیر مختلف صفت متغیّر X را که به‌ترتیب ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ می‌باشند،در ۴ گروه طبقه‌بندی نموده، تعداد تکرار آنها (فراوانیها) را در برابر آنها قرار دهیم،گروههایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند (جدول ۲) :

جدول ۲

X تعداد اعضای خانوار	۲	۳	۴	۵	–
F_i تعداد خانوار(فراوانی)	۴	۵	۷	۴	$\sum F_i = ۲۰$

اگر فراوانیهای مطلق (F_i) را برحجم جامعه (N) تقسیم کنیم، توزیع فراوانیهای نسبی[1] را به‌دست خواهیم آورد. فراوانیهای نسبی را با نماد f_i نشان خواهیم داد که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$f_i = \frac{F_i}{N} \quad (۲)$$

فراوانی نسبی گروه iام در جدول توزیع فراوانیها، سهم هریک از مقادیر صفت متغیّر را در کل جامعه نشان می‌دهد.

۱ـ Relative Frequency

حاصل جمع فراوانیهای نسبی در جدول توزیع فراوانی، همواره برابر ۱ می‌باشد.

$$f_{۱} + f_{۲} + f_{۳} + \cdots + f_{k} = \sum_{i=۱}^{k} f_{i} = ۱ \qquad (۳)$$

توزیع فراوانیهای نسبی صفت متغیّر را با جدول نیز می‌توان نشان داد :

جدول ۳ــ توزیع فراوانیهای نسبی صفت متغیّر X

X	$x_{۱}$	$x_{۲}$	$x_{۳}$	$\cdots\cdots$	x_{k}	–
f_{i}	$f_{۱}$	$f_{۲}$	$f_{۳}$	$\cdots\cdots$	f_{k}	$\sum f_{i} = ۱$

برای مثال ۱، توزیع فراوانیهای نسبی را محاسبه می‌کنیم (جدول ۴) :

جدول ۴

تعداد اعضای خانوار X	۲	۳	۴	۵	–
نسبت خانوارها در جامعه f_{i}	$\frac{۴}{۲۰}$	$\frac{۵}{۲۰}$	$\frac{۷}{۲۰}$	$\frac{۴}{۲۰}$	۱

مثال ۲: سن کارگران یک کارخانه نساجی مورد پرسش واقع شده، نتایج به‌دست آمده در جدول زیر، گروه‌بندی شده است. می‌خواهیم جدول توزیع فراوانی نسبی سن کارگران را به‌دست آوریم :

جدول ۵

سن X	۱۹	۲۰	۲۲	۲۵	۲۶	۳۱	۳۴	۳۷	–
فراوانی مطلق F_{i}	۷	۶	۹	۱۰	۱۵	۱۲	۸	۱۳	۸۰

کافی است هریک از فراوانیهای مطلق (F_{i}) را به N (در اینجا $N = ۸۰$) تقسیم نماییم تا فراوانی نسبی هر گروه از سن کارگران به‌دست آید. نتیجهٔ محاسبات در جدول ۶ آورده شده است :

جدول ۶

سن X	۱۹	۲۰	۲۲	۲۵	۲۶	۳۱	۳۴	۳۷	–
فراوانی نسبی f_{i}	$\frac{۷}{۸۰}$	$\frac{۶}{۸۰}$	$\frac{۹}{۸۰}$	$\frac{۱۰}{۸۰}$	$\frac{۱۵}{۸۰}$	$\frac{۱۲}{۸۰}$	$\frac{۸}{۸۰}$	$\frac{۱۳}{۸۰}$	$\frac{۸۰}{۸۰} = ۱$

ملاحظه می‌شود جمع فراوانیهای نسبی برابر ۱ خواهد شد.

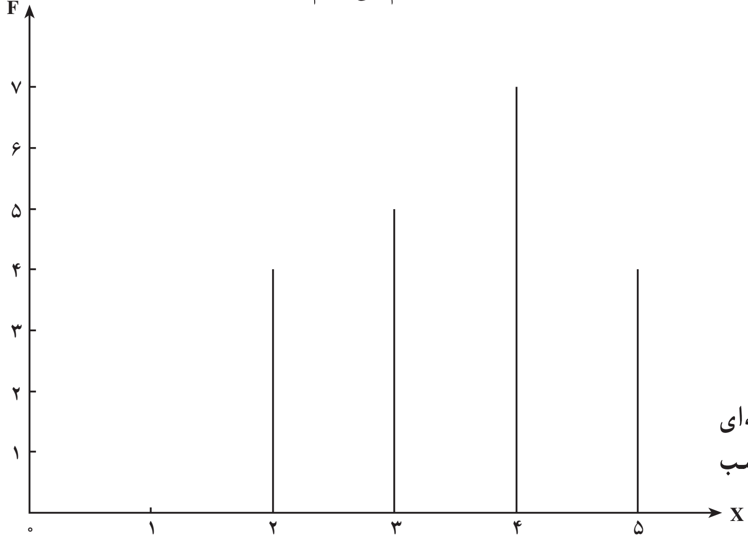
مفهوم فراوانی نسبی بهتر از فراوانی مطلق می‌تواند وضعیّت صفت را در جامعه مشخص سازد، برای مثال اگر بگوییم $\frac{۱۰}{۸۰}$ کارگران سنی برابر ۲۵ سال دارند، بهتر است از اینکه بگوییم در این کارخانه ۱۰ کارگر ۲۵ ساله وجود دارد. چون فراوانی مطلق معلوم نمی‌کند از چند کارگر موجود در این کارخانه، ۱۰ نفر ۲۵ سال سن دارند، ولی فراوانی نسبی دقیقاً آن‌را مشخص می‌کند.

بیان هندسی توزیع صفت متغیّر (نمودار میله‌ای[۱] ــ نمودار چندگوش[۲])

نمایش تغییرپذیری صفت متغیّر با جداول توزیع فراوانیها و پی‌بردن به خصوصیات آن به‌ویژه وقتی این‌گونه جداول مفصل باشند، ساده نیست به‌طوری‌که از روی آنها به‌آسانی نمی‌توان تغییرات فراوانیها را از یک مقدار به مقدار دیگر صفت فهمید.

برای آشکار کردن آنها در آمار، غالباً از نمودار میله‌ای و نمودار چندگوش، استفاده می‌شود. (البته این‌کار بیشتر اوقات زمانی که صفت متغیّر کمی گسسته باشد صورت می‌گیرد).

برای ساختن نمودار میله‌ای در دستگاه مختصات (قائم)، بر روی محور طولها، مقادیر متغیّر X و بر روی محور عرضها، فراوانیها، قرار داده می‌شوند. هر زوج X_i و F_i از توزیع فراوانیهای صفت متغیّر، در دستگاه مختصات به‌صورت یک نقطه با طول X_i و عرض F_i نشان داده می‌شود. پس از رسم تمامی نقاط بر روی دستگاه مختصات، از نقاط به‌دست آمده، عمودهایی به محور Xها رسم می‌کنیم. به‌این‌ترتیب تصویری به‌دست می‌آید که از چند میله تشکیل شده است و به آن «نمودار میله‌ای» گفته می‌شود. نمودار میله‌ای را برای مثال ۱ رسم می‌کنیم (شکل ۱).



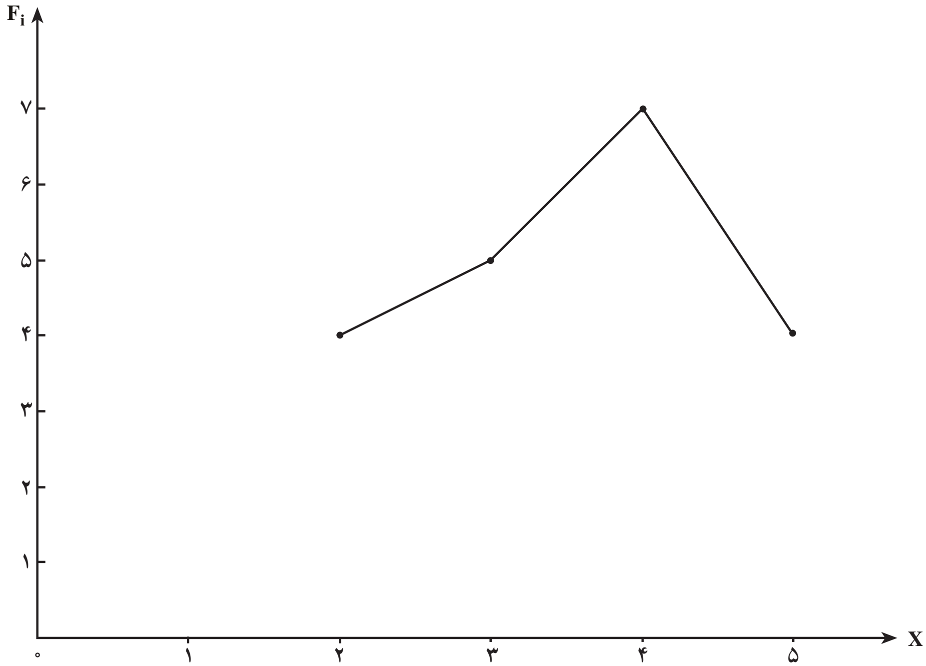
شکل ۱ــ نمودار میله‌ای توزیع خانوارها بر حسب تعداد اعضای خانوار

۱ــ Bar Diagram

۲ــ Polygon

با نمودار میله‌ای به سهولت می‌توان دریافت که خانوارهای ۴نفره تعدادشان بیش‌از همه است و بعد از آن خانوارهای ۳ نفره و سپس خانوارهای ۲ و ۵ نفره به تعداد یکسان در این جامعه وجود دارند.

برای رسم نمودار چندگوش، کافی است نقاط به‌دست آمده در دستگاه مختصات را با خطوط مستقیم به‌ترتیب به‌هم وصل نمود. درنتیجه شکلی حاصل می‌شود که از چند گوشه (زاویه) تشکیل شده است و به‌همین دلیل به آن «نمودار چندگوش توزیع فراوانیها» گفته می‌شود. این نوع نمودار بیشتر برای مقایسهٔ توزیع فراوانیها در دو یا چند جامعه باهم مورد استفاده قرار می‌گیرد. چندگوش توزیع فراوانیها را برای مثال ۱ رسم می‌کنیم (شکل ۲) :



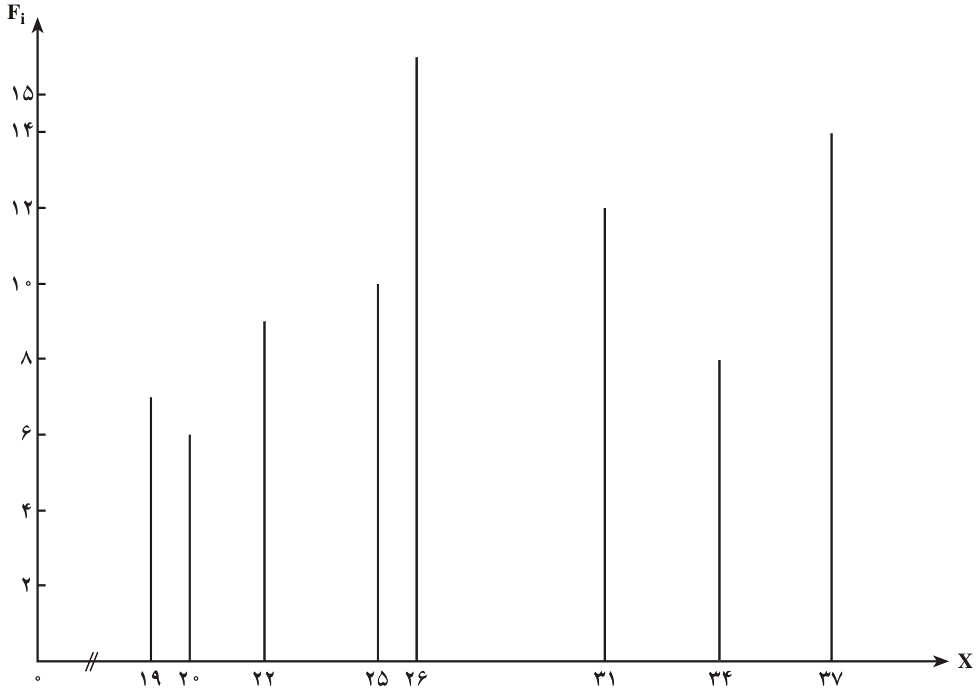
شکل ۲ـ نمودار چندگوش توزیع فراوانیهای تعداد اعضای خانوار

نمودار میله‌ای و چندگوش توزیع فراوانیها را برای مثال ۲ (سن کارگران کارخانهٔ نساجی) رسم می‌کنیم (شکلهای ۳ و ۴) :

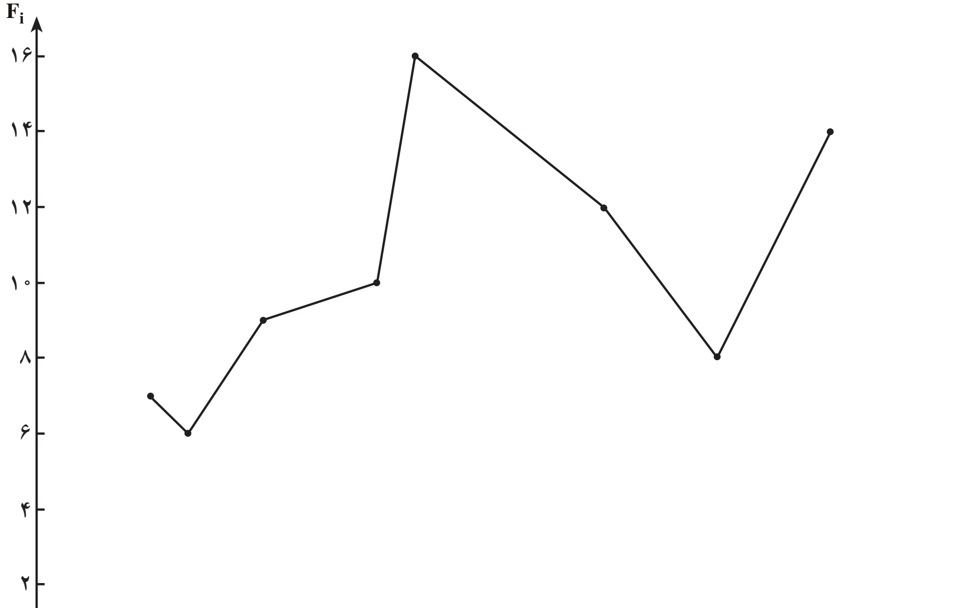
فراوانیهای تجمعی[۱] (انباشته)

فراوانیهای تجمعی نیز مانند فراوانیهای مطلق و نسبی، حجم گروهی از عناصر جامعه را بیان

۱ــ Cumulative Frequency



شکل ۳ــ نمودار میله‌ای سن کارگران کارخانه نساجی



شکل ۴ــ نمودار چندگوش سن کارگران کارخانه نساجی

می‌کند که به‌عنوان مشخصهٔ صفت متغیّر، مورد استفاده قرار می‌گیرد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

> فراوانی تجمعی هر گروه از صفت متغیّر در جدول توزیع فراوانی، برابر است با فراوانی مطلق همان گروه به‌علاوهٔ فراوانیهای مطلق گروههای ماقبل آن. فراوانی تجمعی(انباشته) مطلق را با نماد FC_i یا CF_i نشان می‌دهند.

اگر فراوانیهای مطلق را از ابتدا در جدول برای گروههای متوالی جمع کنیم، نهایتاً آخرین فراوانی انباشته (تجمعی) برابر با N یعنی حجم جامعه خواهد شد.

فرم کلی محاسبات فراوانی انباشته به‌شکل زیر است (جدول ۷) :

جدول ۷

X_i	F_i	FC_i
$x_۱$	$F_۱$	$FC_۱ = F_۱$
$x_۲$	$F_۲$	$FC_۲ = F_۱ + F_۲$
$x_۳$	$F_۳$	$FC_۳ = F_۱ + F_۲ + F_۳$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	F_k	$FC_k = F_۱ + F_۲ + F_۳ + \ldots + F_k = N$
–	N	–

فراوانیهای انباشته را برای مثال ۱ محاسبه می‌کنیم (جدول ۸) :

جدول ۸

X_i	F_i	FC_i
۲	۴	$FC_۱ = ۴$
۳	۵	$FC_۲ = ۴ + ۵ = ۹$
۴	۷	$FC_۳ = ۴ + ۵ + ۷ = ۱۶$
۵	۴	$FC_۴ = ۴ + ۵ + ۷ + ۴ = ۲۰$
–	۲۰	–

ملاحظه می‌شود که آخرین فراوانی انباشته در جدول برابر ۲۰ یعنی حجم جامعه می‌باشد.

همین مفهوم به‌صورت نسبت، به‌نام فراوانیهای انباشته نسبی نیز بیان می‌شود که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد :

نسبت هریک از فراوانیهای تجمعی (انباشته) در جدول توزیع فراوانی را به N (حجم جامعه) فراوانی انباشته نسبی همان گروه صفت متغیّر می‌نامند و آن‌را با نماد cf_i یا fc_i نشان می‌دهند.

$$fc_i = \frac{FC_i}{N} \qquad (۴)$$

از حاصل جمع تجمعی فراوانیهای نسبی در جدول توزیع فراوانی، به همان ترتیبی که فراوانیهای انباشته مطلق را محاسبه نمودیم نیز می‌توان فراوانی انباشته نسبی هریک از گروههای صفت متغیّر را به‌دست آورد. جدول توزیع فراوانیهای انباشته مطلق و نسبی را برای مثال ۲ محاسبه می‌کنیم :

جدول ۹

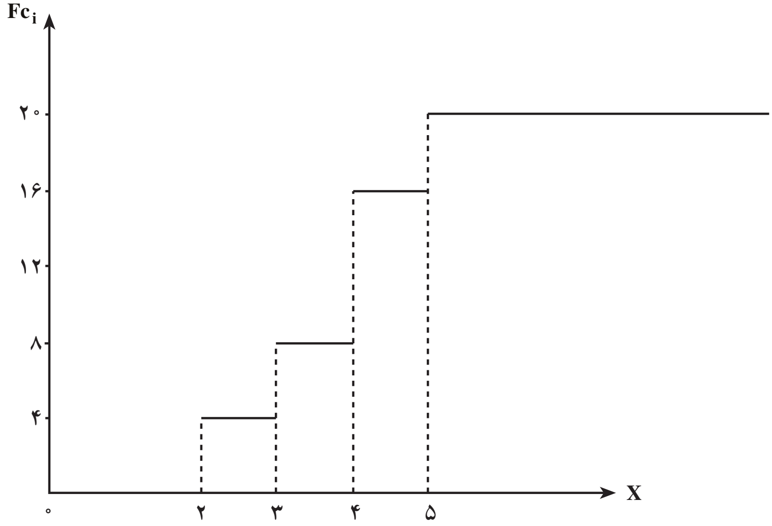
X_i	F_i	f_i	FC_i	fc_i
۱۹	۷	$\frac{۷}{۸۰}$	۷	$\frac{۷}{۸۰}$
۲۰	۶	$\frac{۶}{۸۰}$	۷+۶=۱۳	$\frac{۷}{۸۰}+\frac{۶}{۸۰}=\frac{۱۳}{۸۰}$
۲۲	۹	$\frac{۹}{۸۰}$	۱۳+۹=۲۲	$\frac{۱۳}{۸۰}+\frac{۹}{۸۰}=\frac{۲۲}{۸۰}$
۲۵	۱۰	$\frac{۱۰}{۸۰}$	۲۲+۱۰=۳۲	$\frac{۲۲}{۸۰}+\frac{۱۰}{۸۰}=\frac{۳۲}{۸۰}$
۲۶	۱۵	$\frac{۱۵}{۸۰}$	۳۲+۱۵=۴۷	$\frac{۳۲}{۸۰}+\frac{۱۵}{۸۰}=\frac{۴۷}{۸۰}$
۳۱	۱۲	$\frac{۱۲}{۸۰}$	۴۷+۱۲=۵۹	$\frac{۴۷}{۸۰}+\frac{۱۲}{۸۰}=\frac{۵۹}{۸۰}$
۳۴	۸	$\frac{۸}{۸۰}$	۵۹+۸=۶۷	$\frac{۵۹}{۸۰}+\frac{۸}{۸۰}=\frac{۶۷}{۸۰}$
۳۷	۱۳	$\frac{۱۳}{۸۰}$	۶۷+۱۳=۸۰	$\frac{۶۷}{۸۰}+\frac{۱۳}{۸۰}=\frac{۸۰}{۸۰}=۱$
−	۸۰	۱	−	−

فراوانی‌انباشته برای بیان تعداد مقادیر صفت x معیّن که از یک مقدار مشخص تجاوز نکنند، به‌کار می‌رود. در مثال ۲ اگر بخواهیم بدانیم مجموع کارگرانی که سن آنها از ۲۶ سال تجاوز نمی‌کند،

چه تعدادی است، کافی است فراوانی انباشته ردیف ۲۶ سالگی را مشاهده کرد و آن‌را به‌دست آورد، که در اینجا این رقم برابر ۴۷ می‌باشد. همچنین، اگر بخواهیم نسبت کارگرانی را که سن آنها از ۲۶ سالگی تجاوز نمی‌کند، بدانیم،کافی است، فراوانی‌انباشته‌نسبی سن ۲۶ سالگی را در جدول قرائت نماییم. این نسبت در جدول برابر $\frac{۴۷}{۸۰}$ می‌باشد.

توزیع فراوانیهای انباشته را نیز می‌توان به‌صورت نمودار بیان نمود. برای این‌کار روی محور طولها، مقادیر X و روی محور عرضها، فراوانیهای انباشته‌مطلق یا نسبی را قرار می‌دهیم و برای هر زوج X_i و FC_i یا fc_i یک نقطه در صفحه مختصات به‌دست می‌آوریم و سپس با وصل کردن این نقاط به شکلی دست می‌یابیم که به آن «نمودار توزیع فراوانیهای تجمعی» (کومولات[1]) گویند.

نمودار فراوانیهای انباشته را برای مثال ۱ رسم می‌کنیم (شکل ۵) :



شکل ۵ــ نمودار فراوانیهای تجمعی تعداد اعضای خانوار

نمودار فراوانیهای انباشته را برای مثال ۲ رسم می‌کنیم (شکل ۶) :

طریقهٔ عملی گروه‌بندی نتایج مشاهدات (داده‌های آماری)

در مطالعهٔ جامعه‌های با حجم کوچک، پردازش داده‌ها به‌صورت دستی انجام می‌گیرد. ولی در مطالعهٔ جامعه‌های با حجم بزرگ، از پردازش ماشینی یا رایانه استفاده می‌شود.

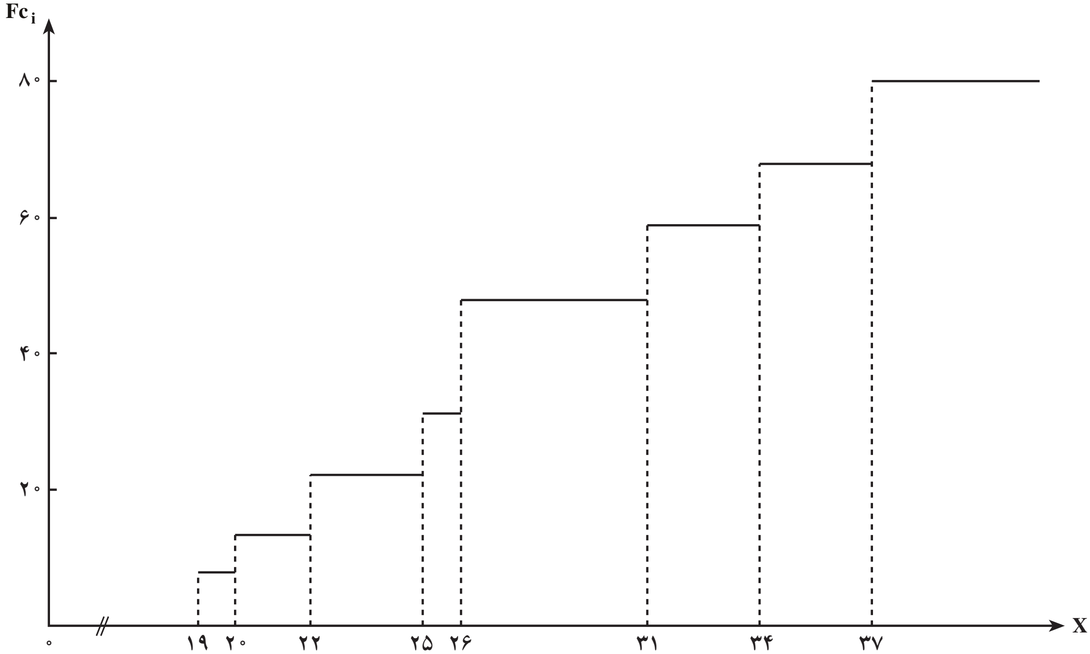
ما در اینجا به‌طور خلاصه فقط دربارهٔ پردازش دستی در مرحلهٔ گروه‌بندی بحث می‌کنیم.

۱ــ Cumulat

ــ **روش چوب‌خط:** در روش چوب‌خط، جدولها به‌صورت زیر تشکیل می‌گردد :

جدول ۱۰

X	ستون چوب‌خط	F_i
x_1	//	F_1
x_2	///	F_2
⋮	⋮	⋮
x_k	/	F_k
–	–	N



شکل ۶ــ نمودار فراوانیهای انباشته سن کارگران کارخانه نساجی

در ستون اول جدول، مقادیر صفت متغیّر را به‌طور صعودی از کوچک به بزرگ قرار می‌دهیم. در ستون دوم، برای هریک از مشاهدات در گروه X مربوط، یک چوب‌خط رسم می‌کنیم. این‌کار تا انتقال همهٔ مشاهدات به‌صورت چوب‌خط ادامه می‌یابد. سپس تعداد چوب‌خطها را در هر گروه، شمارش کرده، نتیجه را به‌صورت فراوانی آن گروه در ستون سوم قرار می‌دهیم. در نهایت جمع فراوانیها برابر کل مشاهدات یعنی N خواهد شد.

اگر بخواهیم جدول فراوانیهای فاصله‌ای[1] داشته باشیم، نحوهٔ عملیات، مشابه جدول ۱۰ خواهد بود با این تفاوت که در ستون اول، مقادیر صفت متغیّر را به‌صورت فاصله‌ها قرار می‌دهیم و سپس تک‌تک مشاهدات را در برابر فاصله مربوط با چوب‌خط رسم نموده، از شمارش آنها، فراوانیهای مطلق هر گروه را به‌دست خواهیم آورد که در ستون سوم نوشته می‌شود. به‌این‌ترتیب، جدول توزیع فراوانیهای فاصله‌ای برای صفت متغیّر به‌دست می‌آید (جدول ۱۱) :

جدول ۱۱

فاصله‌های صفت متغیّر	ستون چوب‌خط	فراوانیها
$x_1 - x_2$	///	F_1
$x_2 - x_3$	~~////~~	F_2
$x_3 - x_4$	~~////~~/	F_3
⋮	⋮	⋮
$x_k - x_{k+1}$	//	F_k
–	–	N

ــ مراحل تشکیل جدول توزیع فراوانیهای فاصله‌ای: مراحل تنظیم جدول توزیع فراوانیهای فاصله‌ای را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم :

۱ــ پس از انجام مرحلهٔ مشاهده بزرگترین اندازهٔ صفت متغیّر (X_{max}) و کوچکترین اندازهٔ آن را (X_{min}) مشخص کرده، تفاضل آنها را محاسبه می‌کنیم. یعنی

$$X_{max} - X_{min} = R \qquad (۵)$$

این تفاضل را که دامنهٔ تغییرات[2] نامیده می‌شود با R نشان می‌دهند.

۲ــ **تعیین تعداد طبقات جدول ــ** با توجه به حجم داده‌ها (N) تعداد طبقات را به دلخواه بین ۵ تا ۲۵ طبقه درنظر می‌گیرند. یکی از روشهای کلاسیک برای تعیین تعداد طبقات استفاده از فرمول استروجس است که به‌صورت زیر می‌باشد :

۱ــ Interval Frequency　　۲ــ Range = دامنه

$$K = 1 + 3/32 \log N \qquad (۶)$$

۳ــ از تقسیم دامنه تغییرات بر تعداد طبقات، فاصلهٔ طبقات به‌دست می‌آید که آن‌را با نماد I[۱] نشان خواهیم داد.

$$I = \frac{R}{K} \qquad (۷)$$

۴ــ تعیین فراوانیهای مطلق ــ در این مرحله با کمک روش چوب‌خط، تعداد اعضایی را که اندازهٔ آنها مربوط به هر طبقه جدول است، مشخص می‌کنیم.

با یک مثال، هم طریقهٔ ساختن جدول توزیع فراوانیهای فاصله‌ای و هم طریقهٔ عملی گروه‌بندی نتایج مشاهدات را نشان می‌دهیم :

مثال ۳: تعداد کارگران یک مؤسّسهٔ تولیدی $N = ۱۰۰$ نفر می‌باشند. به‌منظور مطالعهٔ تغییرپذیری سن آنها، تمامی کارگران را مورد مشاهده قرار داده‌ایم. نتایج مشاهدات برای سن آنها، به‌قرار زیر به‌دست آمده است :

۵۰	۲۳	۲۸	۳۹	۵۳	۴۷	۱۸	۲۱	۲۱	۱۸
۱۹	۱۸	۲۲	۲۵	۲۲	۳۳	۴۴	۳۶	۳۳	۳۲
۴۴	۳۰	۳۲	۳۷	۳۹	۱۸	۳۵	۳۵	۲۴	۳۷
۳۲	۲۸	۳۵	۳۶	۳۲	۲۶	۲۷	۲۴	۳۵	۳۵
۴۹	۱۹	۲۰	۱۹	۵۰	۴۹	۴۴	۴۸	۴۶	۳۰
۴۵	۳۹	۳۰	۱۸	۲۰	۳۷	۳۸	۳۰	۴۳	۴۷
۱۸	۲۶	۵۲	۲۸	۲۸	۵۰	۲۸	۵۳	۲۴	۴۴
۴۳	۴۸	۴۱	۴۱	۴۰	۳۸	۳۸	۳۶	۲۷	۲۶
۳۵	۳۰	۳۲	۴۳	۲۵	۴۷	۳۲	۳۳	۳۲	۴۳
۵۴	۵۰	۴۲	۲۹	۴۱	۴۰	۳۸	۳۶	۳۴	۴۷

اگر نتایج مشاهدات را برحسب مقادیر مختلف سن طبقه‌بندی نماییم، ۳۶ گروه سنی تشکیل خواهد شد، که به‌علت زیادی گروههای صفت X، امکان نتیجه‌گیری نسبت به تغییرپذیری سن مشکل است. از این‌رو، در اینجا مناسب است از روش گروه‌بندی فاصله‌ای استفاده کنیم، یعنی با ادغام کردن

۱ــ Interval = فاصله

چند گروه سنی باهم، فاصله‌های سنی بسازیم. با این‌کار، تعداد گروههای صفت متغیّر کمتر و از طولانی شدن جدول کاسته می‌شود.

برای این‌منظور، ابتدا دامنۀ تغییرات صفت را محاسبه می‌کنیم.

در اینجا بزرگترین اندازۀ صفت (سن) ۵۴ سالگی و کوچکترین اندازۀ آن، ۱۸ سالگی است، بنابراین داریم :

دامنۀ تغییرات سن $۵۴ - ۱۸ = ۳۶$

اگر بخواهیم نتایج مشاهدات را در ۸ گروه طبقه‌بندی کنیم $(k = ۸)$، طول فاصله خواهد شد :

طول فاصله $\frac{۳۶}{۸} = ۴/۵ \simeq ۵$

(در چنین مواردی بهتر است طول فاصله را به عدد صحیح تبدیل کنیم).

بنابراین طول فاصله‌هایی را که در جدول توزیع فراوانی تشکیل می‌دهیم، برابر ۵ سال درنظر می‌گیریم. برای تشکیل اوّلین طبقه در جدول توزیع فراوانی، کوچکترین اندازۀ صفت را (X_{min}) برابر کرانه پایین طبقه اول درنظر گرفته، با توجه به مقدار I (فاصله طبقات)، سایر طبقات جدول را تنظیم می‌کنیم. توضیح اینکه کوچکترین اندازه هرطبقه را، کرانۀ پایین آن طبقه و بزرگترین اندازه آن طبقه را، کرانه بالای آن طبقه نامند.

نتایج این گروه‌بندی در جدول زیر نشان داده شده است (جدول ۱۲) :

جدول ۱۲

طبقات سنی X	چوب‌خط	فراوانی F_i
۱۸ – ۲۲	//// //// ////	۱۵
۲۳ – ۲۷	//// //// /	۱۱
۲۸ – ۳۲	//// //// //// ///	۱۸
۳۳ – ۳۷	//// //// //// //	۱۷
۳۸ – ۴۲	//// //// ///	۱۳
۴۳ – ۴۷	//// //// ////	۱۴
۴۸ – ۵۲	//// ////	۹
۵۳ – ۵۷	///	۳
–	–	۱۰۰

باید توجه داشت که هریک از فاصله‌ها از ۵ سال تشکیل شده‌اند. چون سن، یک صفت ناپیوسته است، بنابراین کرانه بالای هرگروه با کرانه پایین گروه بعدی یک واحد تفاوت دارد، به‌عبارت دیگر، سن **۲۲** سالگی در گروه اول قرار می‌گیرد و سن **۲۳** سالگی که بلافاصله بعد از **۲۲** سالگی قرار دارد، در گروه دوم منظور می‌شود. به‌این ترتیب، با قرائت تک‌تک اعداد که درمرحلهٔ مشاهده به‌دست‌آمده است و انتقال آنها به فاصلهٔ مربوط در جدول، به‌وسیلهٔ چوب‌خط، کلیه اعداد را در ستون دوم وارد می‌کنیم و از شمارش آنها، فراوانیهای هر گروه (هر فاصله) را به‌دست می‌آوریم که حاصل جمع آنها نیز برابر N یعنی ۱۰۰ خواهد بود.

اهمیت فراوانیهای فاصله‌ای و مناسب بودن آن، زمانی آشکار می‌گردد که صفت متغیّر مورد مطالعه «پیوسته» باشد.

در مطالعهٔ صفت متغیّر پیوسته، فاصله‌ها را باید چنان انتخاب کرد که صفت در هریک از آنها تقریباً به‌طور یکنواخت توزیع شده باشد. معمولاً انجام این کار وقتی امکان‌پذیر است که فاصله‌های نامساوی انتخاب شوند. لیکن انتخاب فاصله‌های نامساوی، انجام عملیات بعدی را مشکل‌تر می‌سازد. از این‌رو، در عمل اکثر اوقات، نتایج مشاهدات را به‌وسیلهٔ توزیع فراوانیهای با فاصله‌های یکسان بیان می‌کنند.

در استفاده از فاصله‌های با طولهای متفاوت، تحلیل توزیع فراوانیهای فاصله‌ای مشکل‌تر می‌گردد، زیرا فراوانیهای گروهها نه‌تنها از خصوصیّات صفت متغیّر تبعیّت می‌کند، بلکه از طول فاصلهٔ انتخاب شده نیز تأثیر خواهد پذیرفت.

در اینجا به این نتیجه می‌رسیم که در مطالعهٔ صفت متغیّر که به‌صورت توزیع فاصله‌ای بیان شده باشد، باید از مفهوم جدیدی به‌نام «چگالی فراوانی»[1] استفاده کنیم.

چگالی فراوانی، فراوانی را در واحد اندازه صفت نشان می‌دهد.

یعنی :

$$\text{چگالی فراوانی گروه } i\text{ام} \quad dF_i = \frac{\text{فراوانی گروه } i\text{ام}}{\text{فاصله همان‌گروه}} = \frac{F_i}{\Delta x_i} \qquad (۸)$$

۱ـ Density of Frequency

$$\text{چگالی فراوانی نسبی گروه iام } df_i = \frac{\text{فراوانی نسبی گروه iام}}{\text{فاصله همان گروه}} = \frac{f_i}{\Delta x_i} \qquad (۹)$$

مثال ۴: فرض کنیم نتایج مشاهدات برای صفت متغیّر، موجودی حسابهای پس‌انداز در یکی از شعب بانک باشد که برحسب فاصله‌ها بیان شده است (جدول ۱۳) :

جدول ۱۳

X (موجودی برحسب هزارتومان)	۱۰ـ۷	۱۵ـ۱۰	۲۵ـ۱۵	۴۰ـ۲۵	۶۰ـ۴۰	ــ
F_i فراوانیها	۳۰	۴۰	۶۰	۶۰	۱۰	۲۰۰

اگرچه در توزیع فوق با فاصلهٔ ۱۰ــ۷، (به‌طول ۳ واحد)، فراوانی ۳۰ و با فاصله ۱۵ــ۱۰ (به‌طول ۵ واحد) فراوانی ۴۰ در تناظر است، اما به‌این معنا نیست که با تغییر صفت از فاصله ۱۰ــ۷ به فاصلهٔ ۱۵ــ۱۰ فراوانیها افزایش یافته، بلکه برعکس در فاصله اول به سهم هر واحد طول فاصله $۱۰ = \frac{۳۰}{۳}$ عنصر جامعه تعلق می‌گیرد، در صورتی‌که در فاصلهٔ دوم، به هر واحد طول فاصله فقط $۸ = \frac{۴۰}{۵}$ عنصر جامعه تعلق می‌گیرد.

چگالی فراوانیها را برای فراوانیهای فاصله‌ای محاسبه کرده، توزیع چگالی فراوانیها را به‌دست می‌آوریم.

جدول ۱۴

فاصله‌های صفت	۱۰ـ۷	۱۵ـ۱۰	۲۵ـ۱۵	۴۰ـ۲۵	۶۰ـ۴۰
چگالی فراوانی $dF_i = \frac{F_i}{\Delta x_i}$	$\frac{۳۰}{۳} = ۱۰$	$\frac{۴۰}{۵} = ۸$	$\frac{۶۰}{۱۰} = ۶$	$\frac{۶۰}{۱۵} = ۴$	$\frac{۱۰}{۲۰} = ۰/۵$

ملاحظه می‌شود که چگالی فراوانیها با تغییر صفت متغیّر از فاصله‌ای به فاصله دیگر تغییر کرده، نزول می‌یابد. این نزولی بودن تصادفی نیست. برای اطمینان، کافی است فاصله‌ها را عوض کنیم، باز هم خواهیم دید که تغییرات چگالی فراوانیها برای این صفت متغیّر، نزولی است.

اگر در توزیع چگالی فراوانیها، فاصله‌ها را تغییر دهیم، شکل کلی توزیع تغییر نخواهد کرد. بدین‌جهت، در مطالعهٔ توزیع فراوانیهای فاصله‌ای، با فاصله‌های نامساوی، مناسب است، این توزیع فراوانیها، به توزیع چگالی فراوانیها تبدیل گردد.

مثال ۵: فرض کنیم نتایج مشاهدات برای یک صفت متغیّر کمّی پیوسته X، به‌وسیلهٔ جدول توزیع فراوانیهای نسبی فاصله‌ای بیان شده باشد :

جدول ۱۵

فاصله‌های صفت X	۱۱–۱۵	۱۵–۲۵	۲۵–۲۸	۲۸–۳۵	–
فراوانیهای نسبی f_i	۰/۰۸	۰/۴۰	۰/۲۴	۰/۲۸	$\sum f_i =$ ۱

ظاهراً در این توزیع، بین تغییرات فراوانیها با فاصله‌های صفت متغیّر، نظم خاصی دیده نمی‌شود، و بزرگترین فراوانی نسبی متعلق به فاصله ۲۵ــ۱۵ است. حال اگر توزیع فراوانیها را به‌صورت توزیع چگالی فراوانیها، درآوریم، نتیجه به‌شکل جدول زیر به‌دست می‌آید :

جدول ۱۶

فاصله‌های صفت X	۱۱–۱۵	۱۵–۲۵	۲۵–۲۸	۲۸–۳۵	–
فراوانیهای نسبی f_i	۰/۰۸	۰/۴۰	۰/۲۴	۰/۲۸	$\sum f_i =$ ۱
چگالی فراوانیهای نسبی df_i	۰/۰۲	۰/۰۴	۰/۰۸	۰/۰۴	–

از توزیع چگالی فراوانیها نتیجه می‌گیریم که حداکثر آن در فاصلهٔ ۲۵ــ۱۵ نیست، بلکه به فاصلهٔ ۲۸ــ۲۵ تعلق دارد. یعنی اکثر عناصر جامعه در این فاصله گروه‌بندی شده‌اند. بنابراین، هرگاه جدول توزیع فراوانی فاصله‌ای، با فاصله‌های نامساوی داشته باشیم، برای درک این مطلب که تراکم فراوانیها در چه فاصله‌ای از صفت متغیّر قرار دارند، باید، ابتدا چگالی فراوانیهای صفت‌متغیّر را محاسبه نموده، با استفاده از آنها، نسبت به تراکم فراوانیها نتیجه‌گیری کنیم.

بیان هندسی توزیع فراوانیهای فاصله‌ای (صفت‌متغیّر پیوسته)

نمودار مستطیلی یا هیستوگرام[۱] (بافت‌نگار): برای بیان هندسی توزیع صفت‌پیوسته که با فاصله بیان شده است، از دو نوع نمودار استفاده می‌شود :

ــ نمودار مستطیلی یا هیستوگرام برای توزیع چگالی فراوانیها

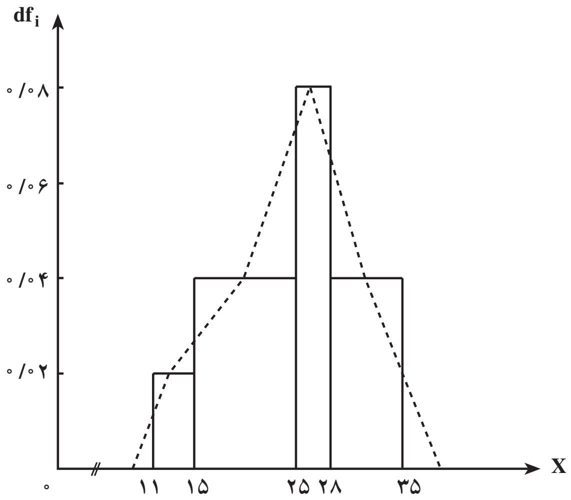
ــ نمودار تجمعی یا اجایو برای توزیع فراوانیهای انباشته

۱ــ Histogram

در ساختن هر دو نوع نمودار، فرض بر این است که چگالی (تراکم) در هریک از فاصله‌ها ثابت باشد.

برای ساختن هیستوگرام، بر روی محور طولها (در دستگاه مختصات قائم) فاصله‌های صفت و بر روی محور عرضها، چگالی فراوانیها را قرار می‌دهند. به‌عبارت دیگر بر روی فاصله‌های صفت‌متغیّر، مستطیلهایی به ارتفاع مساوی با چگالی متناظر با آن فاصله‌ها می‌سازند.

برای جدول ۱۶ در مثال ۵، هیستوگرام توزیع صفت‌متغیّر X را رسم می‌کنیم.



شکل ۷ــ هیستوگرام جدول ۱۶

برای بیان هندسی توزیع صفتی که با فاصله‌ها بیان شده است، می‌توان از نمودار چندگوش نیز استفاده کرد. برای رسم چندگوش توزیع صفت، کافی است روی شکل هیستوگرام، نقاط وسط اضلاع فوقانی مستطیلها را با خطوط مستقیم به‌هم وصل کنیم. از اتصال تمام نقاط وسط مستطیلها به‌هم، نمودار چندگوش به‌دست می‌آید که مساحت زیر آن با محور Xها، برابر با مجموع مساحت مستطیلها، می‌باشد.

در شکل ۷ چندگوش توزیع صفت به‌وسیلهٔ خط‌چین رسم شده است.

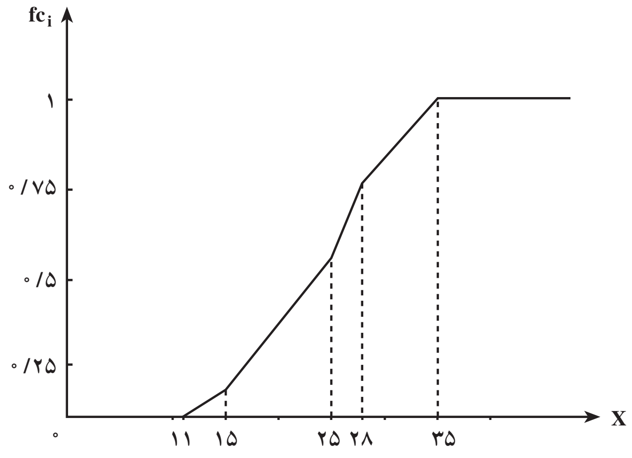
در ساختن نمودار تجمعی یا اجایو با فراوانیهای انباشته، از همان فرض ثابت‌بودن چگالی در فاصله‌های صفت استفاده می‌شود. در صفحه مختصات قائم، روی محور طولها، کرانه‌های هر فاصله را قرار داده، روی محور عرضها، فراوانیهای انباشته را درجه‌بندی می‌کنیم. به‌همان ترتیبی که برای صفت کمّی گسسته، چندگوش فراوانیهای انباشته رسم گردید، عمل می‌کنیم و از به‌دست آوردن نقاط

(باطول X_i و عرض FC_i متناظر)، آنها را به‌وسیلهٔ خطوط مستقیم، به‌هم وصل می‌کنیم. در این‌صورت، شکلی ظاهر می‌شود که نمودار فراوانیهای انباشته نام دارد.

در زیر، جدول توزیع فراوانیهای انباشته نسبی را برای مثال ۵ تشکیل می‌دهیم و با استفاده از آن نمودار تجمعی توزیع صفت را رسم می‌کنیم (جدول ۱۷ و شکل ۸) :

جدول ۱۷

X	۱۱–۱۵	۱۵–۲۵	۲۵–۲۸	۲۸–۳۵	–
f_i	۰/۰۸	۰/۴	۰/۲۴	۰/۲۸	۱
fc_i	۰/۰۸	۰/۴۸	۰/۷۲	۱	–



شکل ۸ ــ نمودار تجمعی (جدول ۱۷) توزیع صفت متغیّر X

می‌توان نشان داد که مساحت هیستوگرام (جمع مساحت مستطیلها) و همین‌طورمساحت زیرخط شکسته چندگوش، وقتی که برای رسم آنها از چگالی فراوانیهای مطلق استفاده شده باشد، همواره مساوی با N است و وقتی که برای رسم آنها از چگالی فراوانیهای نسبی استفاده شده باشد، مساحت هیستوگرام و همین‌طور مساحت زیرخط شکسته چندگوش، مساوی با ۱ است.

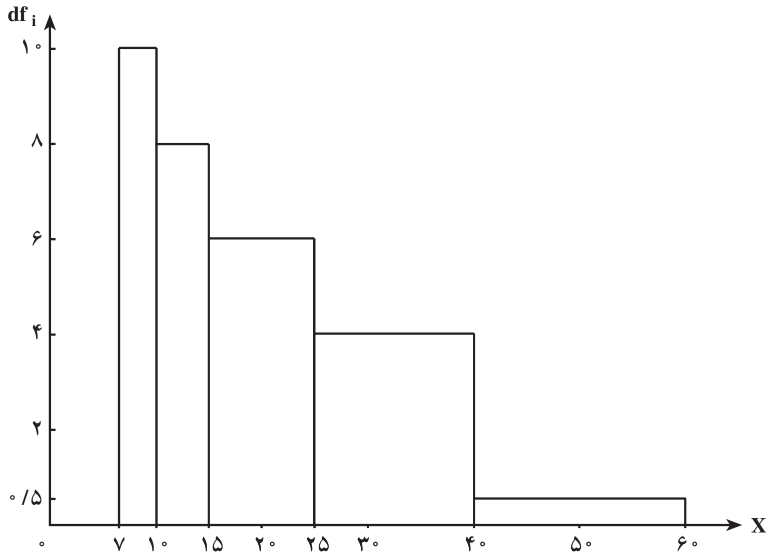
نمودارهای هیستوگرام و تجمعی توزیع صفت را برای مثال ۴ رسم می‌کنیم تا دانش‌آموزان با چگونگی رسم آنها آشنایی بیشتری پیدا کنند.

ابتدا، چگالی فراوانیهای مطلق و فراوانیهای انباشته توزیع صفت را محاسبه می‌کنیم.

جدول ۱۸

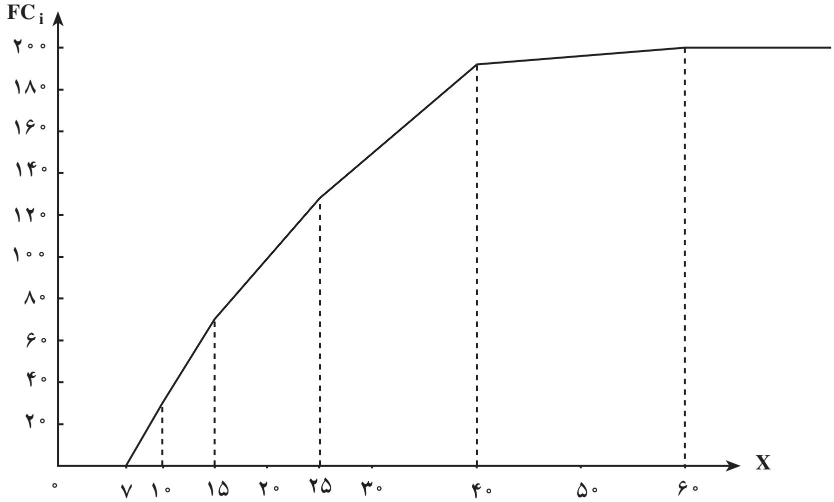
X	۷–۱۰	۱۰–۱۵	۱۵–۲۵	۲۵–۴۰	۴۰–۶۰	–
F_i	۳۰	۴۰	۶۰	۶۰	۱۰	۲۰۰
dF_i	۱۰	۸	۶	۴	۰/۵	–
FC_i	۳۰	۷۰	۱۳۰	۱۹۰	۲۰۰	–

برای رسم هیستوگرام، ابتدا، فاصله‌های صفت را روی محور طولها، در دستگاه مختصات‌قائم وارد کرده، روی محور عرضها، چگالی فراوانیها را قرار می‌دهیم، سپس روی هر فاصله صفت متغیّر، مستطیلی با طول چگالی فراوانی همان فاصله رسم می‌کنیم.



شکل ۹ ــ هیستوگرام توزیع صفت متغیّر X (جدول ۱۸)

برای رسم نمودار تجمعی، اندازه‌های صفت راروی محور طولها و فراوانیهای انباشته را روی محور عرضها در دستگاه مختصات قرار می‌دهیم، سپس با هر مقدار صفت و فراوانی انباشته متناظر آن، یک نقطه روی صفحه مختصات به‌دست می‌آوریم. با وصل نمودن نقاط به‌دست آمده، به‌وسیلهٔ خطوط مستقیم، شکل نمودار تجمعی توزیع صفت متغیّر به‌دست می‌آید.



شکل ۱۰ــ نمودار تجمعی توزیع صفت متغیّر x (مربوط به مثال ۴)

سؤالها و تمرینها

۱ــ لزوم گروه‌بندی نتایج مشاهدات در چیست؟

۲ــ فراوانیهای گروه، چه مفهومی دارد؟

۳ــ توزیع صفت متغیّر، چیست؟

۴ــ فراوانی مطلق، چه مفهومی دارد؟

۵ــ فراوانی نسبی، چه مفهومی دارد؟

۶ــ بین فراوانیهای مطلق چه رابطه‌ای برقرار است؟

۷ــ بین فراوانیهای نسبی چه رابطه‌ای وجود دارد؟

۸ــ توزیع فراوانیهای صفت متغیّر چیست؟ تعریف کنید.

۹ــ فرض کنیم صفت متغیّر کمّی ناپیوسته در جامعه فقط مقادیر ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰ و ۲۵ را به‌ترتیب با فراوانیهای ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ۱۰۰و ۵۰ اختیار کرده باشد.

اولاً : توزیع فراوانیهای صفت متغیّر فوق را بیان کنید.

ثانیاً : جدول توزیع فراوانیهای فوق را تشکیل دهید.

۱۰ــ توزیع فراوانیهای نسبی صفت متغیّر ناپیوسته، چگونه به‌دست می‌آید؟

۱۱ــ برای صفت متغیّر در تمرین ۹، فراوانیهای نسبی را محاسبه کنید.

۱۲ــ بین فراوانیهای مطلق و فراوانیهای نسبی چه رابطه‌ای برقرار است؟
۱۳ــ دلیل استفاده از نمودارها برای بیان توزیع صفت متغیّر چیست؟
۱۴ــ نمودار میله‌ای، چگونه ساخته می‌شود؟
۱۵ــ برای توزیع صفت متغیّر در تمرین ۹، نمودار میله‌ای رسم کنید.
۱۶ــ چندگوش توزیع فراوانیها چیست و چگونه ساخته می‌شود؟
۱۷ــ چندگوش توزیع فراوانیها را برای توزیع صفت متغیّر که در جدول زیر داده شده است، رسم کنید.

X	۲	۴	۸	۱۰	۱۲	۱۴	ــ
F_i	۱۲	۲۴	۳۶	۴۸	۲۶	۴	۱۵۰

۱۸ــ توزیع صفت متغیّر X با جدول زیر بیان شده است :

X	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	ــ
f_i	۰/۱	۰/۳	۰/۳	۰/۲	۰/۱	۱

نمودار میله‌ای و نمودار چندگوش را برای توزیع فوق رسم کنید.
۱۹ــ فراوانی انباشته (تجمعی) چیست؟ تعریف کنید.
۲۰ــ توزیع فراوانیهای انباشته چیست؟
۲۱ــ توزیع فراوانی صفت متغیّر، با جدول زیر بیان شده است :

X	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	ــ
F_i	۲۰	۴۰	۷۰	۳۵	۲۰	۱۵	۲۰۰

جدول توزیع فراوانیهای انباشته را برای صفت متغیر تشکیل دهید.
۲۲ــ فراوانی انباشته نسبی چیست و چگونه محاسبه می‌شود؟
۲۳ــ جدول توزیع فراوانیهای انباشته نسبی را برای تمرین ۲۱ تشکیل دهید.
۲۴ــ توزیع فراوانیهای انباشته به‌صورت هندسی چگونه بیان می‌شود؟
۲۵ــ نمودار تجمعی یا اجایو، برای صفت متغیّر چگونه رسم می‌شود؟
۲۶ــ نمودار تجمعی را برای توزیع صفت در تمرین ۲۱ رسم کنید.

۲۷ــ چرا در گروه‌بندی نتایج مشاهدات صفت متغیّر، از فاصله مقادیر صفت استفاده می‌شود؟

۲۸ــ لزوم تشکیل چنین فاصله‌هایی در چیست؟

۲۹ــ توزیع فراوانیهای فاصله‌ای، چیست؟

۳۰ــ وزن دانش‌آموزان کلاس چهارم دبستان A به‌شرح زیر اندازه‌گیری شده است.

۲۷/۹	۳۱/۸	۳۱/۷	۳۲/۵	۲۸/۵
۳۱/۷	۲۹/۶	۳۲/۵	۳۰/۸	۳۱/۴
۲۸/۹	۲۸/۷	۲۹/۳	۳۰/۴	۳۰/۶
۳۰/۵	۲۸/۶	۲۸/۸	۲۹/۷	۲۹/۳
۳۱/۶	۳۱/۴	۳۳/۵	۳۳/۲	۳۲/۸
۲۸/۲	۲۹/۳	۲۸/۲	۲۷/۸	۳۰/۲
۳۳/۴	۳۲/۸	۳۱/۲	۳۰/۸	۲۹/۸
۳۱/۸	۲۹/۳	۲۹/۹	۲۸/۶	۳۰/۲
۳۴/۴	۳۱/۲	۳۲/۴	۳۴/۳	۳۴/۱
۲۸/۲	۲۷/۸	۳۱/۴	۲۹/۴	۲۸/۷

الف ــ جدول توزیع فراوانیهای گروه‌بندی‌شده وزن دانش‌آموزان را در ۸ گروه تشکیل دهید.

ب ــ جدول توزیع فراوانیهای تجمعی وزن دانش‌آموزان را تشکیل دهید.

ج ــ چند درصد دانش‌آموزان وزنی بیش از ۳۰ کیلوگرم دارند؟

د ــ هیستوگرام وزن دانش‌آموزان را رسم کنید.

۳۱ــ در چه مواردی انتخاب فاصله‌های با طول نامساوی را به فاصله‌های با طول یکسان ترجیح می‌دهید؟

۳۲ــ چگالی فراوانیها چیست و لزوم واردکردن آن در چیست؟

۳۳ــ توزیع فراوانیهای کارگران بر حسب دستمزد روزانه در یک کارگاه ساختمانی به‌صورت جدول زیر بیان شده است :

X دستمزد روزانه (صدتومان)	۱۶–۲۵	۲۵–۳۰	۳۰–۳۵	۳۵–۴۰	۴۰–۵۰	–
فراوانی F_i	۲۲	۹۸	۶۰	۱۸	۲	۲۰۰

توزیع چگالی فراوانیها را برای دستمزد روزانهٔ کارگران تشکیل دهید.

۳۴ــ دلیل ثبات چگالی فراوانیها در چیست؟

۳۵ــ هیستوگرام یا نمودار مستطیلی چیست؟ در چه مواردی از هیستوگرام استفاده می‌شود؟

۳۶ــ فرضی که در ساختن هیستوگرام باید درنظر گرفت، چیست؟

۳۷ــ برای تمرین ۳۳ هیستوگرام را رسم کنید.

۳۸ــ برای تمرین ۳۳ نمودار تجمعی یا اجایو را رسم کنید.

خودآزمونهای چهارگزینه‌ای

۱ــ کدام رابطه بین فراوانیهای مطلق صحیح است؟

الف ــ $\sum F_i = ۱$ ب ــ $\sum F_i = \frac{N}{۲}$

ج ــ $\sum F_i = ۰$ د ــ $\sum F_i = N$

۲ــ کدام رابطه بین فراوانیهای نسبی صحیح است؟

الف ــ $\sum f_i = ۰$ ب ــ $\sum f_i > ۰/۵$

ج ــ $\sum f_i = N$ د ــ $\sum f_i = ۱$

۳ــ فراوانی انباشته هر گروه از صفت متغیّر، در جدول توزیع فراوانی برابر است با :

الف ــ فراوانی مطلق گروه مربوط ب ــ فراوانی نسبی گروه مربوط

ج ــ فراوانی گروه مربوط به علاوه فراوانیهای ماقبل آن د ــ N

۴ــ برای بیان هندسی صفت متغیّر گسسته از کدام نمودارها، استفاده می‌شود؟

الف ــ نمودار فراوانی تجمعی ب ــ نمودار میله‌ای و چندگوش

ج ــ هیستوگرام و نمودار مستطیلی د ــ نمودار نقطه‌ای

۵ــ برای رسم هیستوگرام روی محورهای مختصّات کدام مؤلفه‌ها قرار داده می‌شود؟

الف ــ فاصله‌های صفت متغیّر و چگالی فراوانی

ب ــ اندازه صفت و فراوانی نسبی ج ــ فاصله‌های صفت و فراوانیهای انباشته

د ــ فاصله‌های صفت و فراوانیهای مطلق

۶ــ چگالی فراوانی صفت متغیّر یعنی :

الف ــ فراوانی هر طبقه تقسیم بر N

ب ــ فراوانی هر طبقه تقسیم بر فراوانی نسبی همان طبقه

ج ــ فراوانی هر طبقه تقسیم بر فاصلهٔ آن طبقه د ــ فراوانی انباشته تقسیم بر N

۷ــ اگر هیستوگرام توزیع صفت با استفاده از چگالی فراوانیهای مطلق، رسم گردد، مساحت مستطیلهای هیستوگرام برابر خواهد شد با :

الف ــ ۱ ب ــ ۰/۵ ج ــ N د ــ $\frac{N}{۲}$