فصل نهم

بردار و نیرو

هدف‌های رفتاری: فراگیر باید در پایان این فصل بتواند :

۱ــ نقطه‌ی مادی و جسم صُلب را تعریف کند.

۲ــ کمیت فیزیکی را بشناسد و تعریف کند.

۳ــ بردار را تعریف کند.

۴ــ برآیند دو یا چند بردار را تعیین کند.

۵ ــ بردار واحد را بیان کند.

۶ــ تجزیه‌ی بردار را انجام دهد.

۷ــ نیرو را تعریف کند و واحد آن را بشناسد.

۸ــ نیروهای واقع در صفحه و نیروهای متقارب را بیان کند.

۹ــ جمع نیروها به‌وسیله‌ی مؤلفه‌ی آنها را انجام دهد.

۱۰ــ بتواند معادل نقطه‌ی مادی را تعریف کند.

۱ ــ نقطه‌ی مادی و جسم صُلب

نقطه‌ی مادی مقدار کوچکی از یک جسم است که می‌توان فرض کرد جای نقطه‌ای را در فضا اشغال کرده است.

جسم صُلب از مجموع نقاط مادی تشکیل شده است و در اثر نیروهای وارد بر آن، تغییر شکل نمی‌دهد.

در این فصل، منظور از به‌کاربردن «نقاط مادی» یا «ذرات مادی» تنها مطالعه‌ی ذرات بسیار کوچک نیست. باید توجه داشت که در حل مسائل و روش به‌کار برده شده در این فصل، شکل و

بزرگی و کوچکی اجسام تأثیری ندارد، به‌طوری که یک قطعه سنگ یک‌گرمی یا یک ماشین چند تنی را یک نقطه‌ی مادی در نظر می‌گیریم. به این ترتیب فرض می‌کنیم کلیه‌ی نیروهای وارد بر یک جسم، بر یک نقطه اثر خواهد داشت ؛ یعنی این که بر یک نقطه از جسم وارد می‌شود.

۲ــ کمیت‌های فیزیکی

اساس کلیه‌ی محاسبات فنی بر اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی استوار است. کمیت‌های فیزیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند :

الف ــ کمیت نرده‌ای (عددی)

ب ــ کمیت برداری

۱ ــ۲ــ کمیت نرده‌ای (عددی)

به هر کمیت فیزیکی که فاقد جهت بوده تنها دارای بزرگی (اندازه) باشد، یعنی تنها با یک عدد (البته با ذکر واحد مربوط) مشخّص شود، کمیت نرده‌ای گویند.

بعضی از کمیت‌هایی که در فصل‌های گذشته‌ی این کتاب دیدیم، از نوع کمیت‌های نرده‌ای هستند ؛ مانند طول جاده، سطح سالن، حجم استخر، زمان طلوع آفتاب در یک روز معین از سال.

۲ــ۲ــ کمیت برداری

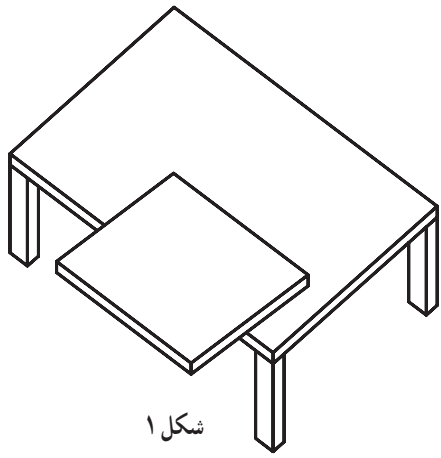
به کمیت‌هایی که علاوه‌بر بزرگی دارای جهت نیز باشند، کمیت برداری گویند.

بردار نیرو، بردار سرعت، بردار جابه‌جایی و ... از نوع کمیت‌های برداری هستند.

جهت یک بردار از راستا و سو تشکیل می‌شود. «راستا» امتداد خطی است که بردار روی آن قرار دارد و «سو» یکی از دو طرف «راستا» است.

توجه: تعریف ۱ــ۲ در مورد اکثرکمیت‌های نرده‌ای صادق است. البته در مواردی استثنا هم دیده می‌شود ؛ مانند جریان الکتریکی در یک سیم که علاوه‌بر بزرگی، جهت هم دارد، ولی از نوع کمیت برداری نیست.

مثال: اگر بر موزاییکی مطابق شکل ۱ نیرویی برابر 8kgf وارد شود، موزاییک چه وضعیتی پیدا می‌کند؟



شکل ۱

در مقابل چنین سؤالی حتماً باید پرسیده شود که نیرو در چه جهتی و در چه راستایی به موزاییک وارد می‌شود؟ یعنی در واقع این سؤال ناقص است و می‌تواند بی‌نهایت پاسخ داشته باشد. زیرا واردکردن نیرو در جهت‌های مختلف، حالت‌های متفاوتی را برای موزاییک ایجاد خواهد کرد ؛ مانند واردکردن نیرو به سمت بالا یا پایین، چپ یا راست، جلو یا عقب و ... که هرکدام حالت جدیدی را در موزاییک به‌وجود می‌آورد. این مثال اثبات می‌کند که نیرو یک کمیت برداری است و تنها با ذکر مقدار مشخص نمی‌گردد و لازم است راستا و جهت آن نیز شناخته شود.

۳ــ بردار

برای نمایش بردار در روی یک نمودار، پیکانی رسم می‌کنیم و طول آن را متناسب با اندازه‌ی بردار در نظر می‌گیریم (برای ترسیم بردار، مقیاسی را انتخاب می‌کنیم). راستای پیکان در راستای بردار در نظر گرفته می‌شود ؛ به‌طوری که نوک پیکان، جهت بردار را نشان دهد. هر بردار دارای ابتدا (نقطه‌ی اثر) و انتها می‌باشد (شکل ۲).

شکل ۲

در این جا لازم است تأکید شود که اندازه و جهت با هم معرف یک کمیت برداری هستند و باید هنگام مقایسه‌ی دو بردار، به هر دو مشخصه‌ی اندازه و جهت توجه شود.

برای نام گذاری بردار، از حروف لاتین استفاده می‌شود و بالای آن، یک پیکان کوچک رسم می‌گردد ؛ مثلاً بردار $\vec{F}$.

برای نشان‌دادن اندازه‌ی یک کمیت برداری از همان حروف لاتین، ولی بدون پیکان استفاده می‌کنیم ؛ مثلاً اندازه‌ی بردار $\vec{F}$ را به صورت F نشان می‌دهیم.

۱ــ۳ــ انواع بردار: انواع بردارها عبارت است از : بردار ثابت، بردار لغزنده و بردار آزاد.

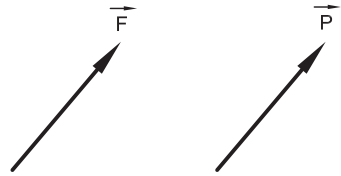
بردار ثابت: بردار ثابت برداری است که راستا، جهت و نقطه‌ی اثر آن در فضا، به‌طور کامل معین و منحصر به فرد باشد. به عبارت دیگر، بردار ثابت برداری است که مکان خاصی را در فضا اشغال کند، مانند بردار یک نیروی خارجی بر جسمی که تغییر شکل می‌پذیرد (غیر صلب).

بردار لغزنده: بردار لغزنده برداری است که عمل آن محدود به یک راستای معین در فضا بوده ولی نقطه‌ی اثر آن در روی راستای خود می‌تواند تغییر کند ؛ یعنی می‌توان بردار را بر روی راستای خود لغزاند (مانند بردار یک نیروی خارجی بر روی یک جسم صلب).

بردار آزاد: بردار آزاد برداری است که عمل آن محدود به یک راستای معین در فضا نباشد، بلکه بتواند روی راستاهای بی‌شماری که موازی یکدیگرند قرار گیرد. به‌عبارت دیگر، بردار آزاد برداری است که مقدار آن معلوم است، ولی مبدأ آن می‌تواند هر نقطه‌ای از فضا باشد.

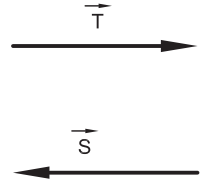
۲ــ۳ــ وضعیت دو بردار نسبت به هم (در فضا): در فضا دو بردار نسبت به هم می‌توانند حالت‌های مختلفی داشته باشند که در این‌جا چند حالت خاص آن را بررسی می‌کنیم.

بردارهای هم‌سنگ: به دو برداری که دارای جهت و مقدار یکسان باشند و در راستاهای موازی قرار گیرند، بردارهای هم‌سنگ گویند، مانند بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{P}$ در شکل ۳.



شکل ۳

بردارهای زوج: به دو برداری که بر روی دو راستای موازی قرار گیرد و دارای مقدار مساوی ولی جهت مخالف یکدیگر باشد، بردار زوج گویند ؛ مانند دو بردار $\vec{S}$ و $\vec{T}$ در شکل ۴.



شکل ۴

بردارهای متقابل: به دو بردار مساوی که در یک راستا قرار گیرد، ولی جهت مخالف یکدیگر داشته باشد، دو بردار متقابل گویند ؛ مانند دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{U}$ در شکل ۵.

شکل ۵

۳ــ۳ــ جمع بردارها: چون کمیت‌های برداری علاوه‌بر اندازه دارای جهت نیز هستند، نباید در جمع و تفریق آنها تنها اندازه‌شان را بر هم افزود، یا از هم کم کرد. زیرا اگر این گونه باشد، در حقیقت جهت بردار نادیده گرفته شده است.

دو بردار $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ را در نظر بگیرید. منظور از جمع دو بردار $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$، برداری است که معادل آن دو بردار باشد ؛ یعنی بتوان آن را جای‌گزین دو بردار اوّلیه کرد.

شکل ۶

بردار حاصل جمع، یعنی بردار $\vec{F}$ را برآیند دو بردار F_1 و F_2 می‌نامند.

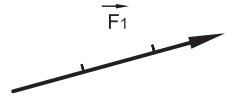
به جمع اثر دو یا چند نیرو، برآیند نیروها گویند.

۴ــ۳ــ روش تعیین برآیند بردارها: برای تعیین برآیند بردارها به روش ترسیمی، از سه روش استفاده می‌کنیم.

روش مثلث ؛ روش متوازی‌الاضلاع و روش چندضلعی.

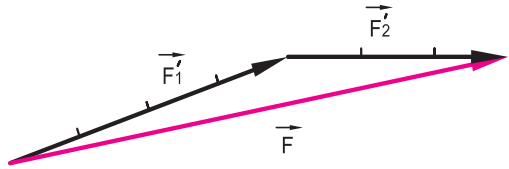
تعیین برآیند بردارها به روش مثلث: در این روش، ابتدا برداری هم‌سنگ بردار اوّل و سپس از انتهای بردار اوّل (نوک پیکان بردار اوّل) هم سنگ بردار دوم رسم می‌کنیم. برآیند این دو بردار، برداری است که ابتدای بردار اوّل را به انتهای بردار دوم وصل می‌کند.

مثال: دو بردار $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ را طبق شکل در نظر بگیرید. برای تعیین برآیند این دو بردار، چنین



شکل ۷

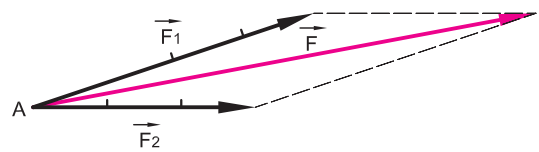
عمل می‌کنیم : از نقطه‌ای مانند A، هم‌سنگ $\vec{F}_1$ می‌کشیم و آن را F'_1 می‌نامیم. به همین ترتیب F'_2 را هم‌سنگ $\vec{F}_2$ رسم می‌کنیم. برداری که ابتدای F'_1 را به انتهای F'_2 وصل می‌کند (یعنی $\vec{F}$)، برآیند دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ می‌باشد (شکل ۸).



شکل ۸

تعیین برآیند بردارها به روش متوازی‌الاضلاع: برای تعیین برآیند دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع، کافی است از نقطه‌ای مثل A هم‌سنگ دو بردار مورد نظر را رسم کنیم (به‌طوری که ابتدای هر دو بردار روی نقطه‌ی A باشد). سپس از انتهای بردار اوّل به اندازه و موازات بردار دوم و از انتهای بردار دوم به اندازه و موازات بردار اوّل رسم می‌کنیم تا متوازی‌الاضلاعی حاصل شود. اندازه‌ی قطر متوازی‌الاضلاع که از نقطه‌ی مادی A شروع می‌شود، اندازه‌ی برآیند دو نیروی مورد نظر می‌باشد و جهت آن به‌گونه‌ای است که نقطه‌ی A ابتدای بردار برآیند باشد.

برآیند دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ شکل ۷ را که به روش متوازی‌الاضلاع به‌دست آمده است در شکل ۹ می‌بینیم.



شکل ۹

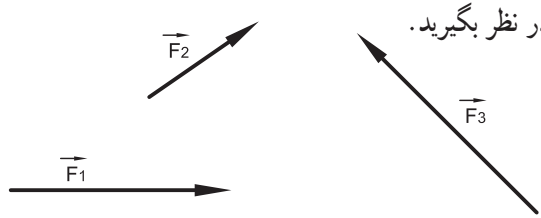
برای به‌دست‌آوردن اندازه‌ی بردار برآیند، طول قطر متوازی‌الاضلاع را اندازه می‌گیریم و با توجه به مقیاس شکل، اندازه‌ی برآیند را به‌دست می‌آوریم.

اگر بخواهیم اندازه‌ی بردار برآیند را از روش محاسباتی به‌دست آوریم، معادله‌ی آن به شکل زیر است :

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$$

α زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ است.

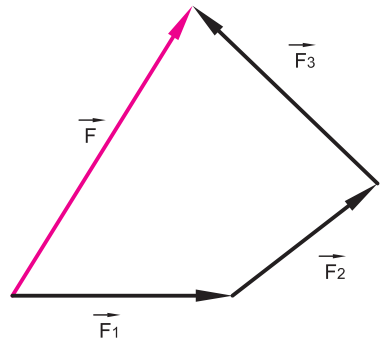
تعیین برآیند بردارها (جمع بیش از دو بردار) به‌روش چندضلعی: بردارهای $\vec{F_1}$ ، $\vec{F_2}$ و $\vec{F_3}$ را مطابق شکل ۱۰ در نظر بگیرید.



شکل ۱۰

برای به‌دست‌آوردن برآیند این بردارها، از یک نقطه برداری هم‌سنگ اوّلین بردار ($\vec{F_1}$) رسم می‌کنیم. از انتهای آن به همین روش، هم‌سنگ دومین بردار ($\vec{F_2}$) را می‌کشیم و به همین ترتیب، هم‌سنگ بردار $\vec{F_3}$ را رسم می‌کنیم.

برداری که ابتدای اوّلین بردار را به انتهای آخرین بردار وصل می‌کند، حاصل جمع (برآیند) بردارها است و می‌نویسیم : $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$

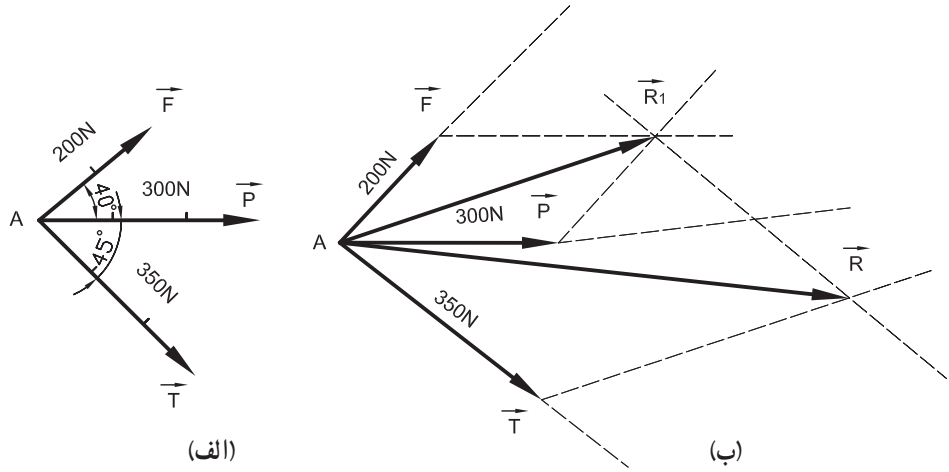


شکل ۱۱

تذکر: برای تعیین برآیند چند نیرو می‌توانیم روش متوازی‌الاضلاع را نیز به‌کار ببریم، یعنی برآیند بردارها را دو به دو به‌دست آوریم و سپس بین برآیندها هم دو به دو برآیند جدید را پیدا کنیم، این عمل را آن‌قدر ادامه دهیم تا همه‌ی نیروها در عمل وارد شوند و برآیند نهایی به‌دست آید.

مثال: در شکل ۱۲ سه نیرو $\vec{F}$ ، $\vec{P}$ و $\vec{T}$ با اندازه‌های $F = ۲۰۰N$ ، $P = ۳۰۰N$ و $T = ۳۵۰N$ با جهت داده شده بر نقطه‌ی مادی A وارد می‌شود. برآیند آنها را تعیین کنید.

در شکل ۱۲ (الف) نیروها به نقطه‌ی مادی A وارد شده‌اند. به شکل ۱۲ (ب) توجه کنید. در



شکل ۱۲

این قسمت نقطه‌ی A را در نظر گرفته فرض کنید همان شکل ۱۲ (الف) است. از انتهای بردار $\vec{P}$ به‌موازات $\vec{F}$ و از انتهای بردار $\vec{F}$ به موازات $\vec{P}$ ترسیم شده است. برآیند دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{F}$ قطر متوازی‌الاضلاع است که در شکل ۱۲ (ب) آن را $\vec{R_1}$ نامیده‌ایم. حالا $\vec{R_1}$ را با بردار $\vec{T}$ در نظر بگیرید و میان این دو ــ یعنی $\vec{R_1}$ و $\vec{T}$ ــ مقدار برآیند را به‌دست آورید. با رسم متوازی الاضلاع، قطر آن برآیند خواهد بود که در شکل ۱۲ (ب) آن را $\vec{R}$ نامیده‌ایم. اگر طول R را اندازه بگیریم، طول بردار $\vec{R}$ به‌دست خواهد آمد که اندازه‌ی آن با خط‌کش ۷ سانتی‌متر است. چون هر سانتی‌متر را ۱۰۰ نیوتن در نظر گرفته‌ایم، پس اندازه‌ی R مساوی ۷۰۰ نیوتن می‌باشد.

اگر چندین بردار دیگر وجود داشت، این عمل را آن‌قدر ادامه می‌دادیم تا برآیند همه‌ی آنها به‌دست آید.

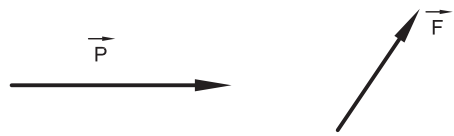
۵ــ۳ــ برادرِ منفیِ یک بردار: بردار منفی یک بردار از لحاظ اندازه با آن برابر بوده دارای راستا و نقطه‌ی اثر مشترک می‌باشد و فقط از لحاظ جهت تفاوت دارد. به شکل ۱۳ توجه کنید :

شکل ۱۳

بردار $\vec{R}$ در نقطه‌ی A اثر می‌کند. اگر بردار $\vec{P}-$ را در نظر بگیریم و فرض کنیم در نقطه‌ی A اثر می‌کند، آن‌گاه $\vec{R}$ و $\vec{P}-$ دو بردار منفی یکدیگرند به عبارت دیگر، جای مبدأ و انتها تغییر یافته است.

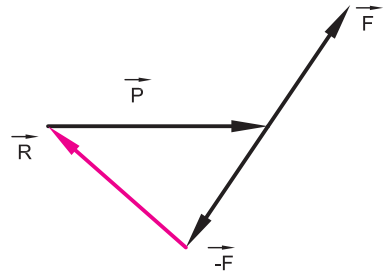
۶ــ۳ــ تفاضل دو بردار: برای به‌دست‌آوردن تفاضل دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{F}$ ــ یعنی $\vec{P}-\vec{F}$ ــ لازم است که برآیند دو بردار $\vec{P}$ و $(\vec{F})-$ را به‌دست آوریم.

مثال: تفاضل دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{F}$ در شکل ۱۴ را به دست می‌آوریم.



شکل ۱۴

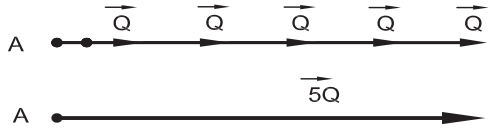
مطابق شکل ۱۵ برآیند بردار $\vec{P}$ و $\vec{F}-$ را از روش مثلث به‌دست می‌آوریم. بردار $\vec{R}$ حاصل تفاضل دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{F}$ است.



شکل ۱۵

۷ــ۳ــ حاصل‌ضرب یک بردار در یک عدد: فرض کنید بردار $\overrightarrow{AQ}$ را داریم و می‌خواهیم آن‌را در عدد ۵ ضرب کنیم.

پس باید در همان جهت بردار $\vec{Q}$، پنج بار بردار $\vec{Q}$ را دنبال هم ترسیم کنیم. پاسخ نهایی $5\vec{Q}$ خواهد شد. به شکل ۱۶ توجه کنید :

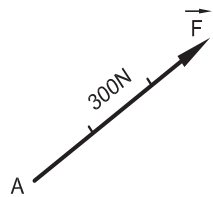


شکل ۱۶

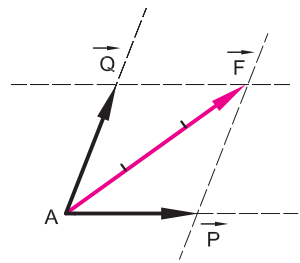
حاصل‌ضرب یک بردار در یک عدد برابر برداری است که بزرگی آن برابر با عدد مورد نظر ضرب‌در مقدار بردار است.

توجه: در ضرب بردارها، به غیر از حاصل‌ضرب یک بردار در یک عدد، حاصل‌ضرب یک بردار در یک بردار دیگر نیز کاربرد فراوانی دارد. البته با توجه به استفاده‌ی زیاد آن در مباحث ایستایی، مطالب مورد نیاز آن به‌طور مفصل در کتاب ایستایی مطرح شده است.

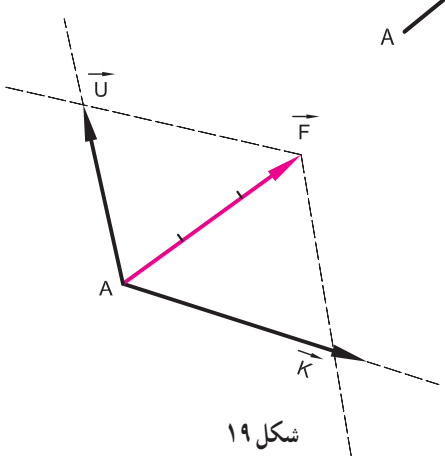
۸ــ۳ــ تجزیه‌ی یک بردار: همان‌گونه که می‌توانیم برآیند دو بردار را به‌دست آوریم، می‌توانیم یک بردار را به دو مؤلفه نیز تجزیه کنیم. این دو مؤلفه باید چنان باشند که اگر برآیند دو مؤلفه را به‌دست آوردیم، به همان برداری برسیم که آن را تجزیه کرده بودیم. برای مثال، بردار $\vec{F}$ را در نظر بگیرید (شکل ۱۷). می‌توان آن‌را به‌صورت شکل‌های ۱۸ یا ۱۹ تجزیه کرد.



شکل ۱۷



شکل ۱۸



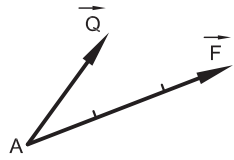
شکل ۱۹

باید توجه داشت که یک بردار را می‌توان به حالت‌های مختلف زیادی تجزیه کرد. از بین تمامی این حالت‌ها، دو حالت خاص بسیار اهمیت دارد.

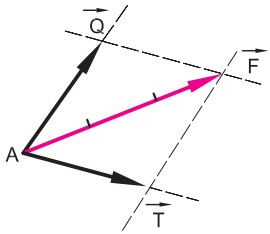
حالت اوّل: بردار $\vec{F}$ را می‌خواهیم تجزیه کنیم ؛ اما یکی از مؤلفه‌ها معلوم است. فرض کنید می‌خواهیم یکی از مؤلفه‌ها بردار $\vec{Q}$ باشد که در این صورت معلوم است مؤلفه‌ی دیگر چه‌قدر می‌شود.

به شکل ۲۰ نگاه کنید.

در شکل ۲۱ اگر از انتهای $\vec{Q}$ به انتهای $\vec{F}$ وصل کنیم، هم‌سنگ بردار $\vec{T}$ به‌دست می‌آید ؛ به‌نحوی که برآیند $\vec{Q}$ و $\vec{T}$ بردار $\vec{F}$ خواهد بود. پس $\vec{T}$ پاسخ است ؛ بنابراین در شکل ۲۱ از نقطه‌ی دلخواه A بردار $\vec{F}$ و بردار $\vec{Q}$ را هم‌سنگ با بردارهای شکل ۲۰ رسم می‌کنیم. در این شکل از A بردار $\vec{T}$ را رسم می‌کنیم، پس $\vec{F}$ به دو مؤلفه‌ی $\vec{T}$ و $\vec{Q}$ تجزیه شده است ؛ زیرا برآیند $\vec{T}$ و $\vec{Q}$ بردار $\vec{F}$ است.



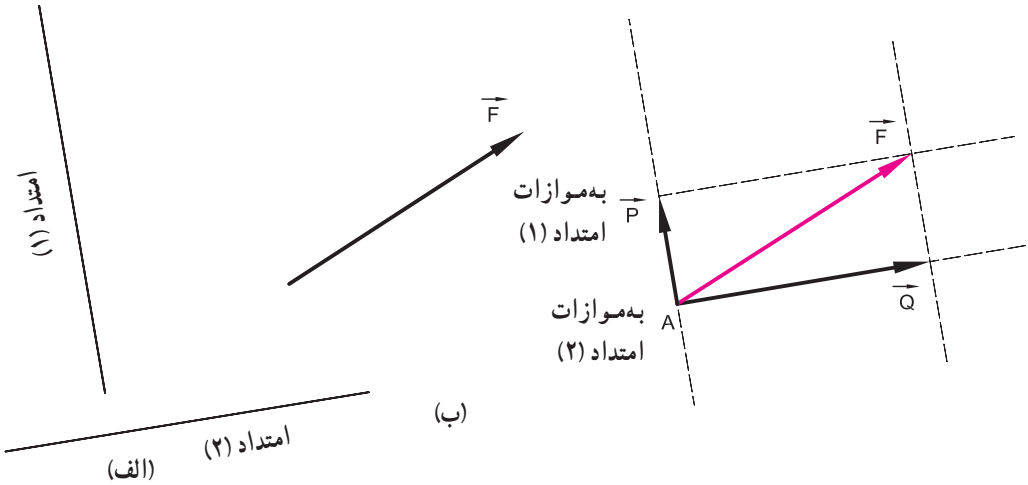
شکل ۲۰



شکل ۲۱

حالت دوم: بردار $\vec{F}$ و دو امتداد که باید این $\vec{F}$ در راستای آن دو امتداد تجزیه شود، معلوم است : این حالت آسان‌تر است. برای این کار از ابتدای $\vec{F}$ به موازات دو امتداد ترسیم کرده از انتهای $\vec{F}$ نیز همین عمل را انجام می‌دهیم تا متوازی‌الاضلاعی به‌دست آید. قطر بزرگ آن $\vec{F}$ و دو ضلع مجاور در آن متوازی‌الاضلاع دو بردار مورد نظر است.

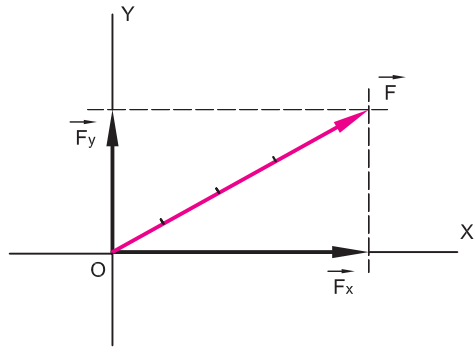
در شکل ۲۲ دقت کنید. در شکل ۲۲ (الف) دو امتداد و در شکل ۲۲ (ب) بردار $\vec{F}$ نشان داده شده است. در شکل ۲۲ (پ) از نقطه‌ی A بردار $\vec{F}$ ترسیم شده است و دو امتداد، موازی امتدادهای ۱ و ۲ ترسیم گردیده تا متوازی‌الاضلاعی به‌دست آید. دو ضلع مجاور بردار $\vec{F}$ از نقطه‌ی A دو بردار $\vec{Q}$ و $\vec{P}$ است که جمع این دو بردار $\vec{F}$ خواهد بود، پس $\vec{Q}$ و $\vec{P}$ دو مؤلفه‌ی $\vec{F}$ در راستای امتداد (۱) و امتداد (۲) هستند.



شکل ۲۲

تجزیه‌ی یک بردار به مؤلفه‌های آن بسیار مهم است و باید با دقت آن را بیاموزید.

۹ــ۳ــ مؤلفه‌های بردار در مختصات قائم: در قسمت قبل، تجزیه‌ی یک بردار به دو مؤلفه را ملاحظه کردید. یکی از روش های مناسب برای تجزیه‌ی یک بردار آن است که آن را روی محورهای مختصات قائم x و y تجزیه کنیم. به شکل ۲۳ توجه کنید. می‌خواهیم بردار $\vec{F}$ را به دو مؤلفه تجزیه کنیم ؛ به‌طوری که آن دو مؤلفه در امتداد محور xها و محور yها قرار داشته باشند.

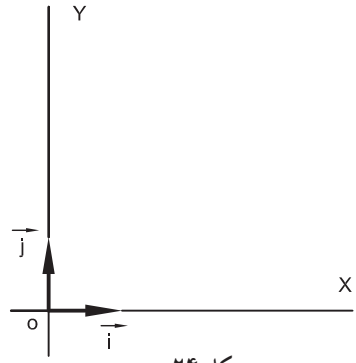


شکل ۲۳

نقطه‌ی اثر بردار، مبدأ مختصات است یعنی نقطه‌ی O ؛ از این رو از انتهای $\vec{F}$ به موازات محور xها و yها ترسیم می‌کنیم تا بتوانیم مؤلفه‌های بردار $\vec{F}$ را به‌دست آوریم.

بنابراین $\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y}$ ، پس بردارهای $\vec{F_x}$ و $\vec{F_y}$ مؤلفه‌های قائم بردار $\vec{F}$ هستند که روی محور xها و روی محور yها قرار دارند. $\vec{F_x}$ مؤلفه‌ی افقی و $\vec{F_y}$ مؤلفه‌ی قائم بردار $\vec{F}$ است. توجه داشته باشید که اندازه‌ی بردار $\vec{F}$ را با حرف F نمایش دادیم. پس $\vec{F_x}$ بردار است، اما F_x اندازه‌ی آن است. به همین ترتیب $\vec{F_y}$ بردار است و اندازه‌ی آن F_y است.

۱۰ــ۳ــ بردار واحد (بردار یکه): اگر به فرض روی محور xها یک بردار واحد $\vec{i}$ تعریف کنیم که طول آن $i = ۱$ باشد و روی محور yها بردار واحد $\vec{j}$ را تعریف کنیم که طول آن $j = ۱$ باشد، به بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بردارهای واحد یا یکه می‌گوییم. به شکل ۲۴ توجه کنید.



شکل ۲۴

با استفاده از شکل ۲۳ می‌توانیم بنویسیم : $\vec{F_x} = F_x . \vec{i}$ و $\vec{F_y} = F_y . \vec{j}$. فراموش نکنید که F_x اندازه‌ی بردار $\vec{F_x}$ و F_y اندازه‌ی بردار $\vec{F_y}$ است. پس بردار $\vec{F_x}$ را می‌توان F_x برابر $\vec{i}$ دانست ؛ یعنی اندازه‌ی $\vec{F_x}$ به اندازه‌ی F_x برابر بردار $\vec{i}$ است و بردار $\vec{F_y}$ را می‌توان F_y برابر بردار $\vec{j}$ دانست، بنابراین داریم :

$$\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y} \qquad (۱)$$

$$\vec{F_x} = F_x . \vec{i} \qquad (۲)$$

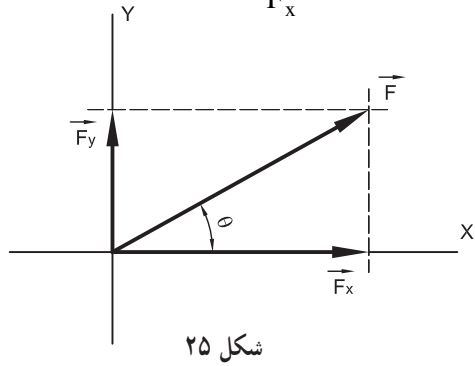
$$\vec{F_y} = F_y . \vec{j} \qquad (۳)$$

معادله‌های (۲) و (۳) را در معادله‌ی (۱) قرار می‌دهیم، بنابراین :

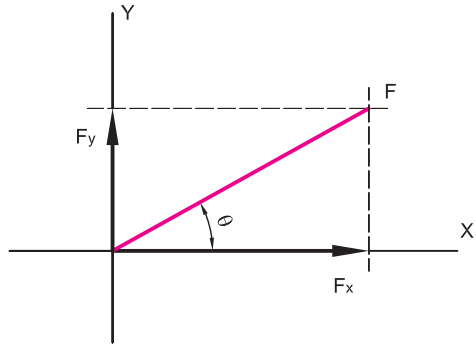
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

مقادیر عددی F_x و F_y می‌توانند اعداد مثبت یا منفی باشند، برحسب این که F در کدام جهت قرار داشته باشد و این نکته‌ای بسیار مهم است. شکل‌های ۲۵ و ۲۶ را در نظر بگیرید. این شکل‌ها مانند شکل ۲۳ می‌باشند.

ملاحظه می‌کنید که در شکل ۲۵ روابط برداری است ؛ اما در شکل ۲۶ روابط عددی یا اندازه‌ای است. بنابراین در شکل ۲۵ باید بنویسیم : $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ ؛ اما در شکل ۲۶ مقادیر، عددی بوده و برابر اندازه‌ی طول هر مؤلفه است، یعنی $F_x = F.\cos\theta$ و $F_y = F.\sin\theta$. توجه کنید F مقدار اندازه‌ی بردار $\vec{F}$ است و به همین نحو برای F_x و F_y . پس مقادیر F_x و F_y مؤلفه‌های عددی بردار $\vec{F}$ هستند. همچنین باید در شکل ۲۶ بنویسیم : $F^2 = F_x^2 + F_y^2$. توجه کنید روی آنها پیکان کوچک ترسیم نشده است و داریم $\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$.



شکل ۲۵



شکل ۲۶

۴ــ نیرو

نیرو نشان‌دهنده‌ی عمل جسمی بر جسم دیگر است.

نیرو عاملی است که جسم ساکن را به حرکت درمی‌آورد ؛ از حرکت آن جلوگیری می‌کند ؛ جهت حرکت آن را تغییر می‌دهد و یا باعث تغییر شکل آن می‌شود.

مشخصه‌های تعیین‌کننده‌ی نیرو عبارتند از :

الف ــ نقطه‌ی اثر نیرو: محل اثر نیرو بر جسم را نقطه‌ی اثر نیرو گویند.

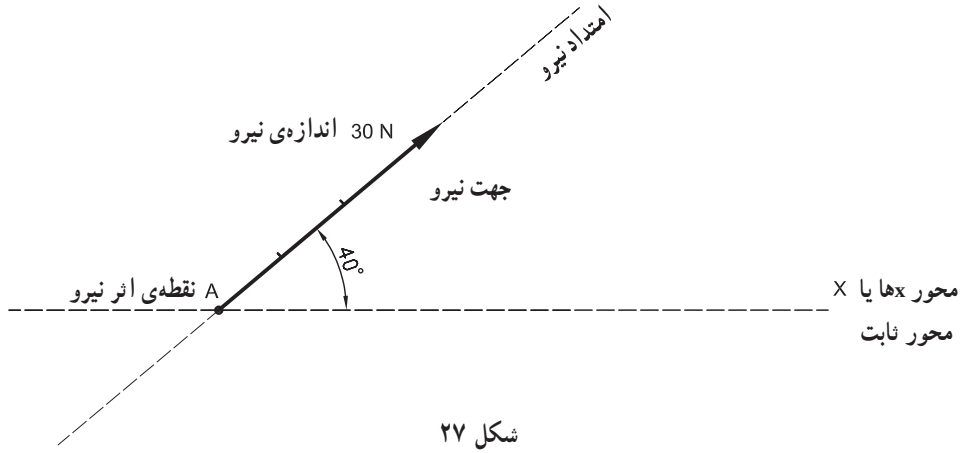
ب ــ راستای نیرو: خط مستقیمی است که نیرو در امتداد آن خط به جسم اثر می‌کند.

پ ــ جهت نیرو: سمت و سویی را که نیرو به سمت آن وارد می‌شود، جهت نیرو می‌گویند و آن را با یک پیکان نمایش می‌دهند.

ت ــ اندازه‌ی نیرو: بزرگی نیرو را به‌وسیله‌ی طول پاره‌خط با مقیاس مشخص روی امتداد نیرو نمایش می‌دهند.

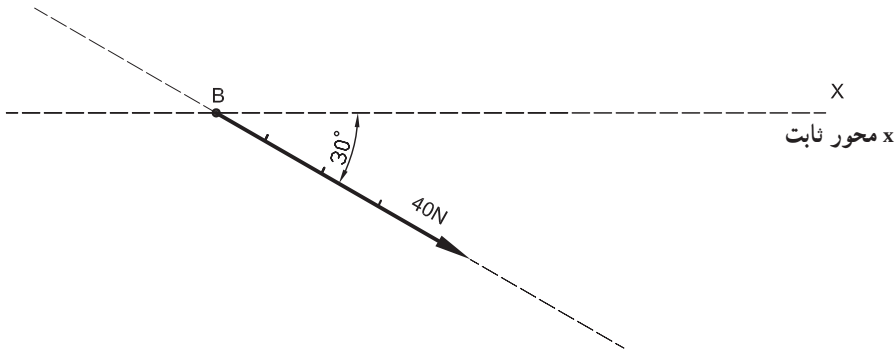
یادآوری: واحد نیرو، نیوتن (N) است. یک نیوتن مقدار نیرویی است که اگر به جرم یک کیلوگرم وارد شود، شتابی برابر یک متر بر مجذور ثانیه به آن می‌دهد.

۱ــ۴ــ نیروهای واقع در صفحه و نیروهای متقارب: به شکل ۲۷ توجه کنید. نیروی ۳۰ نیوتن بر نقطه‌ی مادی A در حالی که با محور ثابت x زاویه‌ی ۴۰ درجه ساخته شده، وارد گردیده است. طول پاره‌خط را سه سانتی‌متر در نظر گرفته‌ایم تا هر سانتی‌متر ۱۰ نیوتن را نشان دهد. پس ۳۰ نیوتن را با یک قطعه خط ۳ سانتی‌متری نشان داده‌ایم.



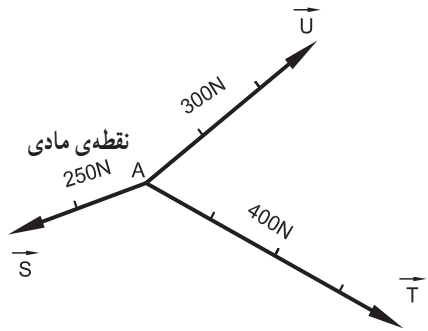
شکل ۲۷

به شکل ۲۸ توجه کنید. به نقطه‌ی مادی B نیروی ۴۰N (چهل نیوتن) در امتداد ۳۰ درجه، نسبت به محور ثابت x نیرو وارد می‌شود. طول پیکان از نقطه‌ی B تا نوک آن ۴ سانتی‌متر است. تمامی نیروهای وارد بر یک جسم را می‌توان با روش ذکر شده نشان داد.



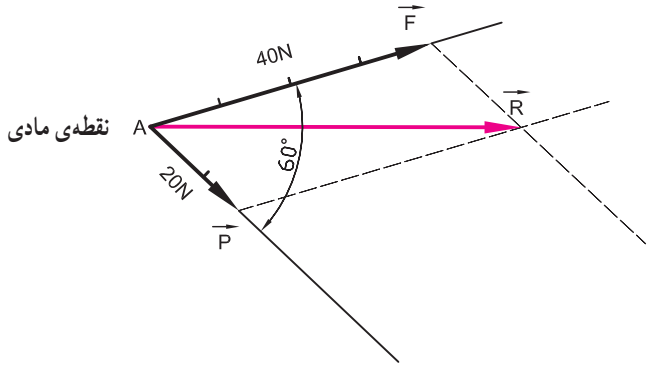
شکل ۲۸

مطابق شکل ۲۹ می‌گوییم به نقطه‌ی مادی A، سه نیروی هم صفحه وارد شده است. چون تمامی نیروها از نقطه‌ی A عبور کرده‌اند، آنها را نیروهای متقارب نیز می‌نامیم.



شکل ۲۹

۲ــ۴ــ برآیند دو نیرو و نمایش آن: دو نیروی $\vec{F}$ و $\vec{P}$ را در نظر بگیرید که $F = ۴۰N$ و $P = ۲۰N$ بر یک نقطه‌ی مادی A با زاویه‌ی ۶۰ درجه نسبت به هم (به‌صورت شکل ۳۰) وارد می‌شود.



شکل ۳۰

برای تعیین برآیند دو نیروی $\vec{F}$ و $\vec{P}$ از روش متوازی‌الاضلاع که در قسمت بردارها توضیح داده شد استفاده می‌کنیم. یادآوری می‌شود که قطر متوازی‌الاضلاع که از نقطه‌ی مادی A می‌گذرد، برآیند دو نیرو است.

برای به‌دست‌آوردن طول این قطر، کافی است از معادله‌ی زیر استفاده کنیم :

$$R^2 = F^2 + P^2 + 2FP\cos\alpha$$

اگر معادله‌ی کلی فوق را برای دو نیروی $\vec{F}$ و $\vec{P}$ به‌کار بریم، داریم :

$$R^2 = 40^2 + 20^2 + 2(40)(20)\cos 60^\circ$$

$$R^2 = 1600 + 400 + 2(40)(20)(0/5) = 2800$$

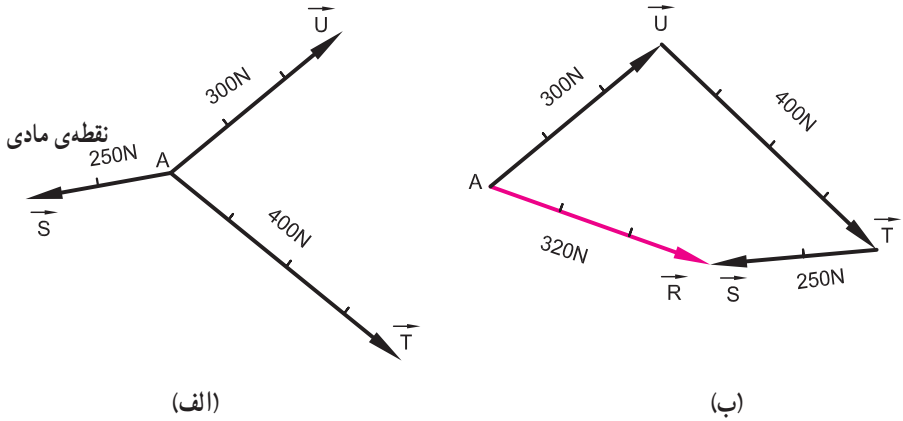
$$R = 52/92N \simeq 53N$$

قبلاً ملاحظه کردید که از طریق ترسیمی، برآیند را آسان‌تر می‌توان به‌دست آورد. همچنین برای تعیین قطر متوازی‌الاضلاع از طریق اندازه‌گیری طول آن با خط‌کش باید دقت کافی کرد تا مقدار خطا کم‌تر شود و با توجه به مقیاس ترسیم، اندازه‌ی آن به‌دست می‌آید.

۳ــ۴ــ برآیند چند نیروی متقارب و نمایش آن: به شکل ۳۱ (الف) توجه کنید. به نقطه‌ی مادی A، سه نیروی $\vec{U}$ ، $\vec{S}$ و $\vec{T}$ وارد شده و در شکل ۳۱ (ب)، برآیند ($\vec{R}$) آنها به‌طریق ترسیمی به‌دست آمده است.

همان‌طورکه از شکل ۳۱ پیداست، از نقطه‌ی A، هم‌سنگ $\vec{U}$ و از انتهای آن، هم‌سنگ $\vec{T}$ و از انتهای هم‌سنگ $\vec{T}$ نیز هم‌سنگ $\vec{S}$ را ترسیم کرده‌ایم ؛ سپس از نقطه‌ی A به انتهای آخرین بردار

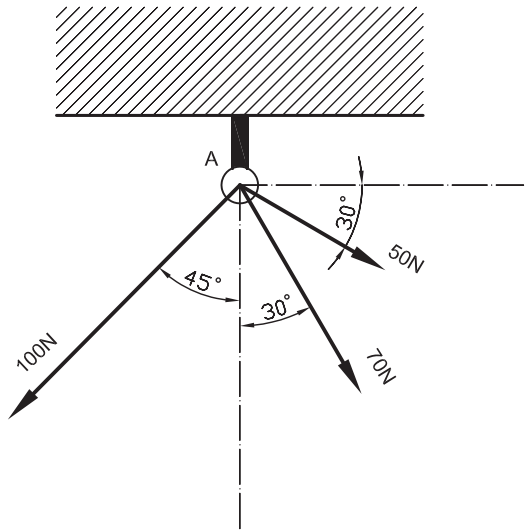
(هم‌سنگ $\vec{S}$) وصل نموده‌ایم تا برآیند این سه نیرو یعنی $\vec{R}$ حاصل شده است.



شکل ۳۱

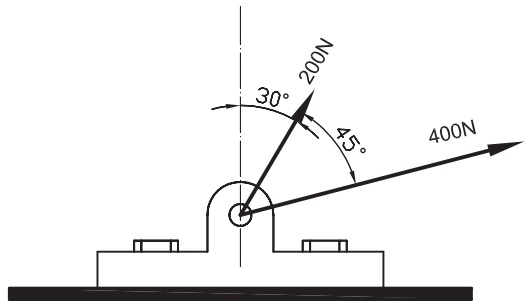
تمرین

۱ــ برآیند نیروهای وارد بر جسم را در نقطه‌ی A، مطابق شکل ۳۲ از طریق ترسیم به‌دست آورید.



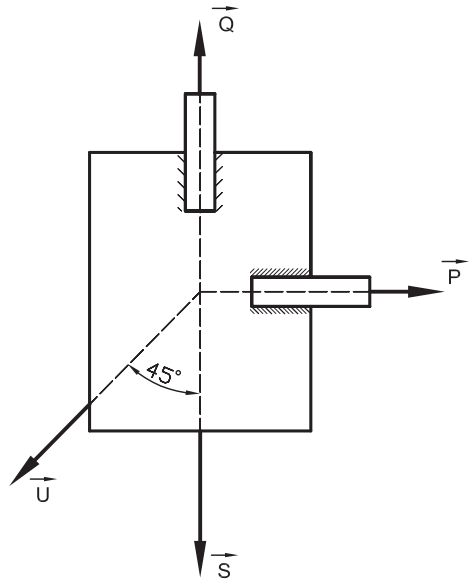
شکل ۳۲

۲ــ در شکل ۳۳ برآیند نیروها را به‌روش ترسیمی (یک بار به روش متوازی‌الاضلاع و بار دیگر به روش مثلث) و یک بار نیز به روش محاسباتی به‌دست آورید.



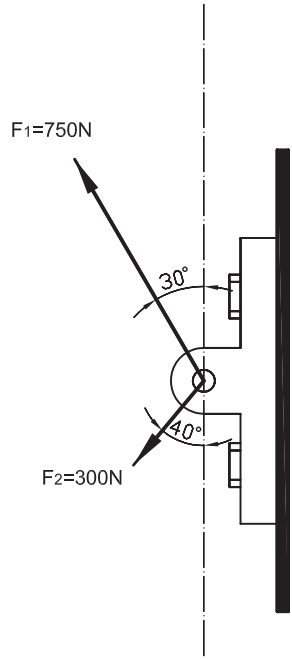
شکل ۳۳

۳ــ به جسمی، نیروهای $\vec{P}$ ، $\vec{Q}$ ، $\vec{S}$ و $\vec{U}$ مطابق شکل ۳۴ وارد شده است. اگر مقدار نیروها $P = ۱۰۰N$ ، $Q = ۳۰۰N$ ، $S = ۴۰۰N$ و $U = ۳۵۰N$ باشد، برآیند نیروها را به‌دست آورید.



شکل ۳۴

۴ــ در شکل ۳۵ برآیند دو نیروی $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ را به‌دست آورید.



شکل ۳۵

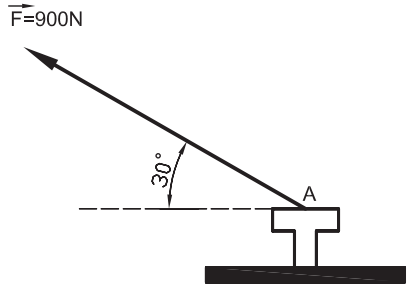
۵ــ برآیند را شرح دهید.

۶ــ بردار منفی را شرح دهید.

۷ــ حاصل ضرب یک بردار در یک عدد را شرح دهید.

۸ــ تعیین برآیند به روش ترسیمی و روش محاسباتی را در نظر گرفته مزایا و معایب هر روش را بنویسید.

۴ــ۴ــ مؤلفه‌های نیرو در مختصات قائم: در قسمت بردارها، تجزیه‌ی یک بردار را به دو مؤلفه ملاحظه کردید. حال که با بردار نیرو آشنا شدید، به ذکر چند مثال درباره‌ی تجزیه‌ی نیروها می‌پردازیم.



شکل ۳۶

مثال ۱: نیروی ۹۰۰ نیوتن بر جسمی در نقطه‌ی A مطابق شکل ۳۶ وارد می‌شود. مؤلفه‌های افقی و قائم نیرو را معین کنید.

حل: برای سادگی عملیات، شکل مسأله را ترسیم می‌کنیم (شکل ۳۷). محورهای مختصات را که همان محور xها و yها است، در نقطه‌ی A رسم کرده از نقطه‌ی A با زاویه‌ی ۳۰ درجه یک خط ترسیم می‌کنیم و روی آن هریک سانتی‌متر را معادل ۲۰۰ تیوتن فرض می‌نماییم. از آن جا که باید ۹۰۰ نیوتن رسم شود، یک پاره‌خط ۴/۵ سانتی‌متری لازم است. این پاره خط ۴/۵ سانتی‌متری ۹۰۰ نیوتن را نشان می‌دهد. پس نیروی $\vec{F}$ را ترسیم کرده‌ایم و از انتهای آن به‌موازات xها و yها ترسیم می‌کنیم تا مؤلفه‌های $\vec{F_x}$ و $\vec{F_y}$ به‌دست آید. اکنون اندازه‌ی آن‌ها را محاسبه می‌کنیم :

$$F_x = F\cos\alpha \qquad F_x = -۹۰۰\cos ۳۰^\circ = -۹۰۰(۰/۸۶۶) = -۷۷۹/۴۲N$$

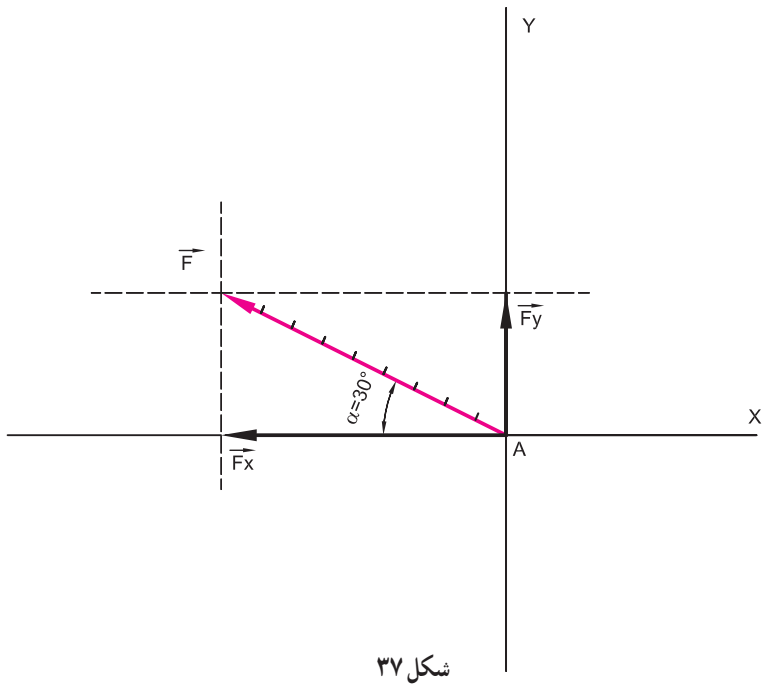
$$F_y = +F\sin\alpha = ۹۰۰\sin ۳۰^\circ = ۹۰۰(۰/۵)$$

$$F_y = ۴۵۰N$$ مؤلفه

بنابراین : $\vec{F_x} = -۷۷۹/۴۲\,\vec{i}$ مؤلفه‌ی افقی

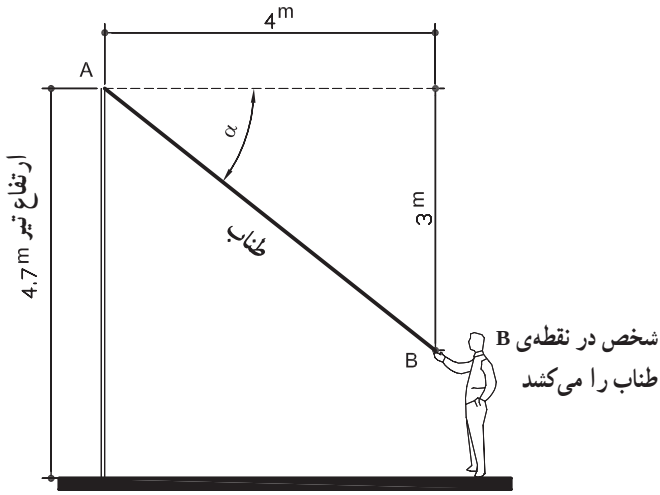
$\vec{F_y} = ۴۵۰\,\vec{j}$ مؤلفه‌ی قائم

نیروی $\vec{F}$ را به‌صورت $\vec{F} = -۷۷۹/۴۲\,\vec{i} + ۴۵۰\,\vec{j}$ نیز می‌توان نشان داد.



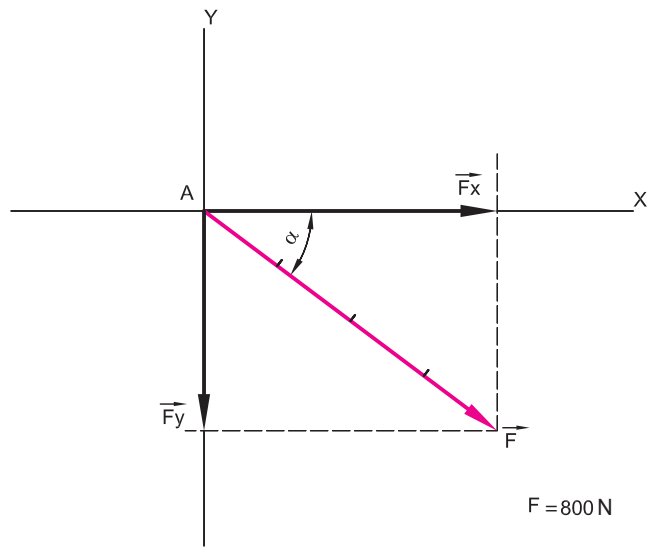
شکل ۳۷

مثال ۲: شخصی به نوک تیر چراغ برق نیروی ۸۰۰ نیوتن را به کمک طنابی (مطابق شکل ۳۸) وارد می‌کند و آن را می‌کشد. مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد از طرف طناب در نوک تیر را به‌دست آورید.



شکل ۳۸

حل: محورهای مختصات را در نوک تیر در نقطه‌ی A رسم می‌کنیم. مطابق شکل ۳۹ در روی امتداد طناب نیروی $\vec{F}$ را که اندازه‌ی آن ۸۰۰ نیوتن است، رسم می‌کنیم.



شکل ۳۹

برای تعیین $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ می‌توان از شکل ۳۹ استفاده کرد. برای این کار مقدار AB باید محاسبه شود. در مثلث قائم‌الزاویه داریم :

$$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow AB = \sqrt{25} = 5 \text{ متر}$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{AB} = \frac{3}{5} = 0/6 \quad \text{و} \quad \cos\alpha = \frac{4}{AB} = \frac{4}{5} = 0/8 \quad \text{و}$$

اکنون داریم :

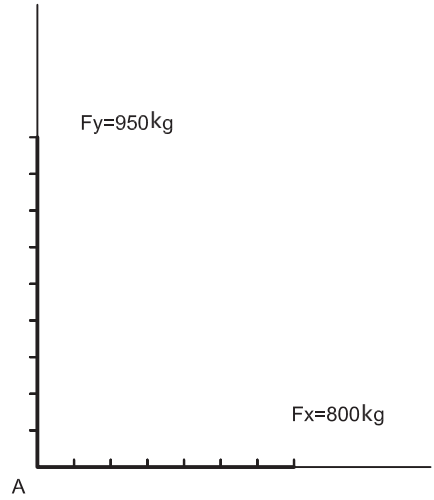
$$F_x = F.\cos\alpha = 800(0/8) = 640N$$

$$F_y = -F.\sin\alpha = -800(0/6) = -480N$$

پس مؤلفه‌ی قائم نیرو ۴۸۰ نیوتن و رو به پایین بر نقطه‌ی A وارد می‌شود و مؤلفه‌ی افقی آن ۶۴۰ نیوتن است. نیروی $\vec{F}$ را با کمک مؤلفه‌های آن به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\vec{F} = 640\vec{i} - 480\vec{j}$$

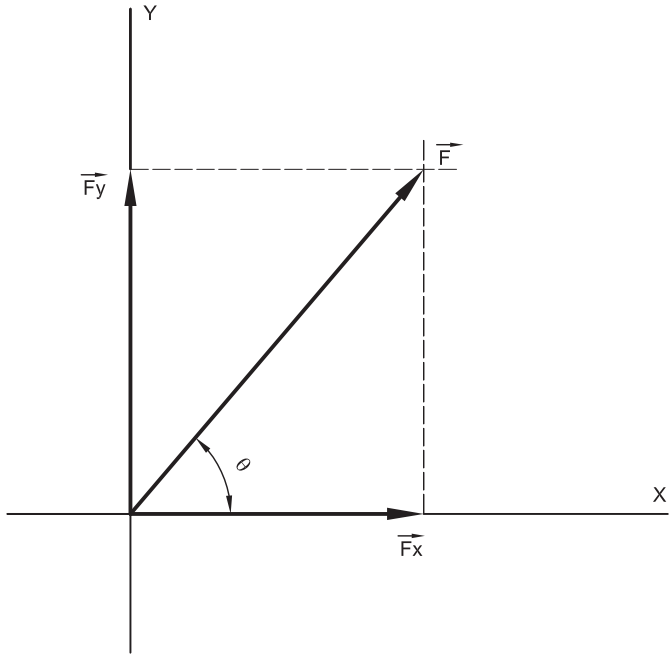
مثال ۳: فرض کنید بر نقطه‌ی A از شکل ۴۰ نیروی $\vec{F}$ به‌صورت $\vec{F} = 800\vec{i} - 950\vec{j}$ وارد می‌شود که اندازه‌ی مؤلفه‌های آن بر حسب کیلوگرم است. مقدار اندازه‌ی نیروی $\vec{F}$ و همچنین زاویه‌ی θ را که امتداد نیرو با محور xها می‌سازد به‌دست آورید.



شکل ۴۰

حل: محور xها و yها را در نقطه‌ی A ترسیم می‌کنیم (مطابق شکل ۴۱).

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{۹۵۰}{۸۰۰} = ۱/۱۸۷۵$$



شکل ۴۱

با استفاده از جدول مثلثاتی داریم: $\theta = ۴۹/۹^\circ$ یا ۴۹° و $۵۴'$

مقدار اندازه‌ی F برابر است با : $F^۲ = ۹۵۰^۲ + ۸۰۰^۲$

پس $F = ۱۲۴۱/۹۷$ (کیلوگرم) . البته از رابطه‌ی $\sin\theta = \frac{F_y}{F}$ نیز می‌توان به‌صورت $F = \frac{F_y}{\sin\theta}$ مقدار F را به‌دست آورد.

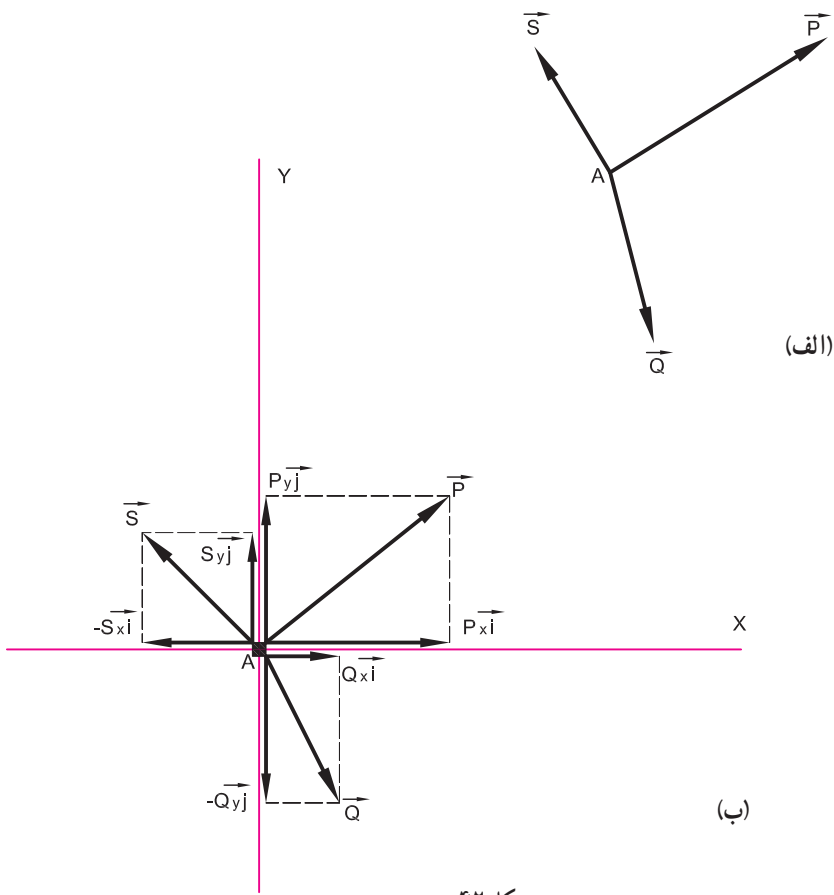
$$F = \frac{۹۵۰}{\sin ۴۹/۹} = ۱۲۴۱/۹۷\text{kgf}$$

نکته‌ی مهم: باید به‌طور دقیق، اندازه‌ی بردار و خودِ بردار را بشناسید.

۵ــ۴ــ جمع نیروها به‌وسیله‌ی مؤلفه‌ی آن‌ها: فرض کنید بر نقطه‌ی A سه نیروی $\vec{P}$ ، $\vec{Q}$ و

$\vec{S}$ مطابق شکل ۴۲ (الف) وارد شده است. در گذشته نحوه‌ی تعیین برآیند را آموختید. در آن جا گفته شد که از طریق ترسیم نیروها به دنبال هم، به طریق هم‌سنگ و وصل کردن ابتدای اوّلین نیرو به‌انتهای آخرین نیروی هم‌سنگ رسم شده، بردار برآیند به‌دست می‌آید که به این روش، روش چندضلعی می‌گویند. اگر تعداد نیروها دو تا باشد به‌دست‌آوردن برآیند با کمک متوازی‌الاضلاع انجام می‌شود. البته اگر همین کار را با کمک مثلث انجام دهیم آسان‌تر از متوازی‌الاضلاع است ؛ چون تنها نصف متوازی‌الاضلاع ترسیم می‌کنیم. اگر تعداد نیروها سه یا بیش‌تر باشد تعیین برآیند به‌روش چندضلعی، یعنی ترسیم آنها به روش هم‌سنگ به دنبال هم آسان‌تر است.

راه حل دیگری که می‌توان برای تعیین برآیند به‌دست آورد، آن است که مؤلفه‌های آنها را روی محور xها و yها جمع کنیم تا بردار برآیند حاصل شود.



شکل ۴۲

در شکل ۴۲ (ب) دوباره سه بردار $\vec{P}$ ، $\vec{Q}$ و $\vec{S}$ را در نقطه‌ی A در نظر گرفته‌ایم و در شکل ۴۲(ب) محورهای x و y را در نقطه‌ی A ترسیم کرده مؤلفه‌های هر کدام را رسم نموده‌ایم. برای آن‌که شکل آسان‌تر دیده شود، مؤلفه‌ها را روی هم ترسیم نکرده‌ایم ؛ اما در واقع آنها را باید روی هم رسم کرد. توجه کنید روی محور xها سه مؤلفه‌ی نیروهای $P_x\vec{i}$ و $Q_x\vec{i}$ و $-S_x\vec{i}$ و روی محور yها در شکل ۴۲ (ب) سه مؤلفه‌ی $P_y\vec{j}$ و $S_y\vec{j}$ و $-Q_y\vec{j}$ را باید با یکدیگر جمع کنیم ؛ پس روی محور xها داریم :

$$Q_x\vec{i}+P_x\vec{i}-S_x\vec{i}$$

مقدار فوق را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم :

$$(Q_x+P_x-S_x)\vec{i}\cdots \qquad (a)$$

و روی محور yها داریم :

$$P_y\vec{j}+S_y\vec{j}-Q_y\vec{j}$$

و آن را می‌توانیم به‌صورت زیر نیز بنویسیم :

$$(P_y+S_y-Q_y)\vec{j}\cdots \qquad (b)$$

ملاحظه می‌کنید که داخل پرانتز در معادله‌های (a) و (b) عدد است. پس در واقع معادله‌ی (a) مؤلفه‌ی افقی بردار برآیند و معادله‌ی (b) مؤلفه‌ی قائم بردار برآیند است. بدین ترتیب می‌توانیم بردار برآیند را مثلاً $\vec{R}$ بنامیم و آن را به‌صورت زیر بنویسیم :

$$\vec{R}=(Q_x+P_x-S_x)\vec{i}+(P_y+S_y-Q_y)\vec{j}$$

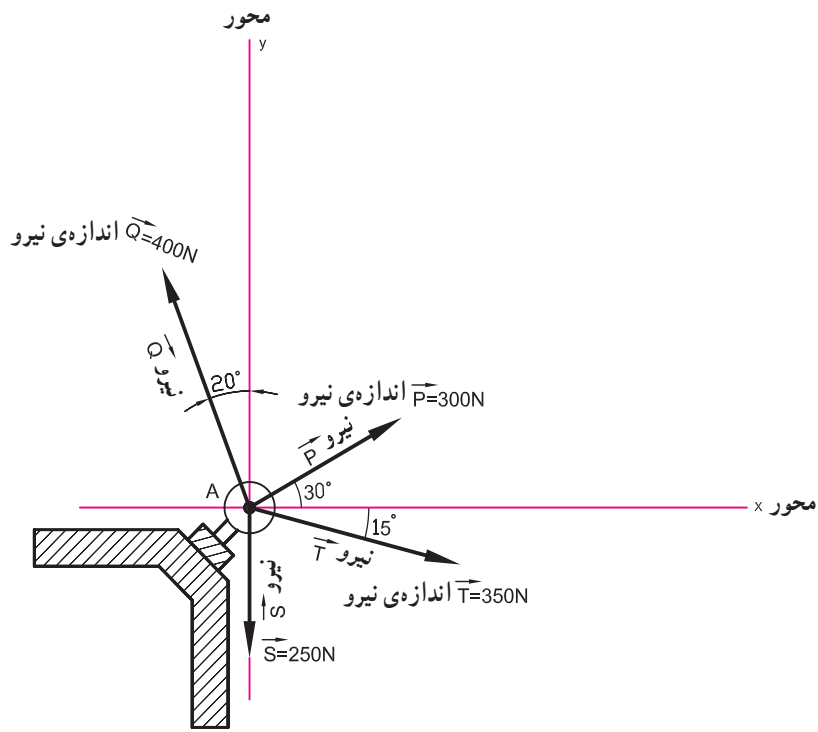
برای راحتی عملیات می‌توانیم جدول زیر را تهیه کنیم و همان کارهای بالا را در جدول انجام دهیم. با توجه به شکل ۴۲ (ب) داریم :

نیرو	مقدار آن یا اندازه‌ی نیرو	اندازه‌ی مؤلفه روی محور xها	اندازه‌ی مؤلفه روی محور yها
$\vec{Q}$	Q	Q_x	$-Q_y$
$\vec{P}$	P	P_x	P_y
$\vec{S}$	S	$-S_x$	S_y
جمع هر ستون	ندارد	$Q_x+P_x-S_x$	$-Q_y+P_y+S_y$
$\vec{R}$	R	$R_x=(Q_x+P_x-S_x)$	$R_y=(P_y+S_y-Q_y)$

پس با توجه به جدول، $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$ است.

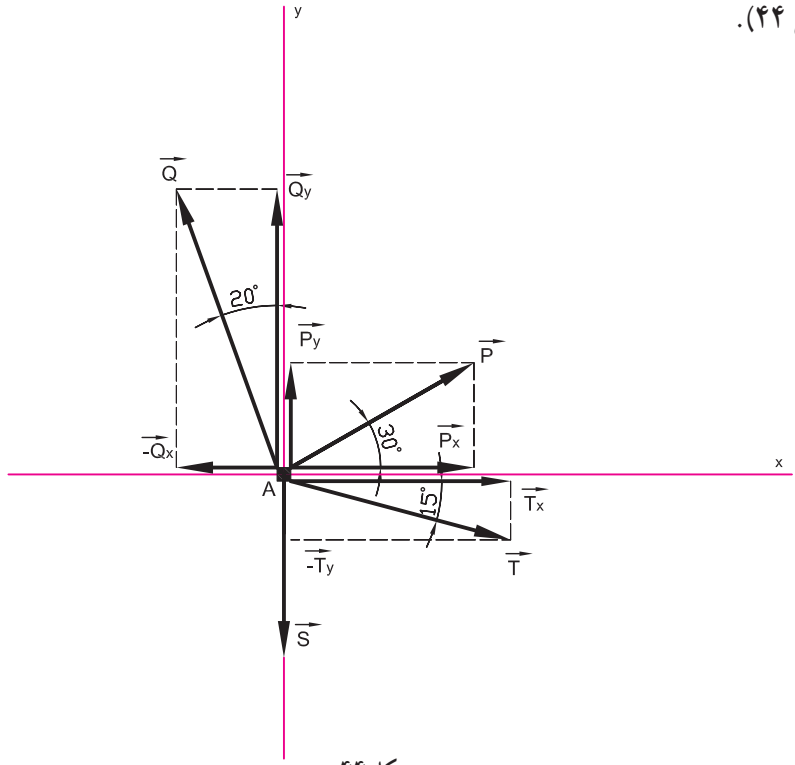
مزیت کار به کمک جدول در آن است که اگر تعداد نیروها زیاد باشد، هرکدام از آنها را در یک خط می‌نویسیم و در نهایت در ستون مؤلفه‌ها آنها را با هم جمع می‌کنیم. نتیجه‌ی کار با روش چندضلعی یا جمع نیروها به‌وسیله‌ی مؤلفه‌های آن هیچ‌گونه تفاوتی ندارد ؛ اما در بسیاری موارد، روش جمع نیروها به‌وسیله‌ی مؤلفه‌های آنها در جدول کار را آسان‌تر می‌کند. لازمه‌ی این کار آن است که اوّل هر نیرو را به مؤلفه‌های آن تجزیه کرده باشیم.

مثال: چهار نیرو مطابق شکل ۴۳ به نقطه‌ی A وارد می‌شود ؛ برآیند آنها را به‌دست آورید. روی شکل محورهای x و y نیز نشان داده شده‌اند. محاسبات را تا دو رقم اعشاری ادامه دهید.



شکل ۴۳

حل: برای درک بهتر مسأله، شکل آن را ترسیم کرده مؤلفه‌های هر نیرو را اوّل به‌دست می‌آوریم (شکل ۴۴).



شکل ۴۴

اکنون نیروها را یکی یکی تجزیه کرده مؤلفه‌های آن را حساب می‌کنیم :

محاسبه برای $\vec{P}$: توجه کنید مقدار $P = ۳۰۰$ نیوتن است و با محور xها زاویه‌ی ۳۰ درجه ساخته است.

داریم :

$$\vec{P} = \vec{P_x} + \vec{P_y} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j}$$

و

$$\vec{P_x} = P_x\vec{i} \quad \text{و} \quad \vec{P_y} = P_y\vec{j}$$

و مقادیر :

$$P_x = P.\cos ۳۰^\circ = ۳۰۰\cos ۳۰^\circ$$

$$\cos ۳۰^\circ = ۰/۸۶۶$$

$P_x = ۳۰۰(۰/۸۶۶) = ۲۵۹/۸۱$ نیوتن

$P_y = P\sin ۳۰ = ۳۰۰(۰/۵) = ۱۵۰$ نیوتن

پس اگر مقادیر را در معادله‌ی $\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j}$ قرار دهیم داریم :

$\vec{P} = ۲۵۹/۸۱\vec{i} + ۱۵۰\vec{j}$

محاسبه برای $\vec{Q}$: چون $\vec{Q}$ در ربع دوم است، پس Q_y آن مثبت و Q_x آن منفی است. برای $\vec{Q}$ هم داریم :

$\vec{Q} = \vec{Q_x} + \vec{Q_y} = -Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j}$

$\vec{Q_x} = -Q_x\vec{i}$ $\qquad -Q_x = -Q\sin ۲۰^\circ$

$-Q_x = -۴۰۰(۰/۳۴۲) = -۱۳۶/۸۱\,N$

$\vec{Q_y} = Q_y\vec{j}$ $\qquad Q_y = Q.\cos ۲۰^\circ = ۴۰۰(۰/۹۳۹)$

$Q_y = ۳۷۵/۸۸\,N$

با داشتن $-Q_x = -۱۳۶/۸۱\,N$ و $Q_y = ۳۷۵/۸۸\,N$ نیروی $\vec{Q}$ به‌صورت مؤلفه های آن به‌صورت زیر است :

$\vec{Q} = -۱۳۶/۸۱\vec{i} + ۳۷۵/۸۸\vec{j}$

محاسبه برای $\vec{S}$: چون $\vec{S}$ روی محور yها است، پس مؤلفه‌ی x آن مساوی صفر است و مؤلفه‌ی S_y برابر S است ؛ یعنی $S_y = -۲۵۰\,N$

پس برای $\vec{S}$ داریم : $\vec{S} = ۰\vec{i} - ۲۵۰\vec{j}$

که می‌نویسیم : $\vec{S} = -۲۵۰\vec{j}$

محاسبه برای $\vec{T}$: چون $\vec{T}$ در ربع چهارم محورهای x و y است، پس T_x آن مثبت و T_y آن منفی است.

$T_x = T\cos ۱۵^\circ = ۳۵۰\cos ۱۵ = ۳۵۰(۰/۹۶۵۹) = ۳۳۸/۱۰\,N$

$T_y = -T\sin ۱۵^\circ = -۳۵۰\sin(۱۵) = -۳۵۰(۰/۲۵۸۸) = -۹۰/۵۹\,N$

$\vec{T} = ۳۳۸/۱۰\vec{i} - ۹۰/۵۹\vec{j}$

اکنون جدول آن‌را پر می‌کنیم :

نیرو	اندازه‌ی نیرو	مؤلفه روی محور xها	مؤلفه روی محور yها
$\vec{P}$	۳۰۰	۲۵۹/۸۱	۱۵۰
$\vec{Q}$	۴۰۰	−۱۳۶/۸۱	۳۷۵/۸۸
$\vec{S}$	۲۵۰	۰	−۲۵۰
$\vec{T}$	۳۵۰	۳۳۸/۱۰	−۹۰/۵۹
جمع	ندارد	Σ ۴۶۱/۱۰	Σ ۱۸۵/۲۹

پس بردار برآیند $\vec{R} = ۴۶۱/۱۰\vec{i} + ۱۸۵/۲۹\vec{j}$ است. در ضمن Σ (بخوانید زیگما) به‌عنوان علامت جمع کل آن ستون در نظر گرفته شده است.

در این جا می‌خواهیم مقدار R را حساب کنیم ؛ پس :

$$R^۲ = R_x^۲ + R_y^۲ = (۴۶۱/۱۰)^۲ + (۱۸۵/۲۹)^۲$$

$$R^۲ = ۲۱۲۶۱۳/۲۱ + ۳۴۳۳۲/۳۸۴۱ = ۲۴۶۹۴۵/۵۹۴۱$$

بنابراین اندازه‌ی $\vec{R}$ برابر است با : $R = ۴۹۶/۹۴N$

و زاویه‌ی آن با محور xها

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$$

$$\tan\theta = \frac{۱۸۵/۲۹}{۴۶۱/۱۰} = ۰/۴۰۱۸$$

$$\tan\theta = \tan ۲۱/۸۹^\circ$$

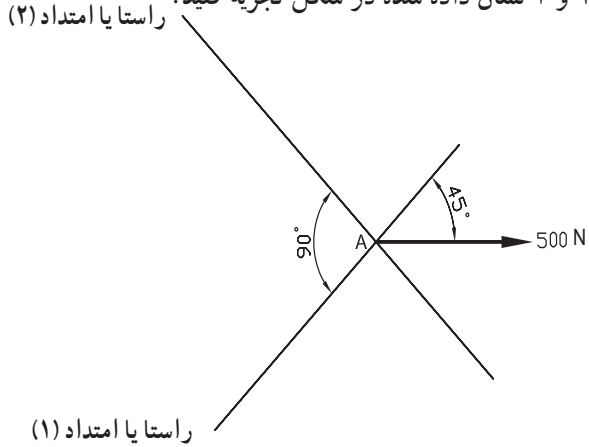
$$\theta = ۲۱/۸۹^\circ = ۲۱^\circ ۵۳'$$

مشاهده می‌شود که $\vec{R}$ با محور xها زاویه‌ی $۲۱^\circ ۵۳'$ می‌سازد و اندازه‌ی آن ۴۹۶/۹۴ نیوتن است. لازم به تذکر است که در این گونه مسایل باید زاویه‌ی برآیند با محور xها یا yها را محاسبه کرد تا جهت آن نیز قابل تشخیص باشد.

تمرین

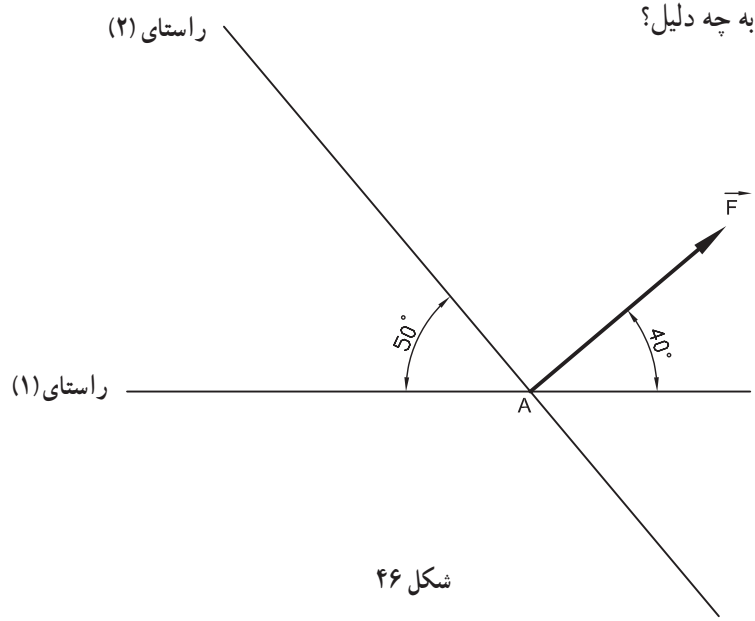
۱ــ مطابق شکل ۴۵ به نقطه‌ی مادی A نیروی $\vec{F}$ به مقدار ۵۰۰ نیوتن وارد می‌شود. این نیرو

را در امتداد دو راستای ۱ و ۲ نشان داده شده در شکل تجزیه کنید.



شکل ۴۵

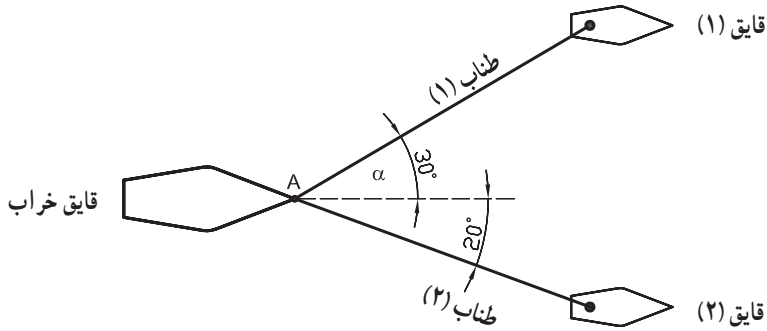
۲ــ در شکل ۴۶ نیروی $\vec{F}$ به مقدار ۷۰۰ نیوتن بر نقطه‌ی مادی A وارد می‌شود. آیا ممکن است آن را روی دو امتداد داده شده تجزیه کنیم ؛ به‌نحوی که مؤلفه‌ی نیرو در امتداد (۱) برابر با ۳۰۰N شود؟ به چه دلیل؟



شکل ۴۶

۳ــ دو قایق کوچک در شکل ۴۷ به کمک طناب، قایق دیگری را می‌کشند. هرگاه برآیند نیروی وارد شده از دو قایق به‌وسیله‌ی طناب‌های ۱ و ۲ برابر با ۷۰۰N و در امتداد محور قایق خراب باشد،

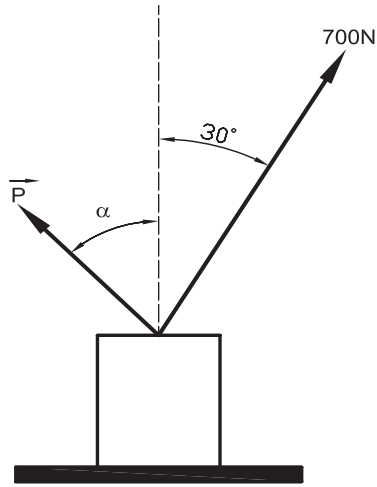
کشش وارد بر هر طناب را حساب کنید.



شکل ۴۷

۴ــ در مسأله‌ی ۳ فرض کنید زاویه‌ی α معلوم نباشد. آن‌گاه مقدار زاویه‌ی α را چنان تعیین کنید که کشش در طناب قایق ۱ به حداقل ممکن برسد.

۵ــ جسمی را به‌وسیله‌ی دو نیروی نشان داده‌شده مطابق شکل ۴۸ می‌خواهیم بلند کنیم.

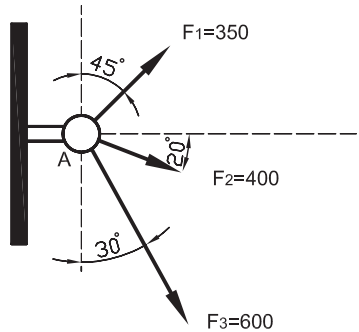


شکل ۴۸

اگر برآیند دو نیرو به مقدار ۱۲۰۰ نیوتن و در امتداد قائم باشد، مقدار نیروی $\vec{P}$ و زاویه‌ی α را محاسبه کنید.

۶ــ مقدار برآیند را با استفاده از مؤلفه‌های نیروها در امتداد محور xها و yها برای شکل ۴۹

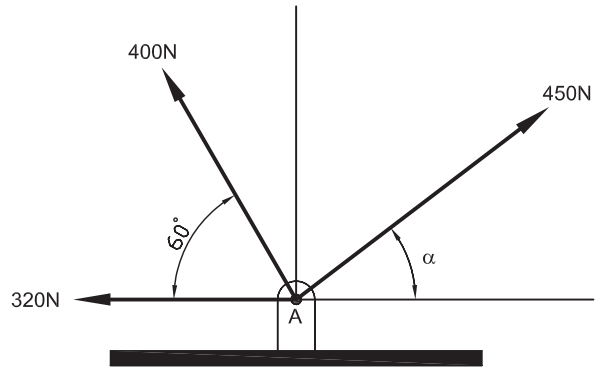
به‌دست آورید.



شکل ۴۹

توجه: در مسأله‌ی ۶ باید برآیند و زاویه‌ی آن را با محور xها و yها به‌دست آورید.

۷ــ نیروهای نشان‌داده شده به نقطه‌ی مادی A وارد می‌شود. آیا ممکن است برآیند سه نیرو قائم و در امتداد محور yها باشد؟ چرا؟ در صورت مثبت بودن پاسخ مقدار زاویه‌ی α چه‌قدر باید باشد؟ (این مسأله را از طریق تجزیه‌ی نیروها در امتداد محور xها و yها حل کنید).

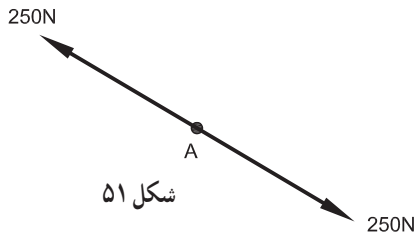


شکل ۵۰

۵ــ تعادل نقطه‌ی مادی

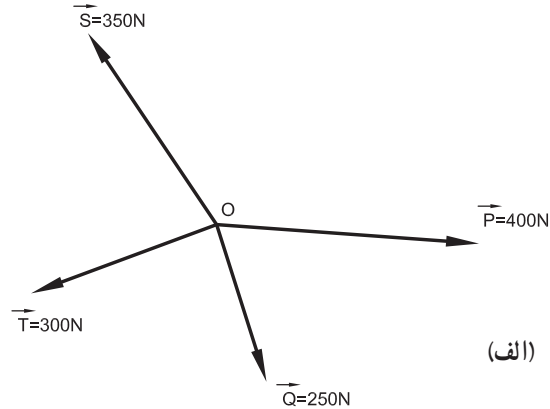
اگر در مطالب مربوط به جمع برداری و برآیند دقت کنید، ملاحظه خواهید کرد که به روش‌های مختلفی برآیند را به‌دست آوردیم. اگر برآیند به‌دست‌آمده صفر باشد، می‌گویند نقطه‌ی مادی در حال تعادل قرار دارد.

اگر برآیند تمامی نیروهای وارد شده بر نقطه‌ی مادی، صفر شد، نقطه‌ی مادی در وضع تعادل قرار دارد.



شکل ۵۱

فرض کنید بر یک نقطه‌ی مادی دو نیرو وارد شده و در حالت تعادلی قرار دارد ؛ پس باید این دو نیرو از لحاظ مقدار مساوی و از لحاظ جهت مخالف باشند (شکل ۵۱). به این ترتیب برآیند این دو نیرو صفر است. در شکل ۵۲ (الف) نیروهای $\vec{P}$ ، $\vec{Q}$ ، $\vec{T}$ و $\vec{S}$ به نقطه‌ی مادی O وارد شده‌اند و در شکل ۵۲ (ب) برآیند آنها به‌روش چندضلعی به‌دست آمده



شکل ۵۲

است. ملاحظه می‌شود که در شکل ۵۲ (ب) از نقطه‌ی O بردارهای هم‌سنگ با $\vec{P}$ ، $\vec{Q}$ ، $\vec{T}$ و $\vec{S}$ ترسیم شده است. در این شکل ابتدای اوّلین بردار و انتهای آخرین بردار هم‌سنگ روی هم قرار گرفته است ؛ یعنی برآیند آنها صفر است و نقطه‌ی مادی در حالت تعادل قرار دارد. در چنین حالتی چندضلعی بسته‌ای ایجاد می‌شود ؛ یعنی در حالتی که چندضلعی تعیین برآیند به خودش بسته شود، برآیند صفر است و جسم در حال تعادل قرار دارد. پس به‌طورکلی اگر $\vec{R}=0$ باشد، نقطه‌ی مادی در حال تعادل است ؛ یعنی :

$$\vec{R}=\sum\vec{F}=0$$

$\sum\vec{F}=0$ یعنی جمع تمامی نیروها مساوی صفر است.

اگر نیروها را روی محور xها و yها تجزیه کنیم، خواهیم داشت :

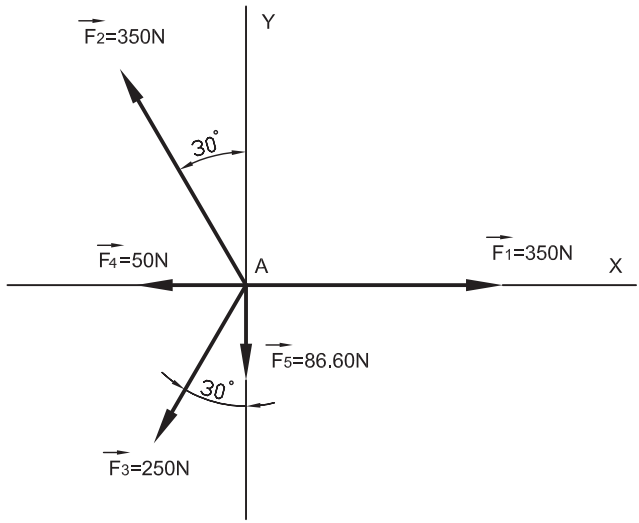
$$\sum(F_x\vec{i}+F_y\vec{j})=0$$

یعنی

$$\sum F_x\vec{i}+\sum F_y\vec{j}=0$$

پس باید مقادیر $\sum F_y=0$ و $\sum F_x=0$ هر دو مساوی صفر باشند تا نقطه‌ی مادی در حال تعادل قرار گیرد. در ترسیم چندضلعی برای تعیین برآیند اگر ابتدای اوّلین بردار و انتهای آخرین بردار بر هم منطبق باشند، چندضلعی به خودش بسته است و برآیند آن صفر است.

مثال: در شکل ۵۳ آیا نقطه‌ی مادی A در حال تعادل است یا خیر؟



شکل ۵۳

حل: در شکل ۵۳ نیروهای $\vec{F_1}$، $\vec{F_2}$، $\vec{F_3}$، $\vec{F_4}$ و $\vec{F_5}$ به نقطه‌ی مادی A وارد شده‌اند. جدول آن‌را به‌دست می‌آوریم :

نیرو	اندازه	ها F_x	ها F_y
$\vec{F_1}$	۳۵۰	۳۵۰	۰
$\vec{F_2}$	۳۵۰	−۱۷۵	۳۰۳/۱۱
$\vec{F_3}$	۲۵۰	−۱۲۵	−۲۱۶/۵۱
$\vec{F_4}$	۵۰	−۵۰	۰
$\vec{F_5}$	۸۶/۶۰	۰	−۸۶/۶۰
ΣF	ندارد	۳۵۰ − ۱۷۵ − ۱۲۵ −۵۰ + ۰ = ۰ $\Sigma F_x = ۰$	۳۰۳/۱۱ − ۲۱۶/۵۱ −۸۶/۶ = ۰ $\Sigma F_y = ۰$

در جدول فوق ملاحظه می‌شود که ΣF_x روی محور xها صفر و ΣF_y جمع مؤلفه‌های نیرو روی محور yها نیز صفر است ؛ پس نقطه‌ی مادی A در حالت تعادل قرار می‌گیرد.

جدول‌های نسبت‌های مثلثاتی

درجه	سینوس 0° ... 45° — دقیقه							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89
1	0.0175	0.0204	0.0233	0.0262	0.0291	0.0320	0.0349	88
2	0.0349	0.0378	0.0407	0.0436	0.0465	0.0494	0.0523	87
3	0.0523	0.0552	0.0581	0.0610	0.0640	0.0669	0.0698	86
4	0.0698	0.0727	0.0756	0.0785	0.0814	0.0843	0.0872	85
5	0.0872	0.0901	0.0929	0.0958	0.0987	0.1016	0.1045	84
6	0.1045	0.1074	0.1103	0.1132	0.1161	0.1190	0.1219	83
7	0.1219	0.1248	0.1276	0.1305	0.1334	0.1363	0.1392	82
8	0.1392	0.1421	0.1449	0.1478	0.1507	0.1536	0.1564	81
9	0.1564	0.1593	0.1622	0.1650	0.1679	0.1708	0.1736	**80**
10	0.1736	0.1765	0.1794	0.1822	0.1851	0.1880	0.1908	79
11	0.1908	0.1937	0.1965	0.1994	0.2022	0.2051	0.2079	78
12	0.2079	0.2108	0.2136	0.2164	0.2193	0.2221	0.2250	77
13	0.2250	0.2278	0.2306	0.2334	0.2363	0.2391	0.2419	76
14	0.2419	0.2447	0.2476	0.2504	0.2532	0.2560	0.2588	75
15	0.2588	0.2616	0.2644	0.2672	0.2700	0.2728	0.2756	74
16	0.2756	0.2784	0.2812	0.2840	0.2868	0.2896	0.2924	73
17	0.2924	0.2952	0.2979	0.3007	0.3035	0.3062	0.3090	72
18	0.3090	0.3118	0.3145	0.3173	0.3201	0.3228	0.3256	71
19	0.3256	0.3283	0.3311	0.3338	0.3365	0.3393	0.3420	**70**
20	0.3420	0.3448	0.3475	0.3502	0.3529	0.3557	0.3584	69
21	0.3584	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719	0.3746	68
22	0.3746	0.3773	0.3800	0.3827	0.3854	0.3881	0.3907	67
23	0.3907	0.3934	0.3961	0.3987	0.4014	0.4041	0.4067	66
24	0.4067	0.4094	0.4120	0.4147	0.4173	0.4200	0.4226	65
25	0.4226	0.4253	0.4279	0.4305	0.4331	0.4358	0.4384	64
26	0.4384	0.4410	0.4436	0.4462	0.4488	0.4514	0.4540	63
27	0.4540	0.4566	0.4592	0.4617	0.4643	0.4669	0.4695	62
28	0.4695	0.4720	0.4746	0.4772	0.4797	0.4823	0.4848	61
29	0.4848	0.4874	0.4899	0.4924	0.4950	0.4975	0.5000	**60**
30	0.5000	0.5025	0.5050	0.5075	0.5100	0.5125	0.5150	59
31	0.5150	0.5175	0.5200	0.5225	0.5250	0.5275	0.5299	58
32	0.5299	0.5324	0.5348	0.5373	0.5398	0.5422	0.5446	57
33	0.5446	0.5471	0.5495	0.5519	0.5544	0.5568	0.5592	56
34	0.5592	0.5616	0.5640	0.5664	0.5688	0.5712	0.5736	55
35	0.5736	0.5760	0.5783	0.5807	0.5831	0.5854	0.5878	54
36	0.5878	0.5901	0.5925	0.5948	0.5972	0.5995	0.6018	53
37	0.6018	0.6041	0.6065	0.6088	0.6111	0.6134	0.6157	52
38	0.6157	0.6180	0.6202	0.6225	0.6248	0.6271	0.6293	51
39	0.6293	0.6316	0.6338	0.6361	0.6383	0.6406	0.6428	**50**
40	0.6428	0.6450	0.6472	0.6494	0.6517	0.6539	0.6561	49
41	0.6561	0.6583	0.6604	0.6626	0.6648	0.6670	0.6691	48
42	0.6691	0.6713	0.6734	0.6756	0.6777	0.6799	0.6820	47
43	0.6820	0.6841	0.6862	0.6884	0.6905	0.6926	0.6947	46
44	0.6947	0.6967	0.6988	0.7009	0.7030	0.7050	0.7071	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	درجه

دقیقه — کسینوس 45° ... 90°

درجه	سینوس 45°...90°	دقیقه →						
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45	0.7071	0.7092	0.7112	0.7133	0.7153	0.7173	0.7193	44
46	0.7193	0.7214	0.7234	0.7254	0.7274	0.7294	0.7314	43
47	0.7314	0.7333	0.7353	0.7373	0.7392	0.7412	0.7431	42
48	0.7431	0.7451	0.7470	0.7490	0.7509	0.7528	0.7547	41
49	0.7547	0.7566	0.7585	0.7604	0.7623	0.7642	0.7660	**40**
50	0.7660	0.7679	0.7698	0.7716	0.7735	0.7753	0.7771	39
51	0.7771	0.7790	0.7808	0.7826	0.7844	0.7862	0.7880	38
52	0.7880	0.7898	0.7916	0.7934	0.7951	0.7969	0.7986	37
53	0.7986	0.8004	0.8021	0.8039	0.8056	0.8073	0.8090	36
54	0.8090	0.8107	0.8124	0.8141	0.8158	0.8175	0.8192	35
55	0.8192	0.8208	0.8225	0.8241	0.8258	0.8274	0.8290	34
56	0.8290	0.8307	0.8323	0.8339	0.8355	0.8371	0.8387	33
57	0.8387	0.8403	0.8418	0.8434	0.8450	0.8465	0.8480	32
58	0.8480	0.8496	0.8511	0.8526	0.8542	0.8557	0.8572	31
59	0.8572	0.8587	0.8601	0.8616	0.8631	0.8646	0.8660	**30**
60	0.8660	0.8675	0.8689	0.8704	0.8718	0.8732	0.8746	29
61	0.8746	0.8760	0.8774	0.8788	0.8802	0.8816	0.8829	28
62	0.8829	0.8843	0.8857	0.8870	0.8884	0.8897	0.8910	27
63	0.8910	0.8923	0.8936	0.8949	0.8962	0.8975	0.8988	26
64	0.8988	0.9001	0.9013	0.9026	0.9038	0.9051	0.9063	25
65	0.9063	0.9075	0.9088	0.9100	0.9112	0.9124	0.9135	24
66	0.9135	0.9147	0.9159	0.9171	0.9182	0.9194	0.9205	23
67	0.9205	0.9216	0.9228	0.9239	0.9250	0.9261	0.9272	22
68	0.9272	0.9283	0.9293	0.9304	0.9315	0.9325	0.9336	21
69	0.9336	0.9346	0.9356	0.9367	0.9377	0.9387	0.9397	**20**
70	0.9397	0.9407	0.9417	0.9426	0.9436	0.9446	0.9455	19
71	0.9455	0.9465	0.9474	0.9483	0.9492	0.9502	0.9511	18
72	0.9511	0.9520	0.9528	0.9537	0.9546	0.9555	0.9563	17
73	0.9563	0.9572	0.9580	0.9588	0.9596	0.9605	0.9613	16
74	0.9613	0.9621	0.9628	0.9636	0.9644	0.9652	0.9659	15
75	0.9659	0.9667	0.9674	0.9681	0.9689	0.9696	0.9703	14
76	0.9703	0.9710	0.9717	0.9724	0.9730	0.9737	0.9744	13
77	0.9744	0.9750	0.9757	0.9763	0.9769	0.9775	0.9781	12
78	0.9781	0.9787	0.9793	0.9799	0.9805	0.9811	0.9816	11
79	0.9816	0.9822	0.9827	0.9833	0.9838	0.9843	0.9848	**10**
80	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872	0.9877	9
81	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	8
82	0.9903	0.9907	0.9911	0.9914	0.9918	0.9922	0.9925	7
83	0.9925	0.9929	0.9932	0.9936	0.9939	0.9942	0.9945	6
84	0.9945	0.9948	0.9951	0.9954	0.9957	0.9959	0.9962	5
85	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9974	0.9976	4
86	0.9976	0.9978	0.9980	0.9981	0.9983	0.9985	0.9986	3
87	0.9986	0.9988	0.9989	0.9990	0.9992	0.9993	0.9994	2
88	0.9994	0.9995	0.9996	0.9997	0.9997	0.9998	0.99985	1
89	0.99985	0.99989	0.99993	0.99996	0.99998	0.99999	1.0000	**0**
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	درجه ↑
	← دقیقه							
	کسینوس 0°...45°							

تانژانت $0^\circ \ldots 45^\circ$ 0′ 10′ 20′ 30′ 40′ 50′ 60′ دقیقه — درجه

درجه	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89
1	0.0175	0.0204	0.0233	0.0262	0.0291	0.0320	0.0349	88
2	0.0349	0.0378	0.0407	0.0437	0.0466	0.0495	0.0524	87
3	0.0524	0.0553	0.0582	0.0612	0.0641	0.0670	0.0699	86
4	0.0699	0.0729	0.0758	0.0787	0.0816	0.0846	0.0875	85
5	0.0875	0.0904	0.0934	0.0963	0.0992	0.1022	0.1051	84
6	0.1051	0.1080	0.1110	0.1139	0.1169	0.1198	0.1228	83
7	0.1228	0.1257	0.1287	0.1317	0.1346	0.1376	0.1405	82
8	0.1405	0.1435	0.1465	0.1495	0.1524	0.1554	0.1584	81
9	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1733	0.1763	**80**
10	0.1763	0.1793	0.1823	0.1853	0.1883	0.1914	0.1944	79
11	0.1944	0.1974	0.2004	0.2035	0.2065	0.2095	0.2126	78
12	0.2126	0.2156	0.2186	0.2217	0.2247	0.2278	0.2309	77
13	0.2309	0.2339	0.2370	0.2401	0.2432	0.2462	0.2493	76
14	0.2493	0.2524	0.2555	0.2586	0.2617	0.2648	0.2679	75
15	0.2679	0.2711	0.2742	0.2773	0.2805	0.2836	0.2867	74
16	0.2867	0.2899	0.2931	0.2962	0.2994	0.3026	0.3057	73
17	0.3057	0.3089	0.3121	0.3153	0.3185	0.3217	0.3249	72
18	0.3249	0.3281	0.3314	0.3346	0.3378	0.3411	0.3443	71
19	0.3443	0.3476	0.3508	0.3541	0.3574	0.3607	0.3640	**70**
20	0.3640	0.3673	0.3706	0.3739	0.3772	0.3805	0.3839	69
21	0.3839	0.3872	0.3906	0.3939	0.3973	0.4006	0.4040	68
22	0.4040	0.4074	0.4108	0.4142	0.4176	0.4210	0.4245	67
23	0.4245	0.4279	0.4314	0.4348	0.4383	0.4417	0.4452	66
24	0.4452	0.4487	0.4522	0.4557	0.4592	0.4628	0.4663	65
25	0.4663	0.4699	0.4734	0.4770	0.4806	0.4841	0.4877	64
26	0.4877	0.4913	0.4950	0.4986	0.5022	0.5059	0.5095	63
27	0.5095	0.5132	0.5169	0.5206	0.5243	0.5280	0.5317	62
28	0.5317	0.5354	0.5392	0.5430	0.5467	0.5505	0.5543	61
29	0.5543	0.5581	0.5619	0.5658	0.5696	0.5735	0.5774	**60**
30	0.5774	0.5812	0.5851	0.5890	0.5930	0.5969	0.6009	59
31	0.6009	0.6048	0.6088	0.6128	0.6168	0.6208	0.6249	58
32	0.6249	0.6289	0.6330	0.6371	0.6412	0.6453	0.6494	57
33	0.6494	0.6536	0.6577	0.6619	0.6661	0.6703	0.6745	56
34	0.6745	0.6787	0.6830	0.6873	0.6916	0.6959	0.7002	55
35	0.7002	0.7046	0.7089	0.7133	0.7177	0.7221	0.7265	54
36	0.7265	0.7310	0.7355	0.7400	0.7445	0.7490	0.7536	53
37	0.7536	0.7581	0.7627	0.7673	0.7720	0.7766	0.7813	52
38	0.7813	0.7860	0.7907	0.7954	0.8002	0.8050	0.8098	51
39	0.8098	0.8146	0.8195	0.8243	0.8292	0.8342	0.8391	**50**
40	0.8391	0.8441	0.8491	0.8541	0.8591	0.8642	0.8693	49
41	0.8693	0.8744	0.8796	0.8847	0.8899	0.8952	0.9004	48
42	0.9004	0.9057	0.9110	0.9163	0.9217	0.9271	0.9325	47
43	0.9325	0.9380	0.9435	0.9490	0.9545	0.9601	0.9657	46
44	0.9657	0.9713	0.9770	0.9827	0.9884	0.9942	1.0000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	

دقیقه — کتانژانت $45^\circ \ldots 90^\circ$ — درجه

درجه	تانژانت 45°...90° — دقیقه							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1.0235	1.0295	1.0355	44
46	1.0355	1.0416	1.0477	1.0538	1.0599	1.0661	1.0724	43
47	1.0724	1.0786	1.0850	1.0913	1.0977	1.1041	1.1106	42
48	1.1106	1.1171	1.1237	1.1303	1.1369	1.1436	1.1504	41
49	1.1504	1.1571	1.1640	1.1708	1.1778	1.1847	1.1918	**40**
50	1.1918	1.1988	1.2059	1.2131	1.2203	1.2276	1.2349	39
51	1.2349	1.2423	1.2497	1.2572	1.2647	1.2723	1.2799	38
52	1.2799	1.2876	1.2954	1.3032	1.3111	1.3190	1.3270	37
53	1.3270	1.3351	1.3432	1.3514	1.3597	1.3680	1.3764	36
54	1.3764	1.3848	1.3934	1.4019	1.4106	1.4193	1.4281	35
55	1.4281	1.4370	1.4460	1.4550	1.4641	1.4733	1.4826	34
56	1.4826	1.4919	1.5013	1.5108	1.5204	1.5301	1.5399	33
57	1.5399	1.5497	1.5597	1.5697	1.5798	1.5900	1.6003	32
58	1.6003	1.6107	1.6213	1.6318	1.6426	1.6534	1.6643	31
59	1.6643	1.6753	1.6864	1.6977	1.7090	1.7205	1.7321	**30**
60	1.7321	1.7438	1.7556	1.7675	1.7796	1.7917	1.8041	29
61	1.8041	1.8165	1.8291	1.8418	1.8546	1.8676	1.8807	28
62	1.8807	1.8940	1.9074	1.9210	1.9347	1.9486	1.9626	27
63	1.9626	1.9768	1.9912	2.0057	2.0204	2.0353	2.0503	26
64	2.0503	2.0655	2.0809	2.0965	2.1123	2.1283	2.1445	25
65	2.1445	2.1609	2.1775	2.1943	2.2113	2.2286	2.2460	24
66	2.2460	2.2637	2.2817	2.2998	2.3183	2.3369	2.3559	23
67	2.3559	2.3750	2.3945	2.4142	2.4342	2.4545	2.4751	22
68	2.4751	2.4960	2.5172	2.5387	2.5605	2.5826	2.6051	21
69	2.6051	2.6279	2.6511	2.6746	2.6985	2.7228	2.7475	**20**
70	2.7475	2.7725	2.7980	2.8239	2.8502	2.8770	2.9042	19
71	2.9042	2.9319	2.9600	2.9887	3.0178	3.0475	3.0777	18
72	3.0777	3.1084	3.1397	3.1716	3.2041	3.2371	3.2709	17
73	3.2709	3.3052	3.3402	3.3759	3.4124	3.4495	3.4874	16
74	3.4874	3.5261	3.5656	3.6059	3.6170	6.6891	3.7321	15
75	3.7321	3.7760	3.8208	3.8667	3.9136	3.9617	4.0108	14
76	4.0108	4.0611	4.1126	4.1653	4.2193	4.2747	4.3315	13
77	4.3315	4.3897	4.4494	4.5107	4.5736	4.6383	4.7046	12
78	4.7046	4.7729	4.8430	4.9152	4.9894	5.0658	5.1446	11
79	5.1446	5.2257	5.3093	5.3955	5.4845	5.5764	5.6713	**10**
80	5.6713	5.7694	5.8708	5.8758	6.0844	6.1970	6.3138	9
81	6.3138	6.4348	6.5605	6.6912	6.8269	6.9682	7.1154	8
82	7.1154	7.2687	7.4287	7.5958	7.7704	7.9530	8.1444	7
83	8.1444	8.3450	8.5556	8.7769	9.0098	9.2553	9.5144	6
84	9.5144	9.7882	10.0780	10.3854	10.7119	11.0594	11.4301	5
85	11.4301	11.8262	12.2505	12.7062	13.1969	13.7267	14.3007	4
86	14.3007	14.9244	15.6048	16.3499	17.1693	18.0750	19.0811	3
87	19.0811	20.2056	21.4704	22.9038	24.5418	26.4316	28.6363	2
88	28.6363	31.2416	34.3678	38.1885	42.9641	49.1039	57.2900	1
89	57.2900	68.7501	85.9398	114.5887	171.8854	343.7737	∞	**0**
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	

دقیقه — کتانژانت 45°...0° — درجه