

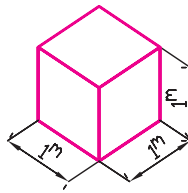
## محاسبه‌ی حجم

هدف‌های رفتاری: فراگیر باید در پایان این فصل بتواند:

- ۱- واحد اندازه‌گیری حجم را توضیح دهد.
- ۲- واحدهای حجم را به یکدیگر تبدیل کند.
- ۳- حجم احجام منشوری را محاسبه کند.
- ۴- حجم احجام هرمی شکل را محاسبه کند.
- ۵- حجم احجام مخروطی شکل را محاسبه کند.
- ۶- حجم احجام کروی شکل را محاسبه کند.

### ۱- واحد اندازه‌گیری حجم

۱-۱- واحد اندازه‌گیری حجم در سیستم SI، مترمکعب است ( $m^3$ ).



شکل ۱

یک مترمکعب عبارت است از حجم مکعبی که هر یک از ابعاد آن یک متر باشد.

۲-۱- اجزای واحد حجم در سیستم SI عبارت‌اند از:

دسی مترمکعب  $dm^3$  (لیتر - برای مایعات)، سانتی مترمکعب  $cm^3$  و میلی مترمکعب  $mm^3$ .

۳-۱- اضعاف واحد حجم در سیستم SI عبارت‌اند از:

دکامتر مکعب  $dm^3$ ، هکتومتر مکعب  $hm^3$  و کیلومتر مکعب  $km^3$ .

۴-۱- تبدیل واحدهای حجم به یکدیگر در سیستم SI:

برای تبدیل واحدهای حجم به یکدیگر می‌توان از واحدهای طول کمک گرفت.

مثال: یک متر مکعب چند لیتر است؟

حل: یک لیتر برابر یک دسی متر مکعب است؛ بنابراین باید متر مکعب را به دسی متر مکعب

تبدیل کنیم.

$$1m^3 = 1m \times 1m \times 1m, \quad 1m = 10dm$$

$$1m^3 = 10dm \times 10dm \times 10dm = 1000dm^3 = 1000 \text{ لیتر}$$

بنابراین:

برای تبدیل واحدهای حجم در سیستم SI می‌توانیم از جدول تبدیل واحدهای حجم نیز استفاده

کنیم (جدول ۱).

جدول ۱- تبدیل واحدهای حجم

| کیلومتر مکعب | هکتومتر مکعب | دکامتر مکعب | متر مکعب  | دسی متر مکعب | سانتی متر مکعب | میلی متر مکعب | اجزا و اضعاف واحد حجم مکعب             |
|--------------|--------------|-------------|-----------|--------------|----------------|---------------|--|
| $km^3$       | $hm^3$       | $dam^3$     | $m^3$     | $dm^3$       | $cm^3$         | $mm^3$        |  |
| $10^{-18}$   | $10^{-15}$   | $10^{-12}$  | $10^{-9}$ | $10^{-6}$    | $10^{-3}$      | ۱             | $mm^3$ (یک میلی متر مکعب)              |
| $10^{-15}$   | $10^{-12}$   | $10^{-9}$   | $10^{-6}$ | $10^{-3}$    | ۱              | $10^3$        | $cm^3$ (سانتی متر مکعب)                |
| $10^{-12}$   | $10^{-9}$    | $10^{-6}$   | $10^{-3}$ | ۱            | $10^3$         | $10^6$        | $dm^3$ (یک دسی متر مکعب)<br>یا یک لیتر |
| $10^{-9}$    | $10^{-6}$    | $10^{-3}$   | ۱         | $10^3$       | $10^6$         | $10^9$        | $m^3$ (یک متر مکعب)                    |
| $10^{-6}$    | $10^{-3}$    | ۱           | $10^3$    | $10^6$       | $10^9$         | $10^{12}$     | $dam^3$ (یک دکامتر مکعب)               |
| $10^{-3}$    | ۱            | $10^3$      | $10^6$    | $10^9$       | $10^{12}$      | $10^{15}$     | $hm^3$ (یک هکتومتر مکعب)               |
| ۱            | $10^3$       | $10^6$      | $10^9$    | $10^{12}$    | $10^{15}$      | $10^{18}$     | $km^3$ (یک کیلومتر مکعب)               |

مثال: یک کیلومتر مکعب چند لیتر است؟

$$1km^3 = 10^{12}dm^3 = 10^{12} \text{ لیتر}$$

حل

مثال: ۶۷۰۰۰ سانتی متر مکعب چند لیتر است؟

حل: با توجه به جدول

$$\text{لیتر } ۶۷۰۰۰ \text{ cm}^3 = ۶۷۰۰۰ \times ۱۰^{-۳} \text{ dm}^3 = ۶۷ \text{ dm}^3$$

مثال: یک منبع آب با چندین لوله، از آب پر می‌شود. لوله‌ی اول ۵۹ لیتر، لوله‌ی دوم ۲۱/۰ متر مکعب، لوله‌ی سوم ۱۰۷ دسی متر مکعب و لوله‌ی چهارم ۲۴۰۰۰ سانتی متر مکعب در هر دقیقه آب به منبع وارد می‌کنند. تعیین کنید:

چند لیتر آب در هر دقیقه از این لوله‌ها وارد منبع می‌شود؟

حل در هر دقیقه ۵۹ Lit = لوله‌ی اول

در هر دقیقه ۲۱۰ Lit =  $۰/۲۱ \times ۱۰^۳ \text{ dm}^3$  = لوله‌ی دوم

در هر دقیقه ۱۰۷ Lit =  $۱۰۷ \text{ dm}^3$  = لوله‌ی سوم

در هر دقیقه ۲۴ Lit =  $۲۴۰۰۰ \times ۱۰^{-۳} \text{ dm}^3$  = لوله‌ی چهارم

در هر دقیقه ۴۰۰ Lit =  $۵۹ + ۲۱۰ + ۱۰۷ + ۲۴$  = مجموع آب لوله‌ها

مثال: حجم بی یک ستون برابر است با ۱/۸ متر مکعب. حجم این بی چند سانتی متر مکعب و

چند دسی متر مکعب است؟

حل  $۱ \text{ m}^3 = ۱۰^۶ \text{ cm}^3 = ۱۰^۳ \text{ dm}^3$

حجم بی بر حسب سانتی متر مکعب  $۱۸۰۰۰۰۰ \text{ cm}^3 = ۱/۸ \times ۱۰^۶ \text{ cm}^3$  = حجم بی

حجم بی بر حسب دسی متر مکعب  $۱۸۰۰ \text{ dm}^3 = ۱/۸ \times ۱۰^۳ \text{ dm}^3$  = حجم بی

مثال: در فصل زمستان مقداری مواد ترکیبی – مثل ضدیخ – به ترتیب زیر به یک کارگاه

ساختمان‌سازی حمل شده است:

بار اول ۶۵۰۰ لیتر، بار دوم ۷۳۰۰ دسی متر مکعب، بار سوم ۴/۲ متر مکعب، بار چهارم

$۶ \times ۱۰^۶$  سانتی متر مکعب. مجموع مواد ترکیبی حمل شده به کارگاه را بر حسب متر مکعب و لیتر محاسبه کنید.

حل: در جدول واحدهای حجم داریم:

$$۱ \text{ Lit} = ۱۰^{-۳} \text{ m}^3$$

$$\text{بار اول} = ۶۵۰۰ \times ۱۰^{-۳} = ۶/۵ \text{ m}^3$$

$$\text{بار دوم} = ۷۳۰۰ \text{ dm}^3 \times ۱۰^{-۳} = ۷/۳ \text{ m}^3$$

$$۴/۲m^۳ = \text{بار سوم}$$

$$۶m^۳ = ۶ \times ۱۰^۶ \text{ cm}^۳ \times ۱۰^{-۶} = ۶m^۳$$

$$\text{برحسب متر مکعب } ۶m^۳ = ۶ + ۴/۲ + ۷/۳ + ۶/۵ = \text{مجموع مواد حمل شده}$$

$$۱m^۳ = ۱۰^۳ \text{ Lit}$$

$$\text{برحسب لیتر } ۲۴ \times ۱۰^۳ = ۲۴۰۰۰ \text{ Lit} = \text{مجموع مواد حمل شده}$$

## تمرین

۱- حجم یک جدول ساده‌ی بتنی ۳۶ دسی متر مکعب است. حجم ۱۰۰۰ عدد از این جدول

چند متر مکعب است؟

۲- حجم دریاچه‌ی پشت یک سد، پنج میلیون متر مکعب است. حجم این دریاچه چند لیتر

است؟

۳- از یک شیر آب معیوب در شبانه روز ۴۵۰ سانتی متر مکعب آب هدر می‌رود. اگر در یک

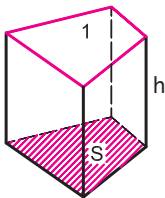
شهر، یک میلیون شیر آب چنین وضعیتی داشته باشد، در هر شبانه روز چند لیتر و چند متر مکعب آب

به هدر می‌رود؟

۴- از یک کولر معیوب در هر ساعت ۸۰۰ میلی متر مکعب آب به هدر می‌رود اگر از ۳۰ میلیون

کولر موجود در یک کشور ۲۵ درصد آنها معیوب باشد، در هر شبانه روز چند لیتر و چند متر مکعب

آب هدر می‌رود؟



شکل ۲

## ۲- محاسبه‌ی حجم اجسام منشوری

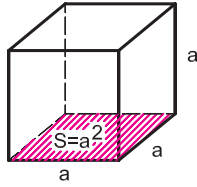
حجم اجسام منشوری = مساحت قاعده  $\times$  ارتفاع

• حجم منشور با مساحت قاعده‌ی S و ارتفاع h  $Sh =$



شکل ۳

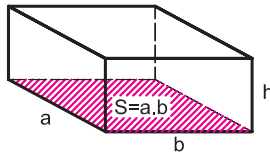
• حجم استوانه با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h  $\pi r^2 h =$



شکل ۴

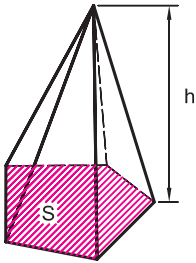
• حجم مکعب به ضلع  $a^3 = a$

• حجم مکعب مستطیل به اضلاع قاعده‌ی  $a$  و  $b$  و ارتفاع  $h = a.b.h$



شکل ۵

### ۳- محاسبه‌ی حجم هرم و مخروط

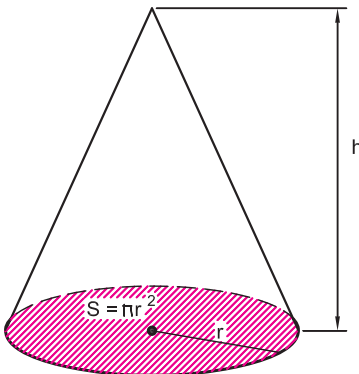


شکل ۶

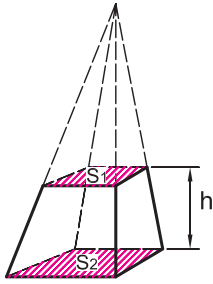
حجم هرم و حجم مخروط =  $\frac{\text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}}{3}$

• حجم هرم با مساحت قاعده‌ی  $S$  و ارتفاع  $h = \frac{1}{3}Sh$

• حجم مخروط با شعاع قاعده‌ی  $r$  و ارتفاع  $h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



شکل ۷

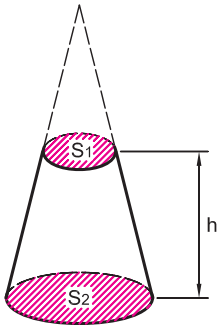


شکل ۸

حجم هرم ناقص با سطوح قاعده‌ی  $S_1$  و  $S_2$  و ارتفاع  $h$

$$V = \frac{1}{3} h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \times S_2}) \quad \text{فرمول دقیق}$$

$$V = \frac{S_1 + S_2}{2} \times h \quad \text{فرمول تقریبی}$$

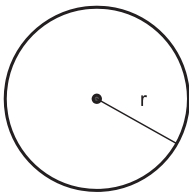


شکل ۹

حجم مخروط ناقص با سطوح قاعده‌ی  $S_1$  و  $S_2$  و ارتفاع  $h$

$$V = \frac{1}{3} h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \times S_2}) \quad \text{فرمول دقیق}$$

$$V = \frac{S_1 + S_2}{2} \times h \quad \text{فرمول تقریبی}$$



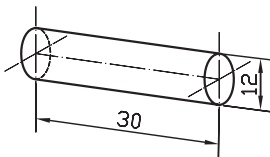
شکل ۱۰

۴- محاسبه‌ی حجم کره

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = r \quad \text{حجم کره به شعاع } r$$

مثال ۱: حجم شکل ۱۱ چند سانتی متر مکعب است؟

(اندازه‌های روی شکل بر حسب میلی متر هستند.)



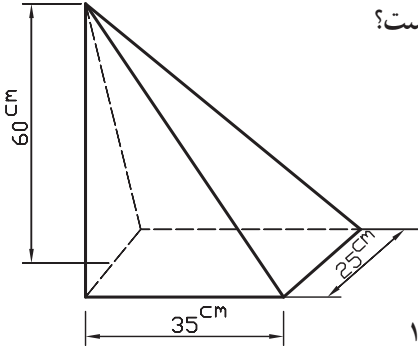
شکل ۱۱

حل

$$V = S \times h = \frac{\pi \times d^2}{4} \times h$$

$$V = \frac{\pi \times (12 \text{ mm})^2}{4} \times 30 \text{ mm} = 3393 / 2 \text{ mm}^3 \approx 3 / 39 \text{ cm}^3$$

مثال ۲: حجم شکل ۱۲ چند سانتی متر مکعب است؟



شکل ۱۲

حل

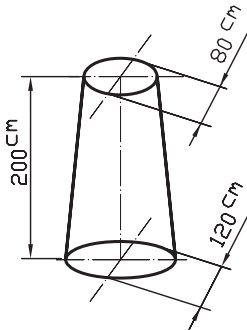
$$V = \frac{S \times h}{3} = \frac{l \times b \times h}{3}$$

$$V = \frac{35 \text{ mm} \times 25 \text{ mm} \times 60 \text{ mm}}{3} = 17500 \text{ mm}^3 = 17.5 \text{ cm}^3$$

مثال ۳: حجم شکل ۱۳ چند سانتی متر مکعب است؟

این مثال به دو روش دقیق و تقریبی حل می شود تا نتایج

حاصل با هم مقایسه شود.



شکل ۱۳

حل: از طریق رابطه‌ی دقیق:

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \times S_2})$$

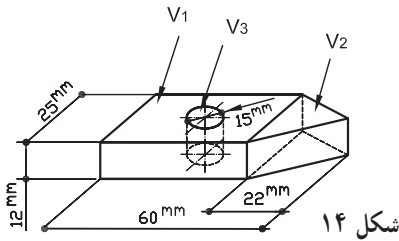
$$S_1 = \pi r_1^2 = 3.14 \times 4^2 = 50.24 \text{ cm}^2$$

$$S_2 = \pi r_2^2 = 3.14 \times 6^2 = 113.04 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \times 200 (50.24 + 113.04 + \sqrt{50.24 \times 113.04}) = 1590.93 \text{ cm}^3$$

حل: از طریق رابطه‌ی تقریبی:

$$V = \frac{S_1 + S_2}{2} \times h = \frac{50.24 + 113.04}{2} \times 200 = 1632.8 \text{ cm}^3$$



مثال ۴: حجم شکل ۱۴ چند سانتی متر مکعب است؟  
توجه: خط نقطه‌های روی شکل، به منظور تبدیل  
حجم مرکب به احجام ساده رسم شده‌اند.

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 - V_3 \\
 &= S_1 \times h + S_2 \times h - S_3 \times h = (S_1 + S_2 - S_3) \times h \\
 &= [(38 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}) + (\frac{22 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}}{2}) - (\frac{\pi \times 15 \text{ mm}}{4})] \times 12 \text{ mm} \\
 &= (950 \text{ mm}^2 + 275 \text{ mm}^2 - 176.62 \text{ mm}^2) \times 12 \text{ mm} \\
 V &= 12580.56 \text{ mm}^3 = 12.58 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

### تمرین

۱- یک جعبه‌ی چوبی مکعب‌شکل به ابعاد داخلی  $5 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$  و ضخامت دیواره‌ی ۲ سانتی متر موجود است.

الف - حجم داخل جعبه چند سانتی متر مکعب و چند متر مکعب است؟

ب - اگر بخواهیم داخل جعبه را رنگ بزنیم، سطح رنگ‌کاری چند متر مربع است؟

۲- یک استخر آب مطابق شکل ۱۵ به صورت مکعب مستطیل ساخته شده است. کف آن از

بتن به ضخامت  $20 \text{ cm}$  و دیواره‌های آن از بتن به ضخامت

$20$  سانتی متر است که داخل آن عایق‌کاری گردیده و

یک دیوار  $10$  سانتی متری محافظ عایق هم کشیده شده

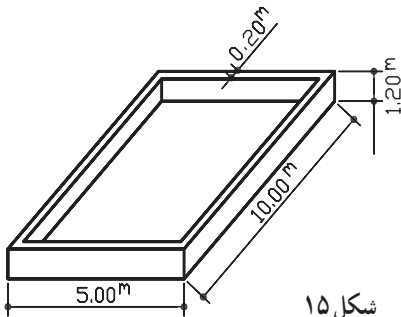
است. سطح داخلی دیواره نیز با ماسه سیمان لیسه‌ای

اندود شده است. موارد زیر را محاسبه کنید:

الف - حجم بتن کف ( $\text{m}^3$ )

ب - حجم آجرکاری ( $\text{m}^3$ )

پ - سطح عایق‌کاری کف و دیواره‌ها ( $\text{m}^2$ )





ت - سطح اندود دیواره‌ها ( $m^2$ )

ث - ظرفیت آب استخر ( $m^3$ )

ج - حجم بتن دیوار ( $m^3$ )

۳- برای یک کارگاه ساختمانی، احتیاج به یک منبع آب با ظرفیت  $27000$  لیتر داریم. اگر منبع به شکل مکعب ساخته شود، طول هر ضلع آن چند متر است؟

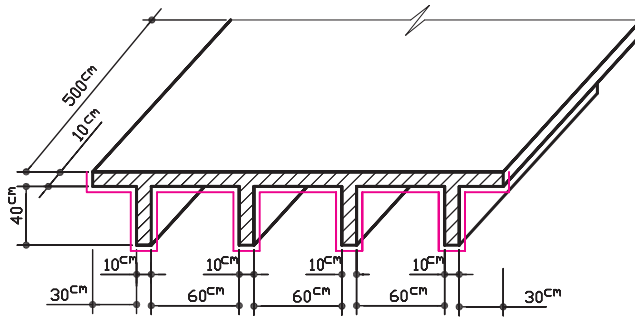
۴- شکل ۱۶ قسمتی از یک سقف بتن آرمه را نشان می‌دهد. در صورتی که طول این سقف ۵ متر باشد:

الف - حجم بتن مصرفی چه قدر است؟ ( $m^3$ )

ب - چند متر مربع تخته برای قالب‌بندی مورد نیاز است؟

سطوح قالب‌بندی عبارت است از سطح مقطع ابتدا و انتهای سقف به اضافه‌ی سطوحی که یک بعد آن با خط قرمز رنگ در مقطع دیده می‌شود.

تذکر: البته در عمل باید از سطح قالب‌بندی محاسبه شده به طریق بالا، سطوح نشیمن را کسر کنیم این مسأله با توجه به مشخص نبودن جزئیات نشیمن، از محاسبه و کسر سطوح نشیمن صرف نظر شود.



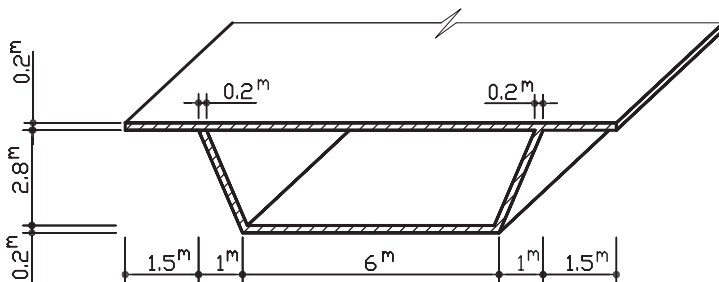
شکل ۱۶

۵- شکل ۱۷ قسمتی از یک پل بتن آرمه و مقطع آن را نشان می‌دهد. در صورتی که طول پل

۶۰ متر باشد:

الف - حجم بتن مصرفی در پل را برحسب مترمکعب محاسبه کنید.

ب - در صورت رنگ‌آمیزی سطوح زیر پل، سطح رنگ‌آمیزی را برحسب مترمربع تعیین کنید.

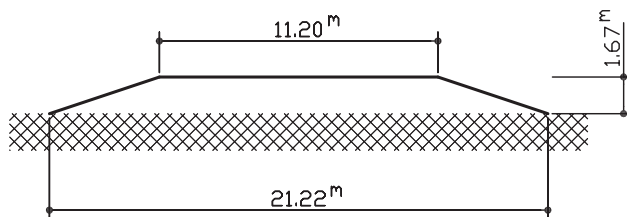


شکل ۱۷

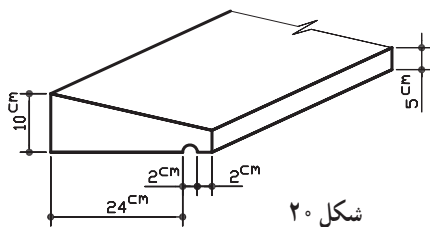


شکل ۱۸

۶ - قسمتی از یک جاده به طول ۷۳ متر، مطابق شکل ۱۹ خاک ریزی می شود. محاسبه نمایید که باید چند مترمکعب خاک ریزی شود.

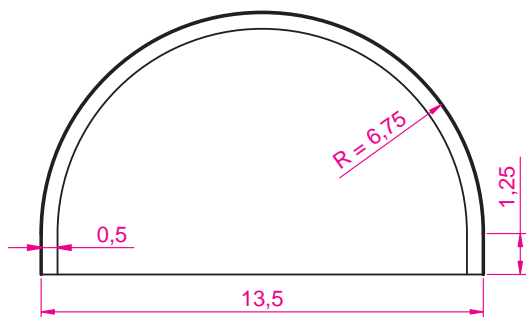


شکل ۱۹



۷-۱۵ عدد قرنیز بتنی، مطابق شکل ۲۰ به طول ۲/۲۰ متر، در یک ساختمان به کار می‌رود. حجم بتن مصرفی را بر حسب لیتر و مترمکعب محاسبه کنید.

- ۸- تونلی به طول ۸۴۰ متر با مشخصات طبق شکل ۲۲ مفروض است. مطلوبست:
- الف - محاسبه‌ی حجم حفاری انجام شده به مترمکعب.
  - ب - محاسبه‌ی حجم بتن‌ریزی انجام شده به مترمکعب.



شکل ۲۱



شکل ۲۲- تونل رسالت که توسط متخصصان میهن اسلامی مان طراحی و اجرا شده است.

۹- قرار است یک انبار به ابعاد داخلی  $10^{\circ}$  متر در  $6$  متر و به ارتفاع  $5$  متر را با دیوارهای  $35$  سانتی متری بسازیم. در صورتی که در و پنجره‌ی این انبار سطحی معادل  $20\%$  سطح دیوارها داشته باشند:

الف - حجم آجرکاری را به مترمکعب محاسبه کنید.

ب - سطح اندود داخلی و خارجی را به مترمربع محاسبه کنید.

۱۰- جهت آزمایش مقاومت بتن سخت شده‌ای، نمونه برداری می‌شود (کُرگیری می‌شود).

در صورتی که نمونه به شکل استوانه‌ای به طول  $30^{\circ}$  سانتی متر و به قطر  $15$  سانتی متر باشد، محاسبه کنید:

الف - سطح مقطع این نمونه چند سانتی متر مربع است.

ب - حجم سوراخی را که در اثر نمونه برداری، به وجود می‌آید، بر حسب سانتی متر مکعب.

(در صورتی که ضخامت دندان‌های اژه،  $2/5$  میلی متر باشد.)

۱۱- در شکل ۲۳، بنای یک مکان فرهنگی را مشاهده می‌کنید که سطح آن با شیشه‌ی نشکن

پوشیده شده است. در صورتی که سطح قاعده‌ی آن به شکل مربعی با ضلع  $15$  متر و ارتفاع  $10^{\circ}$  متر

باشد، محاسبه کنید:

الف - حجم داخلی این بنا (فقط هرم) را بر حسب متر مکعب (از ضخامت پوشش شیشه‌ای

صرف نظر کنید).

ب - سطح شیشه‌ی لازم را بر حسب متر مربع.





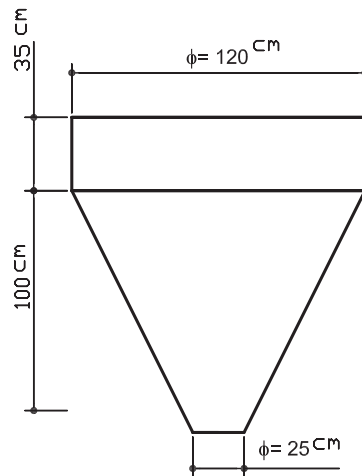
شکل ۲۴

۱۲- یک تسمه‌ی نقاله‌ی مصالح، مقداری ماسه‌ی شسته شده را مطابق شکل ۲۴ به صورت یک مخروط در روی زمین دپو (انبار) کرده است. اگر قطر مخروط ۵ متر و ارتفاع آن  $\frac{2}{7}$  متر باشد:  
 الف - حجم ماسه چند مترمکعب است؟  
 ب - در صورتی که حجم یک کامیونت،  $\frac{3}{2}$  متر مکعب باشد، چند کامیونت باید این مقدار ماسه را حمل کند؟

۱۳- برای بتن‌ریزی به داخل قالب، از یک مخروط بتن‌ریز (قیف) مطابق شکل ۲۵ استفاده می‌شود. در صورتی که ابعاد قیف، مطابق شکل ۲۶ باشد، مطلوب است تعیین:  
 الف - حجم قیف بر حسب مترمکعب و لیتر.  
 ب - سطح ورق لازم برای ساخت این قیف بر حسب مترمربع.



شکل ۲۵



شکل ۲۶