

محاسبه‌ی سطح

- هدفهای رفتاری: فراگیر باید در پایان این فصل بتواند:
- ۱- واحدهای اندازه‌گیری سطح را بشناسد و آنها را به یکدیگر تبدیل کند.
 - ۲- مساحت مثلث را به روش‌های مختلف محاسبه کند.
 - ۳- مساحت چهارضلعی‌ها را محاسبه کند.
 - ۴- مساحت چندضلعی‌ها را محاسبه کند.
 - ۵- مساحت دایره و بیضی را محاسبه کند.
 - ۶- سطح جانبی و سطح کل احجام هندسی و احجام مرکب را محاسبه کند.

۱- واحد سطح در سیستم SI

۱-۱- تعریف واحد سطح در سیستم SI

واحد اندازه‌گیری سطح، متر مربع (m^2) است. یک متر مربع مساحت مربعی است که طول هر ضلع آن یک متر باشد.

۲- ۱- اجزای واحد سطح در سیستم SI

این اجزا عبارت‌اند از: دسی متر مربع dm^2 ، سانتی متر مربع cm^2 و میلی متر مربع mm^2 .

۳- ۱- اضعاف واحد سطح در سیستم SI

این اضعاف عبارت‌اند از: دکامتر مربع dam^2 (آر)؛ هکتومتر مربع hm^2 (هکتار) و کیلومتر مربع km^2 .

۴-۱- تبدیل واحدهای سطح به یکدیگر: برای تبدیل واحدهای سطح می توان از واحدهای طول کمک گرفت.

مثال: یک متر مربع چند میلی متر مربع است؟

$$1\text{m}^2 = 1\text{m} \times 1\text{m} = 1000\text{mm} \times 1000\text{mm} = 1000000\text{mm}^2$$

حل

$$1\text{m}^2 = 10^6\text{mm}^2$$

در جدول ۱ ضرایب تبدیل واحدهای سطح را ملاحظه می کنید.

جدول ۱- تبدیل واحدهای سطح به یکدیگر در سیستم (SI)

اجزا و اضعاف واحد سطح	میلی مترمربع mm^2	سانتی مترمربع cm^2	دسی مترمربع dm^2	مترمربع m^2	دکامترمربع dam^2	هکتومترمربع hm^2	کیلومترمربع km^2
mm^2 (یک میلی متر مربع)	۱	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}
cm^2 (یک سانتی متر مربع)	10^2	۱	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
dm^2 (یک دسی متر مربع)	10^4	10^2	۱	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}
m^2 (یک متر مربع)	10^6	10^4	10^2	۱	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
dam^2 (یک دکامتر مربع) آر	10^8	10^6	10^4	10^2	۱	10^{-2}	10^{-4}
hm^2 (یک هکتومتر مربع) هکتار	10^{10}	10^8	10^6	10^4	10^2	۱	10^{-2}
km^2 (یک کیلومتر مربع)	10^{12}	10^{10}	10^8	10^6	10^4	10^2	۱

مثال: مساحت زمینی ۴/۵ هکتار است. مساحت این زمین چند متر مربع است؟

حل

$$4/5\text{hm}^2 = 4/5 \times \text{hm} \times \text{hm} = 4/5 \times 100\text{m} \times 100\text{m} = 45000\text{m}^2$$

این مسأله را می توان با استفاده از جدول ۱ نیز حل کرد.

$$4/5(\text{hm}^2) = 4/5 \times 10^4\text{m}^2 = 45000\text{m}^2$$

تمرین

۱- مساحت زمینی ۴۷۸۰ متر مربع است. مساحت این زمین چند هکتار است؟

۲- سالنی را با موزاییک های 30cm فرش کرده اند. اگر در این سالن ۱۵۹۳ موزاییک به کار

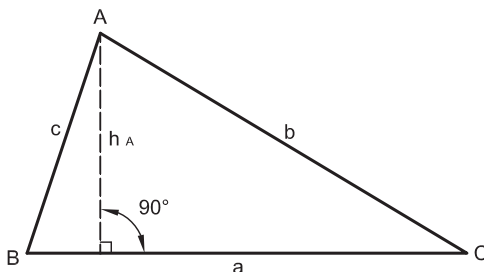
رفته باشد، مساحت این سالن چند متر مربع است؟

۳- تعداد ۱۰۰۰۰۰ عدد کاشی به ابعاد $30\text{cm} \times 30\text{cm}$ داریم. اگر قیمت هر متر مربع این نوع

کاشی ۵۰۰۰۰ ریال باشد، ارزش کل کاشی ها چند ریال است؟

۲- محاسبه‌ی مساحت مثلث

مساحت مثلث نامشخص ABC (شکل ۱) را می‌توانیم به روش‌های مختلف محاسبه کنیم.



شکل ۱

۲-۱- مساحت مثلث با داشتن اندازه‌ی قاعده و ارتفاع آن، برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_A$$

نصف قاعده ضرب در ارتفاع

۲-۲- مساحت مثلث با داشتن دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها، برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C$$
 نصف حاصل ضرب دو ضلع ضرب در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها.

۲-۳- مساحت مثلث با داشتن سه ضلع، برابر است با:

جزر حاصل ضرب نصف محیط مثلث ضرب در نصف محیط مثلث، منهای هریک از اضلاع آن.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

۱- سطح را در زبان انگلیسی «Area» و «Surface»، در زبان فرانسه نیز «Surface» و در زبان آلمانی «Fläche»

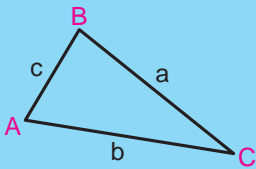
می‌گویند که مخفف آن را به ترتیب با حروف A, S, F نشان می‌دهند. در این کتاب، سطح را با حرف «S» نشان داده‌ایم.



برای محاسبه مساحت در حالتی که سه ضلع آن معلوم است بوزجانی دانشمند مسلمان ایرانی در قرن چهارم هـ. ق فرمول آن را به شکل زیر بیان کرده است.

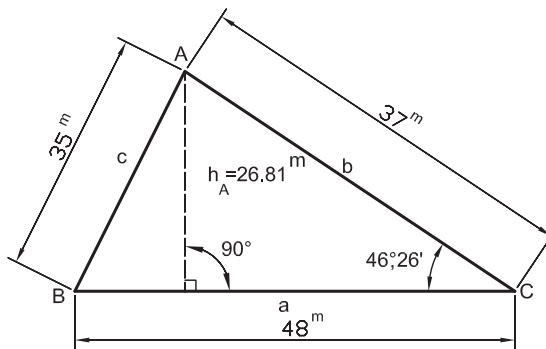
$$S = \sqrt{\left[\left(\frac{c+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2\right]} = S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(که امروزه به فرمول هرون معروف شده است.)



تذکر: این فرمول در حقیقت با تغییراتی که روی آن انجام می‌شود فرمول محاسبه مساحت به روش هرون (دانشمند یونانی) به دست می‌آید.

مثال: در شکل ۲ مساحت مثلث ABC را به سه روش فوق محاسبه می‌کنیم.



شکل ۲

با استفاده از اندازه‌ی قاعده و ارتفاع:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_A = \frac{1}{2} \times 48m \times 26.81m = 643.44m^2$$

با استفاده از اندازه‌ی دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها :

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 48 \times 37 \times \sin 46^\circ 26'$$

$$S = \frac{1}{2} \times 48 \times 37 \times 0.7246 = 643 / 44 \text{ m}^2$$

با استفاده از اندازه‌ی سه ضلع :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{48+37+35}{2} = 60$$

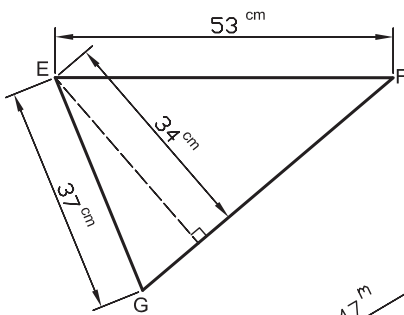
$$S = \sqrt{60(60-48)(60-37)(60-35)}$$

$$S = \sqrt{60(12)(23)(25)} = \sqrt{414000} = 643 / 43 \text{ m}^2$$

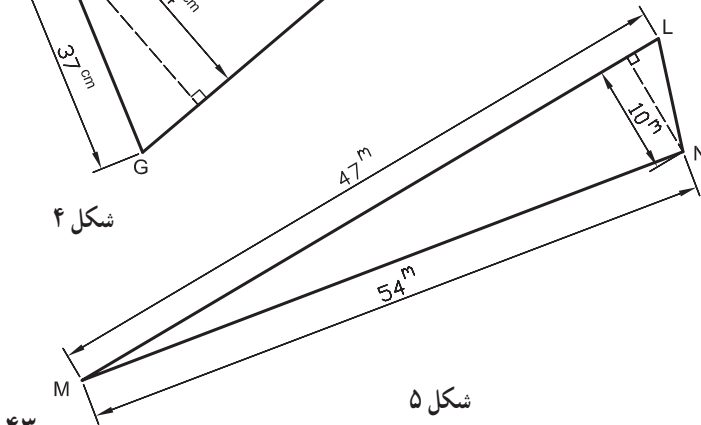
نکته: اختلاف حاصل در محاسبه‌ی مساحت به دلیل گرد کردن اعداد در محاسبات به وجود آمده است.

تمرین

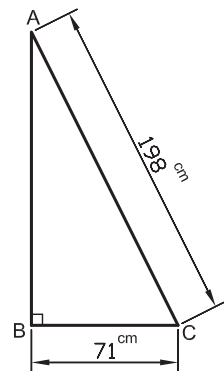
۱ - مساحت مثلث‌های شکل‌های ۳، ۴ و ۵ را برحسب متر مربع حساب کنید.



شکل ۴

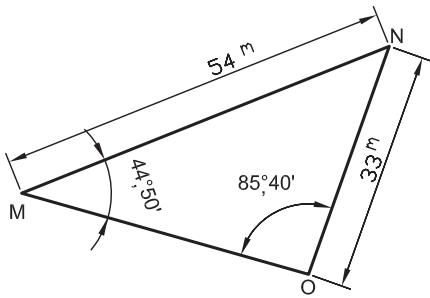


شکل ۵

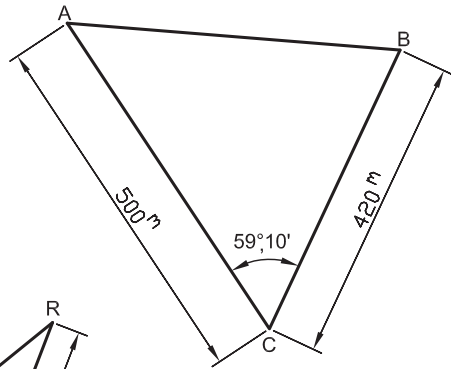


شکل ۳

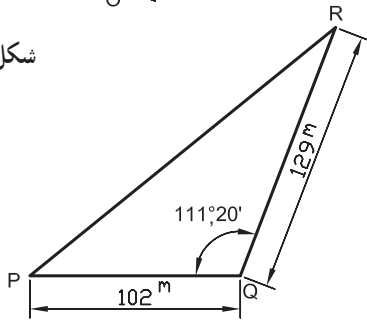
۲- مساحت مثلث‌های شکل‌های ۶، ۷ و ۸ را برحسب متر مربع محاسبه کنید.



شکل ۷

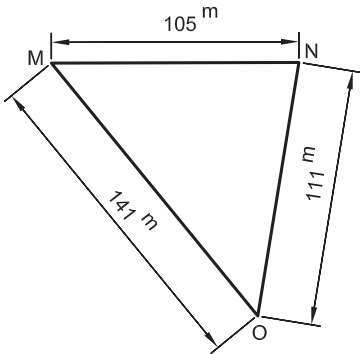


شکل ۶

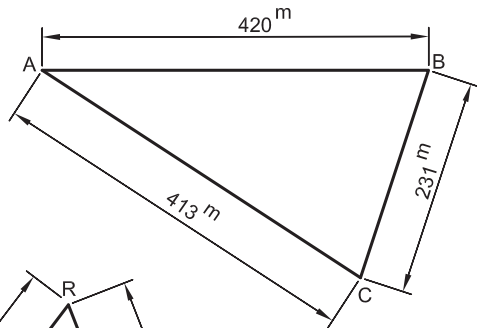


شکل ۸

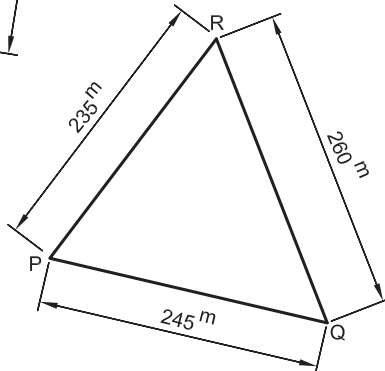
۳- مساحت مثلث‌های شکل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ را برحسب هکتار محاسبه کنید.



شکل ۱۰



شکل ۹

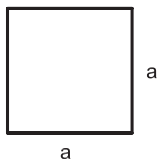


شکل ۱۱

۳- محاسبه‌ی مساحت چهارضلعی‌ها

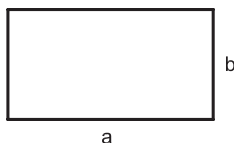
۳-۱- مساحت مربع به ضلع a برابر است با:

$$S = a^2$$



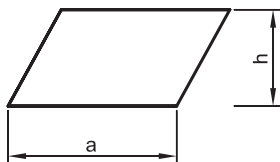
۳-۲- مساحت مستطیل به طول a و عرض b برابر است با:

$$S = a \cdot b$$



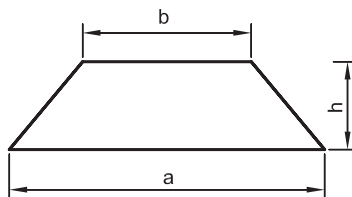
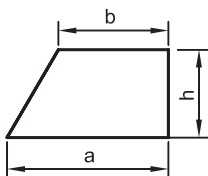
۳-۳- مساحت متوازی‌الاضلاع به قاعده‌ی a و ارتفاع h برابر است با:

$$S = a \cdot h$$

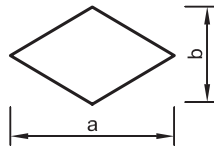


۳-۴- مساحت ذوزنقه با قاعده‌های a و b و ارتفاع h برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$$



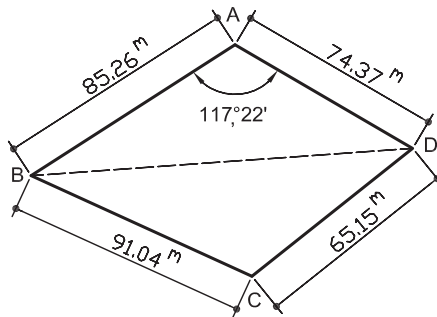
۵-۳- مساحت لوزی با قطرهای a و b برابر است با: $S = \frac{1}{2} a \cdot b$



۶-۳- مساحت چهارضلعی نامشخص

برای تعیین مساحت یک چهارضلعی نامنظم باید علاوه بر اندازه‌گیری چهارضلع آن، یک قطر یا یکی از زوایای آنرا نیز اندازه‌گیری کنیم.

مثال ۱: در شکل ۱۲ مساحت چهارضلعی ABCD چند متر مربع است؟



شکل ۱۲

حل: با رسم قطر BD چهارضلعی ABCD را به دو مثلث تبدیل می‌کنیم.

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} (85/26 \text{ m})(74/37) \sin 117^\circ 22' = 2815/57$$

طول قطر BD

$$(BD)^2 = (85/26)^2 + (74/37)^2 - 2(85/26)(74/37) \cos 117^\circ 22'$$

$$(BD)^2 = 18629/67 \Rightarrow BD = 136/49 \text{ m}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{مساحت مثلث BDC}$$

$$p = \frac{91/04 + 65/15 + 136/49}{2} = 146/34$$

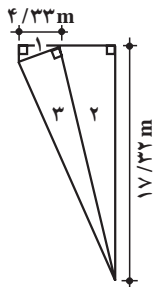
$$S_{BDC} = \sqrt{146/34(146/34 - 91/0.4)(146/34 - 65/1.5)(146/34 - 136/49)}$$

$$S_{BDC} = \sqrt{6471827/81} = 2543/98$$

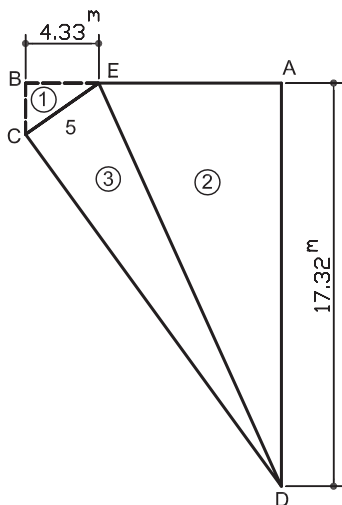
مساحت چهارضلعی ABCD

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = 2815/57 + 2543/98$$

$$S_{ABCD} = 5359/55 \text{ متر مربع}$$



مثال ۲: قطعه زمینی به شکل ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه را به سه قطعه زمین به صورت مثلث قائم‌الزاویه تفکیک کرده‌ایم. در صورتی که مساحت ذوزنقه برابر $142/01$ مترمربع و مساحت مثلث (۱) برابر $5/41$ مترمربع باشد، مساحت و طول اضلاع مثلث‌های (۲) و (۳) چه قدر است؟ (برحسب مترمربع و متر.)



حل: برای حل این تمرین، ابتدا شکل آن را می‌کشیم و بعد گوشه‌ها را اسم‌گذاری می‌کنیم. طبق صورت مسأله، مساحت مثلث (۱) $5/41$ مترمربع و اندازه‌ی ضلع $BE = 4/33$ متر است. پس با توجه به قائم‌الزاویه بودن مثلث، ضلع دیگر آن نیز قابل محاسبه است.

$$S_1 = \frac{BE}{2} \times BC \quad 5/41 = \frac{4/33}{2} \times BC$$

$$5/41 = 2/165 \times BC \Rightarrow BC = \frac{5/41}{2/165} = 2/4988 \approx 2/50 \text{ m}$$

شکل کلی این زمین، ذوزنقه است که اضلاع BC و AD قاعده‌های کوچک و بزرگ آن و ضلع AB هم ارتفاع ذوزنقه هستند (اندازه‌ی AD در صورت مسأله داده شده و اندازه‌ی BC را هم برابر $2/50$ متر به دست آوردیم).

چون مساحت دوزنقه را داریم، می‌توانیم طول AB را به دست بیاوریم:

$$S = \frac{AD+BC}{2} \times AB$$

$$142/01 = \frac{17/32 + 2/50}{2} \times AB$$

$$142/01 = 9/91 \times AB \Rightarrow AB = \frac{142/01}{9/91} = 14/33 \text{ m}$$

حال اندازه‌ی ضلع AE (از مثلث ۲) را می‌توانیم حساب کنیم:

$$AE = AB - BE = 14/33 - 4/33 = 10 \text{ m}$$

$$S_2 = \frac{10 \times 17/32}{2} = 86/60 \text{ m}^2 \quad \text{و مساحت مثلث (۲) می‌شود:}$$

طول ضلع ED (ضلع سوم یا وتر مثلث ۲) را به دست می‌آوریم:

$$ED^2 = AD^2 + AE^2$$

$$ED^2 = 17/32^2 + 10^2 = 299/99 + 100 = 399/99 \approx 400$$

$$ED = \sqrt{400} = 20 \text{ m} \quad \text{وتر مثلث (۲)}$$

(توجه: در این جا از عملیات جذرگیری خودداری می‌کنیم، اما دانش‌آموزان باید این جذرگیری

را انجام دهند.)

با توجه به شکل، مشاهده می‌کنیم که وتر به دست آمده، در واقع یک ضلع مثلث (۳) هم می‌باشد.

برای به دست آوردن ضلع EC (از مثلث ۳)، باید از مثلث (۱) کمک بگیریم؛ زیرا این ضلع در هر دو

مثلث مشترک است. چون دو ضلع از مثلث (۱) را داریم، پس ضلع سوم را حساب می‌کنیم:

$$EC^2 = BC^2 + BE^2$$

$$EC^2 = 2/50^2 + 4/33^2 = 6/25 + 18/75 = 25$$

$$EC = \sqrt{25} = 5 \text{ m}$$

با داشتن قاعده و ارتفاع مثلث (۳)، مساحت آن می‌شود:

$$S_3 = \frac{5 \times 20}{2} = 50 \text{ m}^2 \quad \text{مساحت مثلث (۳)}$$

بالاخره اندازه‌ی وتر مثلث (۳) (طول CD) می‌شود:

$$CD^2 = 5^2 + 20^2 = 25 + 400 = 425$$

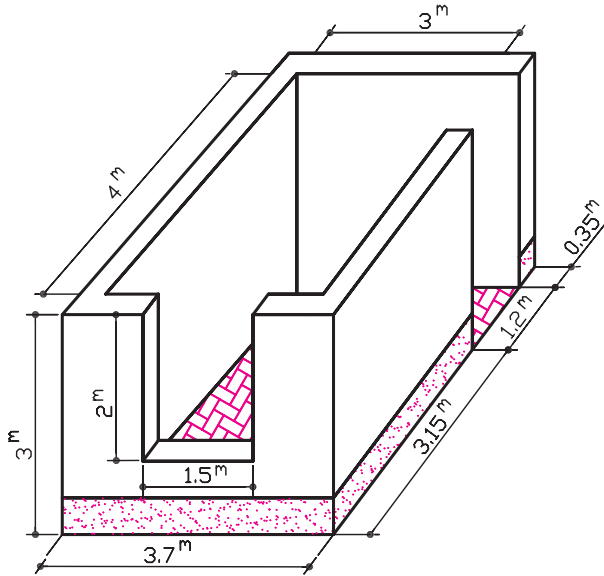
$$CD = \sqrt{425} = 20/61 \text{ m}$$

$$5/41 + 86/6 + 50 = 142/01$$

کنترل صحت مساحت‌ها:

عملیات انجام شده صحیح است.

مثال ۳: ابعاد یک اتاق مطابق شکل ۱۳ است :



شکل ۱۳

الف - اگر بخواهیم کف اتاق را با موزاییک فرش کنیم، چند متر مربع موزاییک لازم است؟
 ب - در صورتی که بخواهیم دیوارهای اتاق را کاغذ دیواری کنیم، چند متر مربع کاغذ دیواری لازم است؟

پ - در صورتی که برای آزاره‌ی (سنگ پای دیوار) دیوارهای خارجی این ساختمان از سنگ رگی استفاده شود، چند متر سنگ رگی لازم است؟

حل: ابعاد مندرج روی شکل عبارت‌اند از :

۳ متر عرض داخلی اتاق، ۳ متر ارتفاع آن، $2/80 + 1/20 = 4$ متر طول داخلی اتاق،
 $2 \times 1/50$ متر اندازه‌ی پنجره و $1/20$ عرض در (ارتفاع در برابر ۳ متر است).

الف - کف اتاق به شکل مستطیل است؛ پس مساحت آن که همان مساحت موزاییک کاری است، برابر می‌شود با :

$$S = 3 \times 4 = 12m^2 \quad \text{مقدار موزاییک لازم}$$

ب - برای حل این قسمت، سطوح دیوارهای اتاق (سطح جانبی مکعب) را محاسبه و سطوح پنجره و در را از آن کم می‌کنیم.

برای محاسبه‌ی سطوح دیوارها می‌توان هر سطح را جداگانه حساب کرد و آنها را با هم جمع

نمود. روش ساده‌تر آن است که محیط مستطیل را به دست آوریم و در ارتفاع ضرب کنیم. بنابراین:

$$3 + 4 + 3 + 4 = 14 \text{m} \quad \text{محیط مستطیل}$$

$$14 \times 3 = 42 \text{m}^2 \quad \text{سطح دیوارها با در و پنجره}$$

$$1/50 \times 2 = 3 \text{m}^2 \quad \text{سطح پنجره}$$

$$1/20 \times 3 = 3/60 \text{m}^2 \quad \text{سطح در}$$

$$3 + 3/60 = 6/60 \text{m}^2 \quad \text{سطح در و پنجره}$$

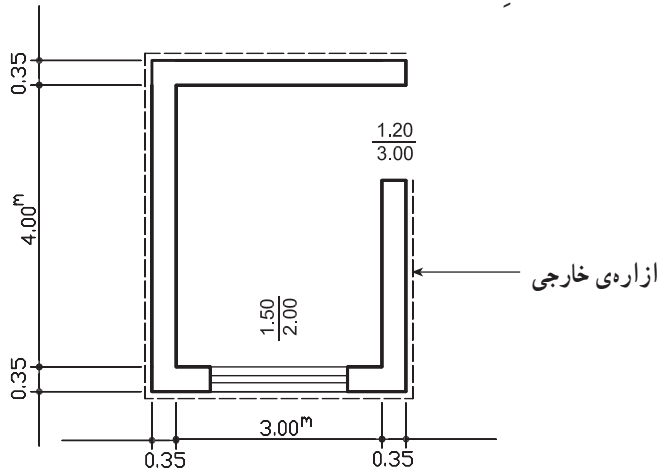
$$42 - 6/60 = 35/40 \text{m}^2 \quad \text{سطح خالص دیوار یا کاغذ دیواری}$$

(باید توجه داشت که کناره‌های داخلی در و پنجره هم کاغذ دیواری می‌شوند، ولی ما در حل

این تمرین، آن قسمت‌ها را منظور نکردیم.)

پ - طول سنگ رگی که در شکل ۱۴، با خط چین نشان داده شده، برابر است با محیط

خارجی اتاق، منهای در ورودی.



شکل ۱۴

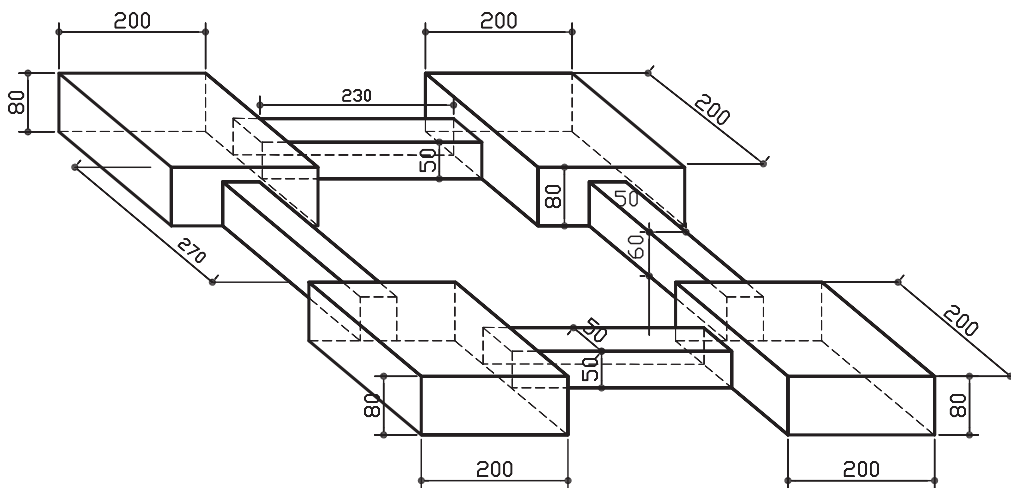
$$4 + 0/35 + 0/35 = 4/70 \text{m} \quad \text{اندازه‌ی طول خارجی اتاق}$$

$$3 + 0/35 + 0/35 = 3/70 \text{m} \quad \text{اندازه‌ی عرض خارجی اتاق}$$

$$4/70 + 3/70 + 4/70 + 3/70 = 16/80 \text{m} \quad \text{طول محیط خارجی اتاق}$$

$$16/80 - 1/20 = 15/60 \text{m} \quad \text{طول سنگ رگی}$$

مثال ۴: شکل ۱۵، زیرسازی‌های یک ساختمان را نشان می‌دهد. سطح قالب‌بندی چند متر مربع است؟ (ابعاد به سانتی‌متر است.)



شکل ۱۵

حل: برای حل این تمرین، کافی است که سطوح جانبی مکعب‌ها را حساب کنیم تا سطح قالب‌بندی به دست آید.

توجه: ۱- کف‌های پایین و بالای پی‌ها و شناژها قالب‌بندی نمی‌شود.

۲- محل اتصال مکعب‌ها (پی‌ها و شناژها) به یکدیگر قالب‌بندی نمی‌شود.

برای سهولت و کوچک‌شدن اعداد، کلیه‌ی اعدادی را که برحسب سانتی‌متر هستند، به متر تبدیل می‌کنیم تا مساحت‌ها بر حسب مترمربع به دست آید:

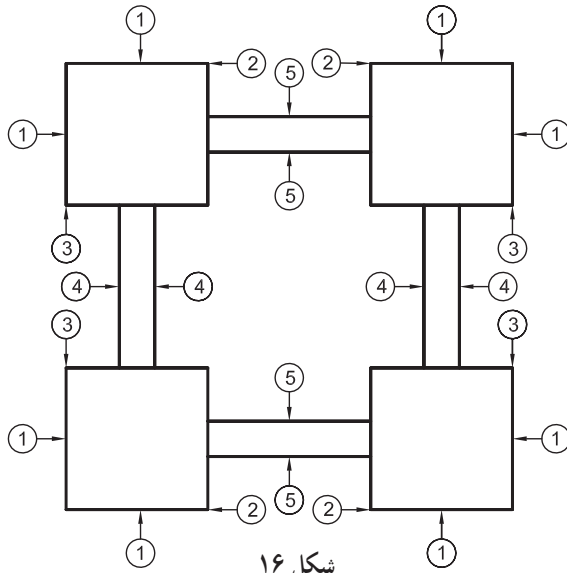
$$200 \div 100 = 2 \text{ m} \quad \text{و} \quad 80 \div 100 = 0/80 \text{ m}$$

$$60 \div 100 = 0/60 \text{ m} \quad \text{و} \quad 50 \div 100 = 0/50 \text{ m}$$

$$270 \div 100 = 2/70 \text{ m} \quad \text{و} \quad 200 \div 100 = 2/00 \text{ m}$$

برای آن‌که در محاسبه اشتباه نکنیم، شکل ساده‌ای می‌کشیم (پلان) و بدنه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم. (بدنه‌های هم‌اندازه، هم‌شماره هستند.)

اگر به دقت به شکل ۱۶ نگاه کنیم، برای هر پی، ۴ بدنه به ابعاد $2 \times 0/80$ متر می‌بینیم که دو بدنه بدون اتصال به شناژ و دو بدنه‌ی دیگر متصل به شناژ هستند. آن‌هایی را که به شناژ وصل نیستند، با شماره‌ی (۱) و آن‌هایی را که وصل هستند، با شماره‌های (۲) و (۳) مشخص کرده‌ایم.



شکل ۱۶

همچنین در این شکل، بدنه‌های شناژهای به طول $۲/۷^{\circ}$ و ارتفاع $۰/۶^{\circ}$ متر با شماره‌ی (۴) و بدنه‌های شناژهای به طول $۲/۳^{\circ}$ و ارتفاع $۰/۶^{\circ}$ متر با شماره‌ی (۵) دیده می‌شوند.

$$۲ \times ۰/۸۰ = ۱/۶۰ \text{ m}^2 \quad \text{سطح قالب یک بدنه‌ی (۱):}$$

$$۱/۶۰ \times ۸ = ۱۲/۸۰ \text{ m}^2 \quad \text{چون ۸ بدنه‌ی (۱) داریم، پس:}$$

$$(۲ \times ۰/۸۰) - (۰/۵۰ \times ۰/۵۰) = ۱/۶۰ - ۰/۲۵ = ۱/۳۵ \text{ m}^2 \quad \text{سطح قالب یک بدنه‌ی (۲):}$$

و همان‌طور که از شکل پیداست، ۴ عدد از این بدنه‌ها داریم، پس:

$$۱/۳۵ \times ۴ = ۵/۴۰ \text{ m}^2$$

$$(۲ \times ۰/۸۰) - (۰/۵۰ \times ۰/۶۰) = ۱/۶۰ - ۰/۳۰ = ۱/۳۰ \text{ m}^2 \quad \text{سطح قالب یک بدنه‌ی (۳):}$$

$$۱/۳۰ \times ۴ = ۵/۲۰ \text{ m}^2 \quad \text{۴ عدد از این بدنه‌ها داریم:}$$

$$۲/۷۰ \times ۰/۶۰ = ۱/۶۲ \text{ m}^2 \quad \text{سطح قالب یک بدنه‌ی (۴):}$$

$$۱/۶۲ \times ۴ = ۶/۴۸ \text{ m}^2 \quad \text{سطح چهار بدنه‌ی (۴):}$$

$$۲/۳۰ \times ۰/۵۰ = ۱/۱۵ \text{ m}^2 \quad \text{سطح قالب یک بدنه‌ی (۵):}$$

$$۱/۱۵ \times ۴ = ۴/۶۰ \text{ m}^2 \quad \text{سطح چهار بدنه‌ی (۵):}$$

با جمع کردن سطوح محاسبه‌شده، مقدار قالب‌بندی به‌دست می‌آید.

سطح قالب‌بندی پی و شناژ

$$۱۲/۸۰ + ۵/۴۰ + ۵/۲۰ + ۶/۴۸ + ۴/۶۰ = ۳۴/۴۸ \text{ m}^2$$

مثال ۵: می‌خواهیم سطح بام یک ساختمان را ۳ لا قیر و ۲ لا گونی کنیم. ابعاد بام $12\text{ m} \times 10\text{ m}$ است و از گونی به عرض 90 cm برای این کار استفاده می‌شود. در صورتی که هر نوار گونی با نوار مجاور 15 cm پوشش داشته باشد و از هر طرف 20 cm روی سطح قائم دست‌انداز بام قرار گیرد، چند متر گونی لازم است؟

حل

$$b = 10 + 0/20 + 0/20 = 10/40\text{ m}$$

عرضی که با گونی پوشیده می‌شود

$$L = 12 + 0/20 + 0/20 = 12/40$$

طولی که با گونی پوشیده می‌شود

$$S = b \times L = 10/40 \times 12/40 = 128/96\text{ m}^2$$

سطحی که با گونی پوشیده می‌شود

$$4 \times 0/20 \times 0/20 = 0/16\text{ m}^2$$

سطح لایه‌های قائم در گوشه‌ها

$$128/96 - 0/16 = 128/80\text{ m}^2$$

سطح گونی لازم با کسر لایه‌های قائم در گوشه‌ها

چون پوشش گونی‌ها بر روی هم 15 سانتی متر است، پس:

$$b = 90 - 15 = 75\text{ cm}$$

عرض بدون پوشش گونی

$$b = 75 \div 100 = 0/75\text{ m}$$

عرض بدون پوشش گونی

$$L = \frac{S}{b} = \frac{128/80}{0/75} = 171/73\text{ m}$$

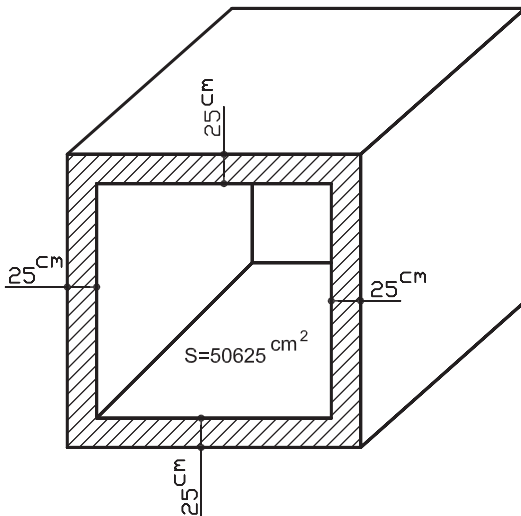
طول گونی (یک لا)

$$L = 171/73 \times 2 = 343/46 = 344\text{ m}$$

طول گونی (دولا)

تمرین

۱- شکل ۱۷ یک آب‌روی بتنی را با مقطع مربع نشان می‌دهد. ابعاد داخلی و خارجی آن را بر حسب متر با دقت دو رقم اعشار محاسبه کنید.



شکل ۱۷

۲ - تعداد ۹۰۰ عدد موزاییک 30×30 سانتی متر برای فرش کردن سالنی مورد نیاز است.

الف - در صورتی که سالن به شکل مربع باشد، ابعاد آن چند متر است؟

ب - در صورتی که سالن به شکل مستطیل و طول آن $1/44$ برابر عرض آن باشد، ابعاد سالن

چند متر است؟

۳ - شکل ۱۸ پی بتنی و قالب آن را نشان می دهد. در صورتی که طول و عرض و ارتفاع قالب

برابر ۴ متر، ۲ متر و 60° سانتی متر باشد، سطح این قالب چند متر مربع است؟



شکل ۱۸

۴ - سطح یک پی با مقطع مربع، 50° متر مربع است. طول ضلع مربع را برحسب متر، با دقت

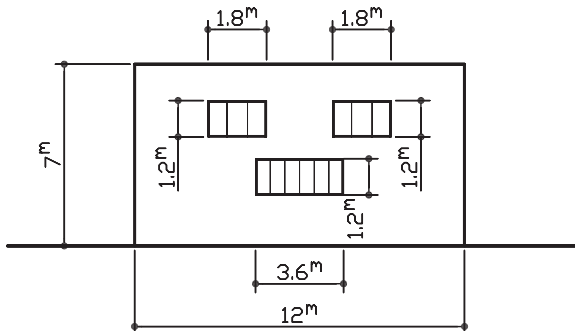
دو رقم اعشار محاسبه کنید.

۵ - دیوارهای مستطیل شکل یک آشپزخانه $3m \times 4m$ و $3m \times 6m$ و $3m \times 5/5m$

است. در صورتی که بخواهیم این دیوارها را با کاشی $15cm \times 15cm$ کاشی کاری کنیم و این کار 7%

پرت داشته باشد، تعداد کاشی های لازم

را حساب کنید.



۶ - شکل ۱۹ نمای یک ساختمان

را نشان می دهد. در صورتی که بخواهیم

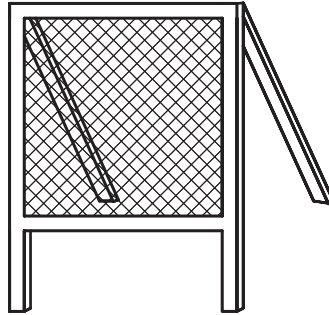
نما را سیمان کاری کنیم، چند متر مربع

سیمان کاری خواهیم داشت؟ (ابعاد به متر

است.)

شکل ۱۹

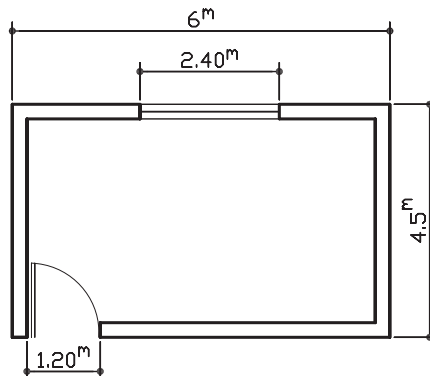
- ۷- سطح قابل استفاده‌ی سرند مربع شکلی (مطابق شکل ۲۰) باید $116/48$ دسی متر مربع باشد :
 الف - ابعاد سرند را برحسب سانتی متر حساب کنید.
 ب - اگر بخواهیم ۶ عدد از این سرندها بسازیم، چند متر مربع توری لازم است؛ با در نظر گرفتن این که برای میخ کردن توری، از هر طرف ۴ سانتی متر اضافه در نظر گرفته شود.



شکل ۲۰

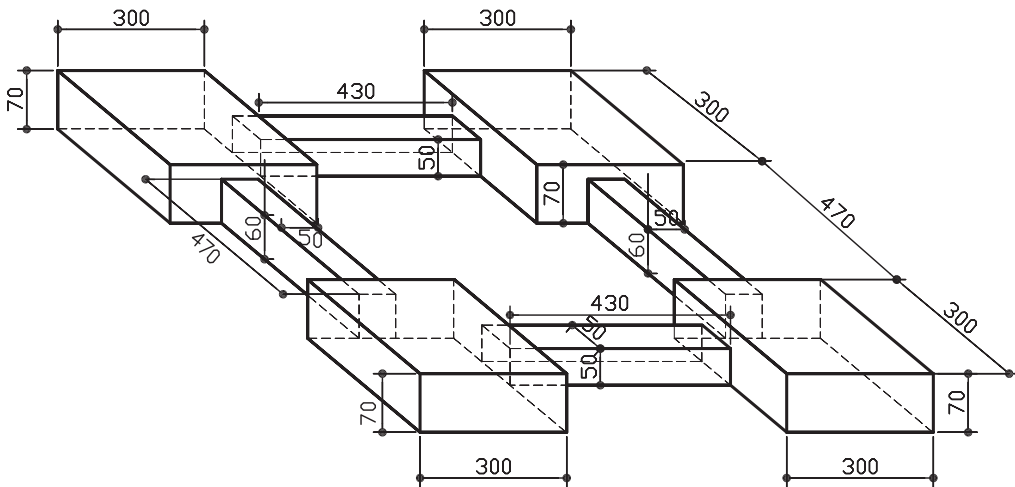
- ۸ - کف انباری به شکل مستطیل با طول $8/20$ m و عرض $4/70$ m باید آجر فرش شود.
 الف - مساحت انبار را برحسب متر مربع حساب کنید.
 ب - در صورتی که برای هر متر مربع ۴۸ عدد آجر لازم باشد، تعداد آجر مورد نیاز، چه قدر است؟
 ۹ - مطابق شکل ۲۱ اگر ارتفاع اتاقی ۳ متر، و ارتفاع پنجره $1/70$ متر، ارتفاع در ۲ متر و ضخامت دیوارها ۲۲ سانتی متر باشد، تعیین کنید :

- الف - مساحت موزاییک فرش کف را برحسب متر مربع.
 ب - سطح سفیدکاری دیوارها و سقف را برحسب متر مربع.
 پ - سطح رنگ آمیزی دیوارها را به متر مربع.



شکل ۲۱

توجه: در و پنجره در سطح داخلی دیوارها (همرو) نصب شده‌اند.
 ۱- شکل ۲۲ زیر سازی‌های یک ساختمان را نشان می‌دهد. سطح قالب‌بندی چند مترمربع است؟ (ابعاد به سانتی‌متر است.)



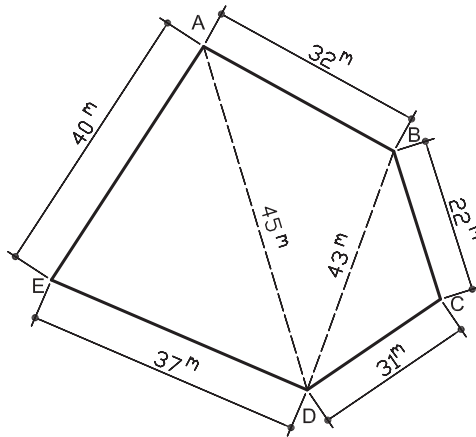
شکل ۲۲

۱۱- می‌خواهیم سطح بام یک ساختمان را ۳ لا قیر و ۲ لا گونی کنیم. ابعاد بام $14m \times 20m$ است و از گونی به عرض $90cm$ برای این کار استفاده می‌شود. در صورتی که هر نوار گونی با نوار مجاور آن $12cm$ پوشش داشته باشد و از هر طرف $25cm$ گونی روی سطح قائم دست انداز بام قرار گیرد، چند متر گونی لازم است؟

۴- محاسبه‌ی مساحت چند ضلعی‌ها

۴-۱- مساحت چند ضلعی غیرمنتظم را از تبدیل کردن آن به مساحت چند مثلث یا چهارضلعی‌های مشخصی به دست می‌آوریم.

مثال: یک زمین به شکل پنج ضلعی غیرمنتظم ABCDE (شکل ۲۳) داریم. طول اضلاع و طول دو قطر آن اندازه‌گیری شده است. مساحت این چند ضلعی چند متر مربع است؟



شکل ۲۳

حل: مساحت این پنج ضلعی برابر است با: $S_{ABCDE} = S_{ADE} + S_{ADB} + S_{BDC}$

$$S_{ADE} = \sqrt{p(p-40)(p-37)(p-45)}, \quad p = \frac{37+40+45}{2} = 61$$

$$S_{ADE} = \sqrt{61(61-40)(61-37)(61-45)} = \sqrt{491904}$$

$$S_{ADE} = 701/36 \text{ m}^2$$

$$S_{ADB} = \sqrt{p(p-45)(p-43)(p-32)}, \quad p = \frac{45+43+32}{2} = 60$$

$$S_{ADB} = \sqrt{60(60-45)(60-43)(60-32)} = \sqrt{428400}$$

$$S_{ADB} = 654/52 \text{ m}^2$$

$$S_{BDC} = \sqrt{p(p-43)(p-31)(p-22)}, \quad p = \frac{43+31+22}{2} = 48$$

$$S_{BDC} = \sqrt{48(48-43)(48-31)(48-22)} = \sqrt{106080}$$

$$S_{BDC} = 325/70 \text{ m}^2$$

مساحت پنج ضلعی

$$S_{ABCDE} = 701/36 \text{ m}^2 + 654/52 \text{ m}^2 + 325/70 \text{ m}^2 = 1681/58 \text{ m}^2$$

۲-۴- مساحت چند ضلعی منتظم

$$S = \frac{na^2}{4 \operatorname{tg} \frac{180}{n}} \quad \text{مساحت } n \text{ ضلعی منتظم که اندازه ی ضلع آن } a \text{ باشد برابر است با:}$$

مثال: مساحت مربعی به طول ۱۰ متر برابر است با:

$$S = \frac{4}{4} \times \frac{10^2}{\text{tg } \frac{18^\circ}{4}} = 1 \times \frac{100}{\text{tg } 45^\circ} = \frac{100}{1} = 100 \text{ m}^2 \quad \boxed{n = 4}$$

مثال: طول ضلع یک ۸ ضلعی منتظم ۴۵m است، مساحت آن چند متر مربع است؟

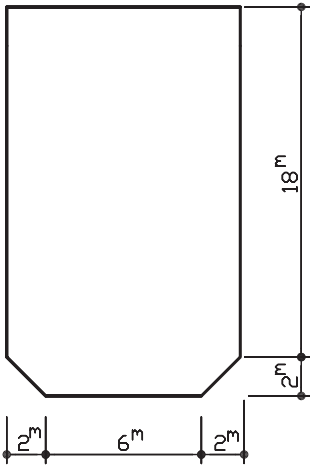
حل: داریم:

$$S = \frac{na^2}{4 \text{tg } \frac{180^\circ}{n}}, \quad n = 8, \quad a = 45 \text{ m}$$

$$S = \frac{8 \times 45^2}{4 \times \text{tg } \frac{180^\circ}{8}} = \frac{2 \times 45^2}{\text{tg } 22.5^\circ} = \frac{4050}{0.4142} = 9777.885 \text{ m}^2$$

تمرین

۱- شکل ۲۴ نمای سر یک ساختمان مسکونی را نشان می دهد. سطح زیربنای آن چند متر مربع است؟



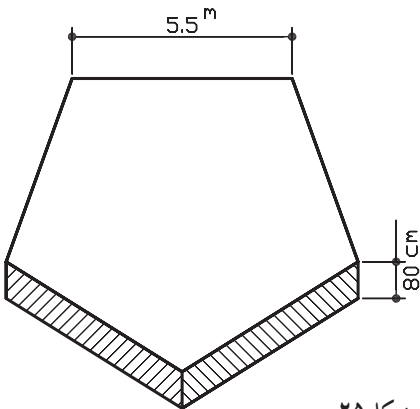
شکل ۲۴

۲- شکل ۲۵ زیرسازی (فونداسیون) یک سیلوی نگهداری سیمان را نشان می دهد که به شکل پنج ضلعی منتظم است.

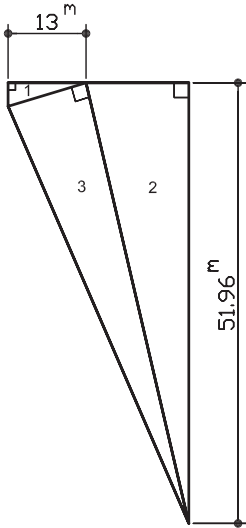
الف- سطح روی زیرسازی را به متر مربع محاسبه کنید.

ب- برای قالب بندی آن چند متر مربع تخته لازم است؟ (مقدار افت برابر ۲۰٪ منظور شود.)

(توجه: فقط بدنه های زیرسازی چند ضلعی)



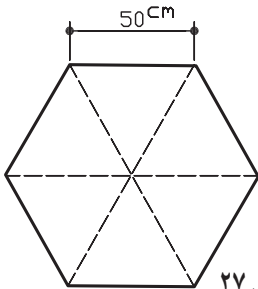
شکل ۲۵



شکل ۲۶

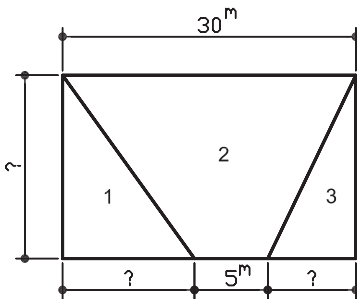
قالب بندی می شوند.)

۳ - قطعه زمینی به شکل دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه را به سه قطعه زمین به صورت مثلث قائم‌الزاویه تفکیک کرده ایم. در صورتی که مساحت دوزنقه برابر $1278/39$ متر مربع و مساحت مثلث (۱) برابر $48/75$ متر مربع باشد، مساحت و طول اضلاع مثلث‌های (۲) و (۳) را برحسب متر مربع و متر محاسبه کنید.



شکل ۲۷

۴ - مقطع یک ستون بتن آرمه مطابق شکل ۲۷ به صورت یک شش ضلعی منتظم به طول هر ضلع 50 سانتی متر است. سطح مقطع ستون را برحسب سانتی متر مربع و متر مربع به دست آورید.



۵ - زمینی مطابق شکل ۲۸ باید بین ۳ نفر تقسیم شود. اگر مساحت شکل (۲) برابر 350 متر مربع و مساحت شکل (۱)، $1/5$ برابر مساحت شکل (۳) باشد، اندازه‌های مجهول روی شکل را برحسب متر به دست آورید.

شکل ۲۸

۶ - طول دیوار حایل نشان داده شده در شکل ۲۹، 25 متر است.

الف - سطح مقطع دیوار را محاسبه کنید. m^2

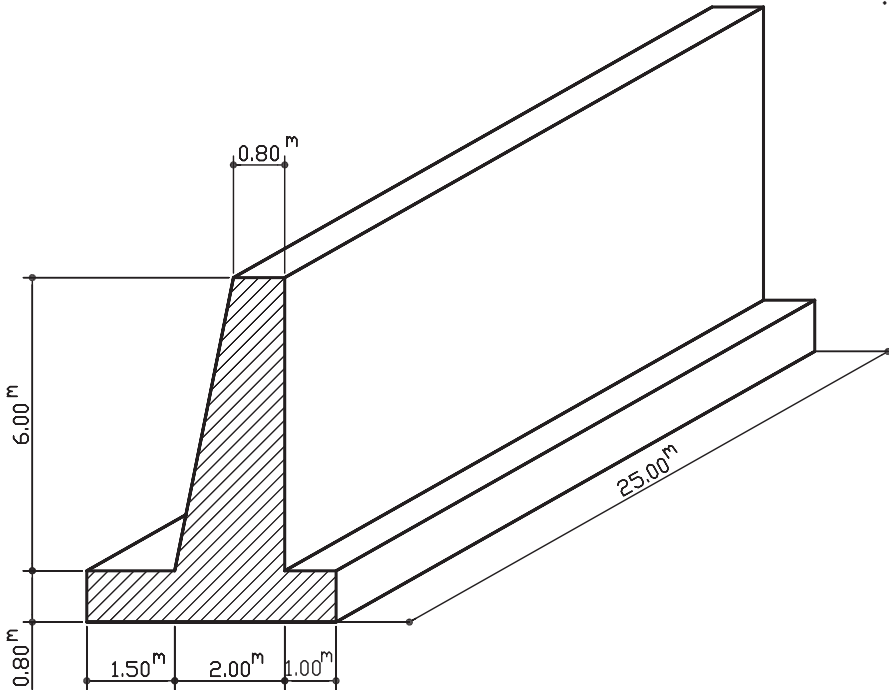
ب - چنانچه دیوار از بتن ساخته شود، برای قالب بندی آن چند متر مربع تخته لازم است؟ (مقدار افت برابر 20% منظور شود.)

راهنمایی: نسبت مقدار مصالح تلف شده به مقدار مصالح مصرف شده را افت گویند.

$$\text{افت} = \frac{\text{مقدار مصالح تلف شده}}{\text{مقدار مصالح مصرف شده}}$$

پ - نظر به اینکه تاکنون حجم شناسی را نگذرانده‌اید؛ آیا می‌توانید حجم دیوار را محاسبه

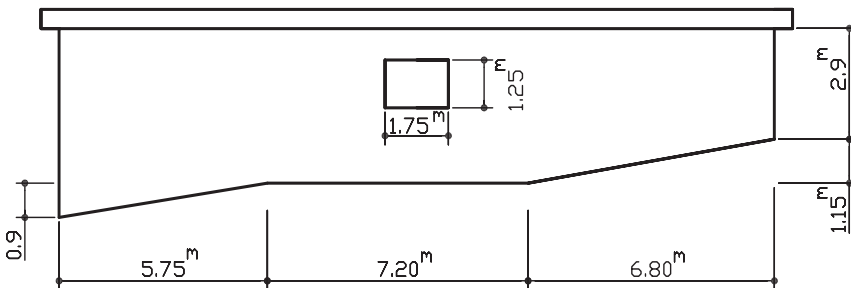
کنید؟



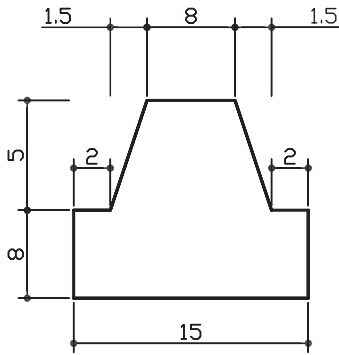
شکل ۲۹

۷ - شکل ۳۰ دیوار ساختمانی را نشان می‌دهد که باید اندود شود. مساحت اندودکاری دیوار

را برحسب متر مربع تعیین کنید.



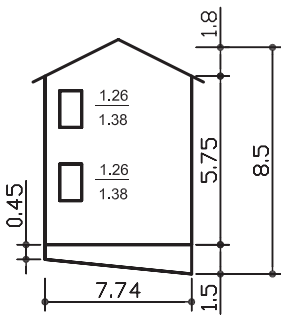
شکل ۳۰



شکل ۳۱

۸- شکل ۳۱ سقف بالکن یک رستوران را نشان می‌دهد که باید اندود شود :

الف - سطح اندودکاری را به متر مربع تعیین کنید.
ب - در صورتی که هر متر مربع اندود، ۱۵ کیلوگرم گچ لازم داشته باشد، مقدار گچ مورد نیاز چند کیلوگرم است؟



شکل ۳۲

۹- قرار است نمای ساختمانی مطابق شکل ۳۲ دوباره اندود شود. قسمت کرسی (مسنی)، اندود سیمان لیس‌ای می‌شود. تعیین کنید :

الف - مساحت اندودکاری را برحسب متر مربع (بدون کرسی).

ب - مساحت اندودکاری کرسی را برحسب متر مربع.
پ - مقدار مصالح لازم را برای کرسی برحسب کیلوگرم و لیتر. (برای اندود لیس‌ای، ۷ کیلوگرم سیمان و ۲۱ لیتر ماسه در هر متر مربع مصرف می‌شود).



روش محاسبه عدد π توسط غیاث‌الدین جمشید کاشانی محاسبات به کمک دو کثیرالاضلاع منتظم محاطی و محیطی که عده اضلاع هریک از آن‌ها ضلعی است $۸۰۵۳۰۶۳۶۸ = ۳ \times (۲)^{۲۸}$ و از تقسیم محیط این کثیرالاضلاع بر قطر دایره آن عدد پی را محاسبه کرده است و کاشانی مقدار تقریبی ۲π را در دستگاه شصتگانی مساوی

$$۲\pi = ۶,۱۶,۵۹,۲۸,۱,۳۴,۵۱,۴۶,۱۴,۵$$

و سپس آن را به کسرهای اعشاری که اختراع نوینی بوده تبدیل کرد

$$2\pi = 6/2831853071795865$$

$$\pi = 3/141592653589793$$

۵- محاسبه‌ی مساحت دایره و بیضی

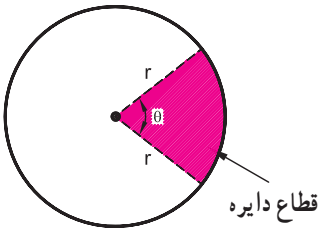
$$S = \pi r^2$$

۱- ۵- مساحت دایره به شعاع r برابر است با:

۲- ۵- مساحت قطاع دایره به شعاع r و زاویه‌ی مرکزی θ (برحسب رادیان) عبارت است

$$S = \frac{\theta}{2} r^2$$

از:



شکل ۳۳

یادآوری: قسمتی از دایره را که بین دو شعاع و یک قوس محصور باشد، قطاع دایره می‌گویند (شکل ۳۳).

نکته: اگر زاویه‌ی مرکزی قطاع (α) برحسب درجه باشد، داریم:

$$S = \frac{\alpha}{360} \times \pi r^2$$

۳- ۵- مساحت قطعه‌ی دایره به شعاع r و زاویه‌ی مرکزی θ (برحسب رادیان) برابر است

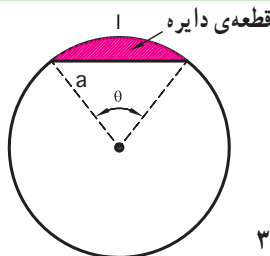
$$S = \frac{\theta - \sin \theta}{2} \times r^2$$

با:

یادآوری: قسمتی از دایره را که بین یک قوس و وترِ مقابل آن محصور باشد، «قطعه‌ی دایره» می‌نامند (شکل ۳۴).

نکته: طول قوس مقابل به زاویه‌ی θ برابر است با:

$$l = \theta r$$



شکل ۳۴

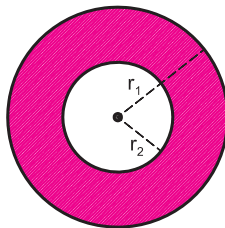
$$a = r \sin \frac{\theta}{2}$$

طول وترِ مقابل به زاویه θ برابر است با:

۴- ۵- مساحت حلقه‌ی بین دو دایره به شعاع‌های r_1 و r_2 برابر است با:

$$S = \pi (r_1^2 - r_2^2)$$

یادآوری: حلقه‌ی دایره عبارت است از سطح محصور بین دو دایره‌ی هم‌مرکز با شعاع‌های مختلف (شکل ۳۵).



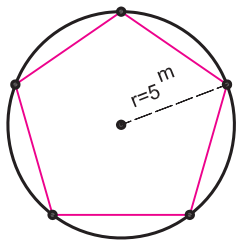
شکل ۳۵

۵- ۵- مساحت n ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع r برابر است با:

$$S = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{36^\circ}{n}$$

مثال: مساحت پنج ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع $5m$ چه قدر است؟ (شکل ۳۶)

حل



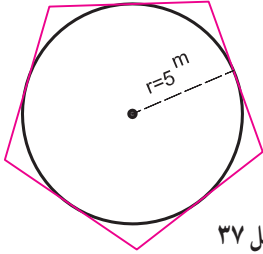
شکل ۳۶

$$S = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{36^\circ}{n}, \quad n = 5, \quad r = 5m$$

$$S = \frac{5}{2} \times 5^2 \sin \frac{36^\circ}{5} = \frac{125}{2} \times 0.9511 = 59.44 \text{ m}^2$$

۵-۶ - مساحت n ضلعی منتظم محیط بر دایره به شعاع r برابر است با:

$$S = nr^2 \operatorname{tg} \frac{18^\circ}{n}$$



شکل ۳۷

مثال: مساحت پنج ضلعی منتظم محیط بر دایره به شعاع ۵m چه قدر

است؟ (شکل ۳۷)

حل

$$S = nr^2 \operatorname{tg} \frac{18^\circ}{n}, \quad n = 5, \quad r = 5 \text{ m}$$

$$S = 5 \times 5^2 \operatorname{tg} \frac{18^\circ}{5} = 125 \times 0.7265 = 90.81 \text{ m}^2$$

$$S = \pi ab$$

۵-۷ - مساحت بیضی به قطرهای ۲a و ۲b برابر است با:

یادآوری: مکان هندسی نقاطی که مجموع فاصله‌ی آنها از دو نقطه‌ی ثابت (کانون‌های بیضی) برابر مقدار ثابتی (قطر بزرگ بیضی یعنی ۲a) باشد، بیضی نام دارد.

مثال: قطر بزرگ یک بیضی ۵۰ متر و قطر کوچک آن ۴۰ متر است، مساحت آن چند متر مربع

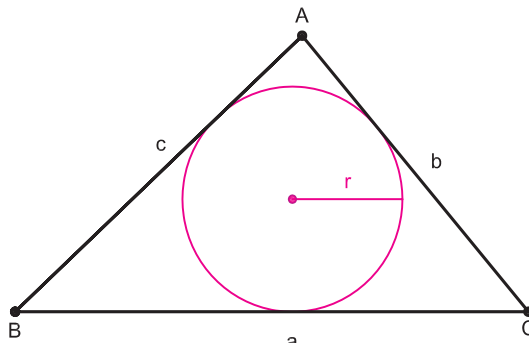
است؟

$$S = \pi ab, \quad a = 25, \quad b = 20 \Rightarrow S = 3.14 \times 25 \times 20 = 1570 \text{ m}^2$$

حل

۵-۸ - مساحت دایره‌ی محاطی یک مثلث: در شکل ۳۸، مثلث ABC و دایره‌ی محاطی

آن را مشاهده می‌کنید.



شکل ۳۸

$$\text{شعاع دایره‌ی محاطی مثلث} = \frac{\text{مساحت مثلث}}{\text{نصف محیط مثلث}}$$

$$r = \frac{S_{ABC}}{p}$$

مثال: اضلاع مثلث شکل ۳۸ عبارت‌اند از: $a = ۶۸\text{m}$ و $b = ۵۲\text{m}$ و $c = ۴۴\text{m}$ مساحت

دایره‌ی محاطی آن چند متر مربع است؟

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\sqrt{p(p-68)(p-52)(p-44)}}{p}, \quad p = \frac{52+68+44}{2} = 82 \quad \text{حل}$$

مساحت دایره‌ی محاطی

$$= \pi r^2 = \pi \frac{p(p-68)(p-52)(p-44)}{p^2} = \pi \frac{(p-68)(p-52)(p-44)}{p}$$

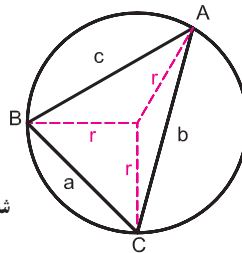
$$\text{مساحت دایره‌ی محاطی} = \frac{3/14(82-68)(82-52)(82-44)}{82}$$

$$\text{مساحت دایره‌ی محاطی} = \frac{3/14 \times 14 \times 30 \times 38}{82} = \frac{50114/4}{82} = 611/15 \text{m}^2$$

۹-۵- مساحت دایره‌ی محیطی مثلث: در شکل ۳۹، مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن

را ملاحظه می‌کنید.

$$\text{شعاع دایره‌ی محیطی} = r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S_{ABC}}$$

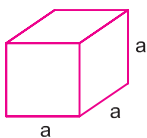


شکل ۳۹

بنابراین مساحت دایره‌ی محیطی مثلث برابر است با:

$$S = \frac{\pi a^2 b^2 c^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

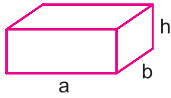
۶- محاسبه‌ی سطح جانبی و سطح کل اجسام هندسی و اجسام مرکب



شکل ۴۰

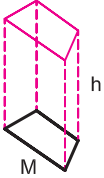
۶-۱- سطح جانبی اجسام منشوری = محیط قاعده \times ارتفاع

سطح جانبی مکعب به ضلع a برابر است با: $4a^2$



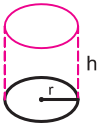
شکل ۴۱

سطح جانبی یک مکعب مستطیل به ابعاد قاعده‌ی a و b و ارتفاع h برابر است با: $2(a+b)h$



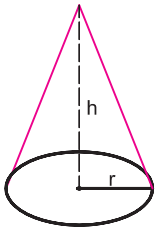
شکل ۴۲

سطح جانبی منشور با محیط قاعده‌ی M و ارتفاع h برابر است با: Mh



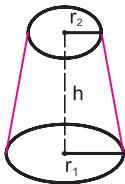
شکل ۴۳

سطح جانبی استوانه با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $2\pi rh$



شکل ۴۴

سطح جانبی مخروط با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $\pi r \sqrt{h^2 + r^2}$



شکل ۴۵

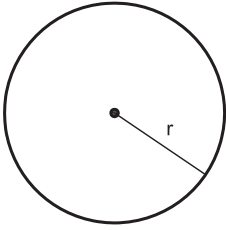
سطح جانبی مخروط ناقص با شعاع قاعده‌ی پایینی r_1 و شعاع قاعده‌ی بالایی r_2 و ارتفاع h برابر است با: $h\pi(r_1 + r_2)$

سطح جانبی هرم برابر است با: مجموع سطوح جانبی آن

سطح کل احجام برابر است با: سطح جانبی + سطح قاعده‌ها

سطح جانبی احجام مرکب برابر است با: مجموع سطوح جانبی اجزای تشکیل دهنده‌ی آنها.

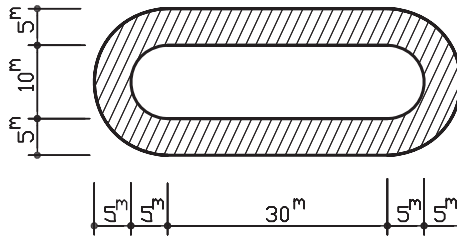
سطح کل کره به شعاع r برابر است با: $4\pi r^2$



شکل ۴۶

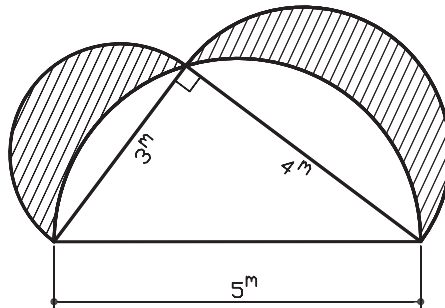
تمرین

- ۱- در شکل ۴۷ قسمت‌های هاشور خورده‌ی زمین دو و میدانی یک استادیوم نشان داده شده است. در صورتی که بخواهیم در قسمت میدانی این زمین چمن بکاریم:
- الف - مساحت کل زمین را به متر مربع حساب کنید.
- ب - مساحت قسمت چمن کاری چند متر مربع است؟
- پ - چند درصد کل زمین چمن کاری می‌شود؟
- ت - در صورتی که بخواهیم پیرامون قسمت چمن کاری را جدول نصب کنیم، چند متر جدول لازم داریم؟



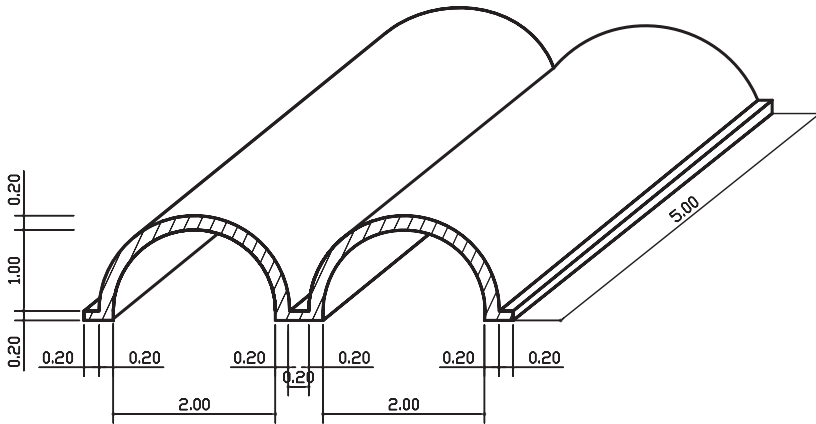
شکل ۴۷

- ۲- در شکل ۴۸ مساحت قسمت هاشور خورده را که آب نمای قسمتی از یک محوطه‌سازی را نشان می‌دهد، به دست آورید. (نیم‌دایره‌ها هرکدام به قطر یکی از اضلاع مثلث هستند.)



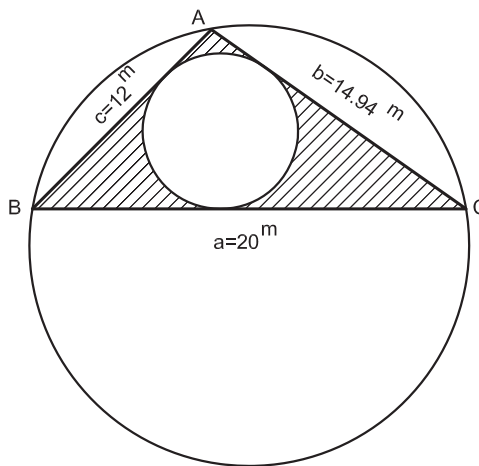
شکل ۴۸

۳- شکل ۴۹ یک سقف پوسته‌ای بتن آرمه را نشان می‌دهد. سطح مقطع بتن قسمت هاشور خورده را برحسب متر مربع به دست آورید.



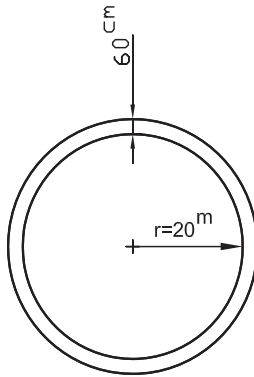
شکل ۴۹

۴- شکل ۵۰ قسمتی از فضای سبز یک پارک را نشان می‌دهد:
 الف- مساحت قسمت هاشور خورده که چمن کاری شده است، چند متر مربع می‌باشد؟
 ب- مساحت دایره‌ی بزرگ‌تر را برحسب متر مربع حساب کنید.
 پ- در صورتی که بخواهیم پیرامون دایره‌ی بزرگ‌تر جدول نصب کنیم، چند متر جدول لازم داریم؟



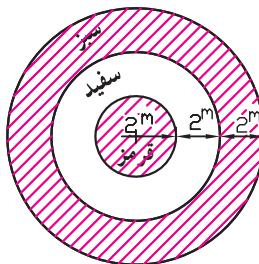
شکل ۵۰

۵ - استخری دایره‌ای شکل به شعاع 20° متر (شکل ۵۱) موجود است. می‌خواهیم لبه‌ی استخر را به عرض 60° سانتی‌متر سنگ‌فرش کنیم؛ مساحت سنگ مورد نیاز چند متر مربع است؟



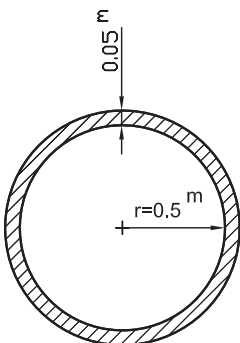
شکل ۵۱

۶ - قرار است یک سایه‌بان دایره‌ای شکل به صورت پرچم ایران رنگ آمیزی شود (شکل ۵۲)؛ سطح هر کدام از رنگ‌ها را برحسب متر مربع به دست آورید.

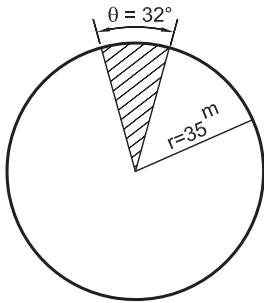


شکل ۵۲

۷ - شکل ۵۳ مقطع یک لوله‌ی بتنی را نشان می‌دهد.
 الف - سطح مقطع داخل لوله چند سانتی‌متر مربع است؟
 ب - سطح مقطع بتن مصرفی چند سانتی‌متر مربع است؟
 پ - نسبت سطح مقطع بتن مصرفی به سطح مقطع داخل لوله چند درصد است؟



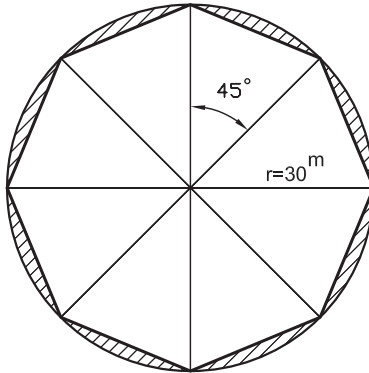
شکل ۵۳



شکل ۵۴

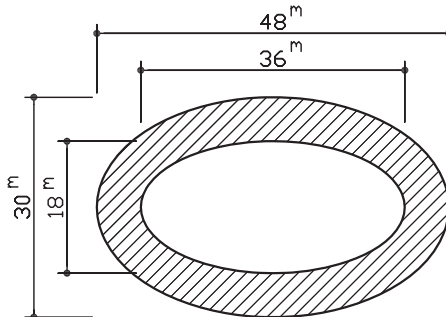
۸- قسمت هاشور خورده در شکل ۵۴ را با موزاییک فرش کرده ایم. مساحت و محیط قسمت موزاییک شده را برحسب متر مربع و متر محاسبه کنید.

۹- می خواهیم مطابق شکل ۵۵، قسمت هاشور خورده ی یک میدان را گل کاری کنیم.
الف- مساحت قسمت گل کاری (قسمت هاشور خورده) را برحسب متر مربع محاسبه کنید.
ب- در صورتی که بخواهیم پیرامون قسمت گل کاری، جدول نصب کنیم، طول بخش جدول کاری چند متر است؟



شکل ۵۵

۱۰- یک زمین مسابقه ی دو مطابق شکل ۵۶ است (قسمت هاشور خورده).
الف- مساحت زمین دو را محاسبه کنید. (m^2)
ب- اگر پیرامون قسمت داخلی و خارجی این زمین نرده کشی شود، در مجموع چند متر نرده کشی خواهد شد؟



شکل ۵۶