فصل دوم

محاسبه‌ی زاویه

هدفهای رفتاری: فراگیر باید در پایان این فصل بتواند :

۱ــ واحدهای اندازه‌گیری زاویه را توضیح دهد.

۲ــ واحدهای اندازه‌گیری زاویه را به یکدیگر تبدیل کند.

۳ــ زوایای مثلث را محاسبه کند.

۴ــ زوایای داخلی یک چندضلعی را محاسبه کند.

۱ــ واحدهای اندازه‌گیری زاویه

۱ــ۱ــ درجه

$\frac{۱}{۳۶۰}$ زاویه‌ی تمام صفحه را «درجه» می‌نامند. به عبارت دیگر، اگر صفحه‌ی یک دایره را با رسم قطرهایش به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هرکدام از زاویه‌های مرکزی به وجود آمده برابر یک درجه خواهد بود.

• اجزای درجه عبارت‌اند از دقیقه و ثانیه

• دقیقه عبارت‌است از $\frac{۱}{۶۰}$ درجه و در اندازه‌گیری‌های دقیق به‌کار می‌رود.

• ثانیه عبارت‌است از $\frac{۱}{۶۰}$ دقیقه و در اندازه‌گیری‌های بسیار دقیق به‌کار می‌رود.

• برای نشان دادن «درجه»، «دقیقه» و «ثانیه» به ترتیب از علامت‌های ($^\circ$)، ($'$) و ($''$) استفاده می‌شود.

مثلاً ۲۷ درجه و ۴۵ دقیقه و ۱۲ ثانیه را چنین می‌نویسیم $۲۷^\circ\ ۴۵'\ ۱۲''$

مثال: می‌خواهیم یک زاویه‌ی ۸۵° را به ۹ قسمت مساوی تقسیم کنیم. هر قسمت چند درجه، چند دقیقه و چند ثانیه خواهد شد؟

حل

$$\begin{array}{r|l} ۸۵^\circ & \underline{۹} \\ \underline{-۸۱} & ۹^\circ \\ ۴^\circ & \end{array}$$

۴° را به دقیقه تبدیل می‌کنیم : $۴ \times ۶۰' = ۲۴۰'$

به ۹ قسمت تقسیم می‌کنیم :

$$\begin{array}{r|l} ۲۴۰' & \underline{۹} \\ \underline{۲۳۴'} & ۲۶' \\ ۶' & \end{array}$$

$۶'$ باقی‌مانده را به ثانیه تبدیل می‌کنیم : $۶' \times ۶۰ = ۳۶۰''$

به ۹ قسمت تقسیم می‌کنیم. $۳۶۰'' \div ۹ = ۴۰''$

بنابراین اندازه‌ی هر قسمت برابر است با : $۸۵^\circ \div ۹ = (۹^\circ \ \ ۲۶' \ \ ۴۰'')$

نکته: مقدار زاویه‌ی برحسب درجه را به‌صورت اعشاری نیز نمایش می‌دهند. برای تبدیل آن به درجه، دقیقه و ثانیه یا برعکس، از مضرب ۶۰ یا $\frac{۱}{۶۰}$ استفاده می‌کنیم. به دو مثال توجه کنید.

مثال ۱: زاویه‌ی مخروطی $۲^\circ, ۵۱', ۴۰''$ می‌باشد. مقدار آن چند درجه است؟

حل

$$\begin{array}{ll} ۲^\circ & = ۲^\circ \\ ۵۱' = \dfrac{۵۱^\circ}{۶۰} & = ۰/۸۵^\circ \\ ۴۰'' = \dfrac{۴۰^\circ}{۶۰ \times ۶۰} & = ۰/۰۱۱^\circ \\ \hline ۲^\circ ۵۱' ۴۰'' & = ۲/۸۶۱^\circ \end{array}$$

مثال ۲: مقدار زاویه‌ای $\alpha = ۵/۷۱۰۶^\circ$ می‌باشد. اندازه‌ی آن برحسب درجه، دقیقه و ثانیه چه‌قدر است؟

حل

$$\begin{array}{ll} ۵^\circ & = ۵^\circ \\ ۰/۷۱۰۶^\circ = ۰/۷۱۰۶ \times ۶۰' & = ۴۲/۶۳۶' \\ ۰/۶۳۶' = ۰/۶۳۶ \times ۶۰'' & = ۳۸/۱۶'' \\ \hline ۵/۷۱۰۶^\circ & = ۵^\circ, ۴۲', ۳۸/۱۶'' \end{array}$$

۲ــ۱ــ گراد

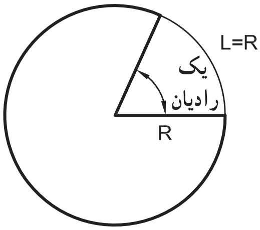
$\frac{۱}{۴۰۰}$ زاویه‌ی تمام صفحه را «گراد» می‌نامند و آن را با حرف g نمایش می‌دهند.

- $\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد را دقیقه‌ی گرادی و $\frac{۱}{۱۰۰}$ دقیقه‌ی گرادی را ثانیه‌ی گرادی می‌گویند.
- معمولاً اجزای زاویه‌ی گرادی را به‌صورت اعشاری نمایش می‌دهند.

مثال: ۷۲ گراد و ۵ دقیقه و ۲۳ ثانیه‌ی گرادی را چنین می‌نویسند : ۷۲/۰۵۲۳

۳ــ۱ــ رادیان

در هر دایره، یک رادیان اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی است که طول قوس مقابل به آن، برابر شعاع دایره باشد.



شکل ۱

برای تعیین اندازه‌ی یک زاویه برحسب رادیان، کافی است طول قوس مقابل آن را به شعاع دایره تقسیم کنیم.

$$\frac{\text{طول قوس مقابل زاویه}}{\text{شعاع دایره}} = \text{اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان}$$

مثال: یک زاویه‌ی تمام صفحه چند رادیان است؟

می‌دانیم : $\frac{\text{طول قوس}}{\text{شعاع}} = $ رادیان $\qquad \theta = \frac{1}{R}$ رادیان

در این مثال، طول قوس عبارت است از محیط دایره، یعنی : $1 = ۲\pi R$

بنابراین زاویه‌ی تمام صفحه برابر است با : $\theta = \frac{۲\pi R}{R} = ۲\pi$

۲ـ تبدیل واحدهای درجه، گراد و رادیان به یکدیگر

۱ـ۲ـ تبدیل واحدهای درجه و گراد

یک زاویه‌ی تمام صفحه برابر است با ۳۶۰ درجه یا ۴۰۰ گراد، بنابراین اگر مقدار یک زاویه برحسب درجه را با حرف D و مقدار همان زاویه را برحسب گراد با حرف G نمایش دهیم، داریم :

$$\boxed{\frac{D}{۳۶۰}=\frac{G}{۴۰۰}} \xrightarrow{\text{و به‌صورت ساده شده}} \boxed{\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}}$$

مثال : ۳۶° چند گراد است؟

یعنی $D=۳۶$ و می‌خواهیم G را محاسبه کنیم، داریم :

$$\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}$$

$$\frac{۳۶}{۹}=\frac{G}{۱۰}\Rightarrow G=\frac{۱۰\times ۳۶}{۹}=۴۰\Rightarrow G=۴۰$$

مثال : یک زاویه‌ی ۵۵ گراد چند درجه است؟

$$\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}\Rightarrow\frac{D}{۹}=\frac{۵۵}{۱۰}\rightarrow D=۹\times ۵/۵=۴۹/۵^\circ$$

یعنی $D=(۴۹^\circ ۰/۵\times ۶۰')\Rightarrow D=(۴۹^\circ ۳۰')$

۲ـ۲ـ تبدیل واحدهای درجه و گراد به رادیان

اگر اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان را با R_a نمایش دهیم، داریم : $\boxed{\frac{D}{۳۶۰}=\frac{G}{۴۰۰}=\frac{R_a}{۲\pi}}$

مثال: یک رادیان چند درجه و چند گراد است؟

• تبدیل رادیان به درجه :

$$\frac{D}{۳۶۰}=\frac{R_a}{۲\pi}\ ,\ R_a=۱$$

$$\frac{D}{۳۶۰^\circ}=\frac{۱}{۲\pi}\Rightarrow D=\frac{۳۶۰^\circ}{۲\times ۳/۱۴}=۵۷^\circ\ ,\ (\frac{۵۱}{۱۵۷})^\circ\simeq ۵۷^\circ,(\frac{۵۰}{۱۵۰})^\circ$$

$$D\simeq ۵۷^\circ\ \frac{۱}{۳}^\circ\Rightarrow D\simeq ۵۷^\circ\ \ ۲۰'$$

• تبدیل رادیان به گراد :

$$\frac{G}{۴۰۰}=\frac{R_a}{۲\pi}\ ,\ R_a=۱$$

$$\frac{G}{۴۰۰}=\frac{۱}{۲\pi}\Rightarrow G=\frac{۴۰۰}{۲\times ۳/۱۴}=۶۴/۳۸g$$

تمرین

۱ــ مقدار زوایای مقابل را برحسب درجه و دقیقه به‌دست آورید : $۲۷\frac{۱}{۲}^\circ$ ، $۶۲/۶۷^\circ$ و $۳۸/۲۳^\circ$.

۲ــ مقدار زوایای مقابل را برحسب درجه و دقیقه به‌دست آورید : $۳۶۲'$ ، $۸۹'$ ، $۵۸۲'$ و $۱۳۲۴'$.

۳ــ مقدار زوایای مقابل را برحسب دقیقه و ثانیه به‌دست آورید : $۱۶/۴۲'$، $۴۹/۶'$ ، $۴/۳۶'$ و $۰/۰۶'$.

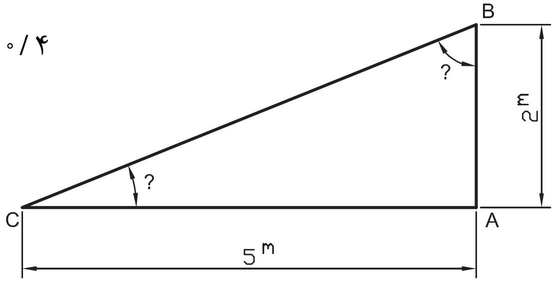
۳ــ محاسبه‌ی زوایای مثلث

۱ــ۳ــ محاسبه‌ی زوایای مثلث قائم‌الزاویه

● ***حالت اول:*** با معلوم بودن اندازه‌ی دو ضلع مجاور زاویه‌ی قائمه

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل ۲ اندازه‌ی زاویه‌های B و C چند درجه است؟

$$tgC = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$



شکل ۲

با مراجعه به جدول مثلثاتی داریم : $tg۲۱^\circ ۴۸' = ۰/۳۹۹۷ \simeq ۰/۴$

درنتیجه : $C = ۲۱^\circ ۴۸'$

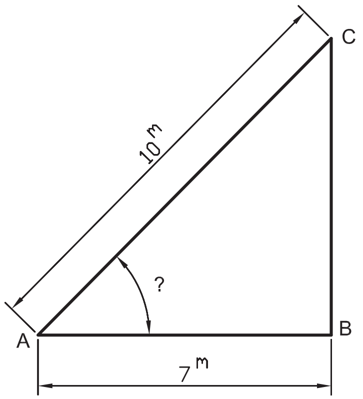
$$B = ۹۰ - C = ۹۰^\circ - (۲۱^\circ ۴۸') = (۸۹^\circ ۶۰') - (۲۱^\circ ۴۸')$$

$$B = ۶۸^\circ ۱۲'$$

● **حالت دوم:** اندازه‌ی وتر و یک ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه معلوم است.

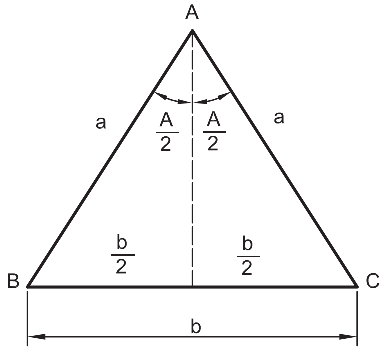
مثال: در شکل ۳ اندازه‌ی زاویه‌ی A چند درجه است؟

$$\cos A = \frac{۷}{۱۰} = ۰/۷ \xrightarrow{\text{با مراجعه به جدول}} A = ۴۵^\circ ۳۴'$$



شکل ۳

۲ــ۳ــ محاسبه‌ی زوایای مثلث متساوی الساقین: در مثلث متساوی‌الساقین ABC (شکل ۴) ارتفاع نظیر رأس A، نیم‌ساز زاویه‌ی A و عمود منصف ضلع مقابل به زاویه‌ی A می‌باشد ؛ بنابراین با توجه به روابط مثلثاتی داریم :

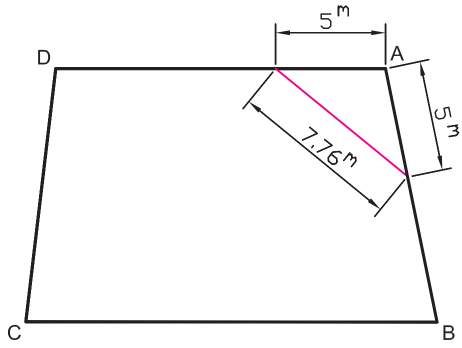


شکل ۴

$$\sin(\frac{A}{۲}) = \frac{\frac{b}{۲}}{a} = \frac{b}{۲a} \quad \text{یا} \quad \cos C = \frac{\frac{b}{۲}}{a} = \frac{b}{۲a}$$

یعنی با محاسبه‌ی $\frac{b}{۲a}$ و با استفاده از جدول سینوس‌ها، نصف زاویه‌ی A را به‌دست می‌آوریم. همچنین با داشتن $\frac{b}{۲a}$، می‌توان مقدار زاویه‌ی C و نیز B (چون B=C) را از جدول کسینوس‌ها به‌دست آورد.

مثال: برای اندازه‌گیری زاویه‌ی A در گوشه‌ی یک زمین، دو طول مساوی ۵ متری در روی دو ضلع آن جدا کرده و سپس ضلع سوم آن‌را اندازه‌گیری نموده‌ایم (شکل ۵). اندازه‌ی زاویه‌ی A چند درجه است؟



شکل ۵

حل

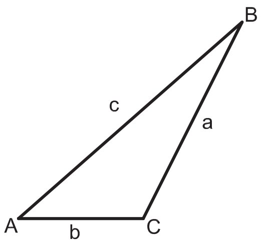
$$\sin\frac{A}{۲}=\frac{b}{۲a}=\frac{۷/۷۶}{۲\times ۵}=۰/۷۷۶\rightarrow\frac{A}{۲}=۵۰^\circ\ ۵۴'\rightarrow A=۱۰۱^\circ\ ۴۸'$$

۳ـ۳ـ محاسبه‌ی زوایای داخلی مثلث غیرمشخص

ـ *رابطه‌ی کسینوس‌ها*

در هر مثلث، مربع هر ضلع، برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر، منهای حاصل‌ضرب آن دو ضلع در کسینوس زاویه‌ی بین آنها.

در مثلث ABC شکل ۶ داریم :



شکل ۶

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$$
$$b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos B$$
$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C$$

با استفاده از روابط بالا که به رابطه‌ی کسینوس‌ها معروف است، می‌توانیم زوایای مثلث را به‌صورت زیر بنویسیم :

$$\cos A=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}$$

$$\cos B=\frac{a^{۲}+c^{۲}-b^{۲}}{۲ac}$$

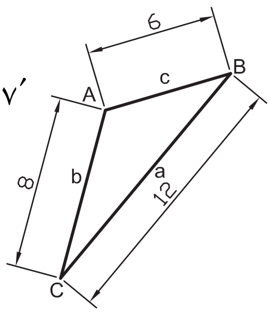
$$\cos C=\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲ab}$$

مثال: زوایای مثلث ABC (شکل ۷) چند درجه است؟

حل

$$\cos A=\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲bc}=\frac{۶۴+۳۶-۱۴۴}{۲\times ۸\times ۶}$$

$$\cos A=-۰/۴۵۸۳\xrightarrow{\text{با مراجعه به جدول}}A\simeq ۱۱۷^{\circ}\,۱۷'$$



شکل ۷

نکته: درصورتی که مقدار کسینوس یک زاویه (مثل مورد فوق) منفی باشد، علامت منفی نشانگر این است که زاویه‌ی مورد نظر بزرگ‌تر از ۹۰° است؛ بنابراین باید بدون درنظرگرفتن علامت منفی، ابتدا اندازه‌ی زاویه‌ی مکمل زاویه‌ی موردنظر را از جدول نسبت‌های مثلثاتی پیدا کنیم و سپس با تفاضل زاویه‌ی به‌دست آمده از ۱۸۰°، زاویه‌ی مورد نظر را به‌دست آوریم.

در مثال فوق داریم:

$$\cos\theta=۰/۴۵۸۳\to\theta\simeq ۶۲^{\circ}\,۴۳'$$

$$A=۱۸۰^{\circ}-۶۲^{\circ}\,۴۳'\to A=۱۱۷^{\circ}\,۱۷'$$

برای زاویه‌ی B داریم:

$$\cos B=\frac{a^{۲}+c^{۲}-b^{۲}}{۲ac}=\frac{۱۴۴+۳۶-۶۴}{۲\times ۱۲\times ۶}=۰/۸۰۵۶\to B=۳۶^{\circ}\,۲۰'$$

برای زاویه‌ی C داریم:

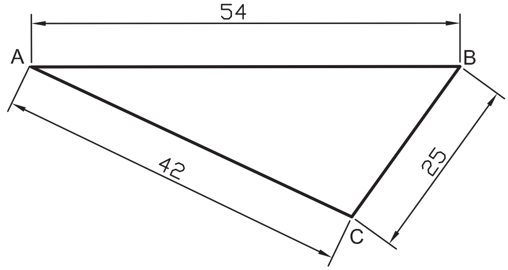
$$\cos C=\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲ab}=\frac{۱۴۴+۶۴-۳۶}{۲\times ۱۲\times ۸}=۰/۸۹۵۸\to C\simeq ۲۶^{\circ}\,۲۳'$$

برای اطمینان از درستی محاسبات، زوایای به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم که باید جمع اینها ۱۸۰° شود.

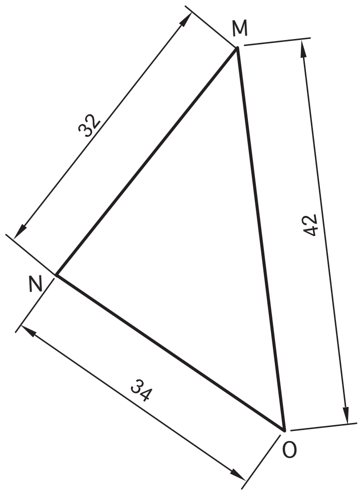
$A+B+C=۱۱۷^\circ ۱۷' + ۳۶^\circ ۲۰' + ۲۶^\circ ۲۳' = ۱۸۰^\circ$

تمرین

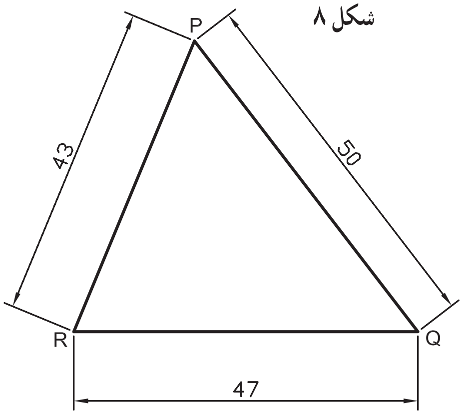
زوایای مثلث‌های شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰ را محاسبه کنید.



شکل ۸



شکل ۹



شکل ۱۰

۴ــ محاسبه‌ی زوایای داخلی یک چندضلعی منتظم

۱ــ۴ــ مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی برابر است با: $(n-۲)۱۸۰^\circ$

مثال: مجموع زوایای داخلی یک ۵ ضلعی برابر است با : $(۵-۲)\times ۱۸۰^\circ = ۵۴۰^\circ$

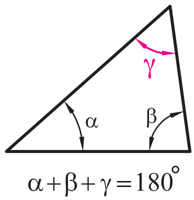
۲ــ۴ــ اندازه‌ی هر زاویه‌ی یک n ضلعی منتظم عبارت‌است از: $\frac{n-۲}{n}\times ۱۸۰^\circ$

مثال: اندازه‌ی هر زاویه‌ی یک ۸ ضلعی منتظم عبارت‌است از : $\frac{۸-۲}{۸}\times ۱۸۰^\circ = ۱۳۵^\circ$

تمرین

۱ــ در مثلث شکل ۱۱ مقدار زاویه‌ی γ را به‌دست آورید.

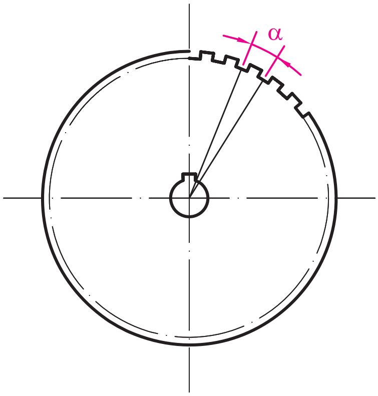
($\alpha =$ ۲۴°,۱۸′ $\beta =$ ۴۷°)



شکل ۱۱

۲ــ اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی بین دو ضلع را در شش ضلعی منتظم به‌دست آورید.

۳ــ در محیط دایره (شکل ۱۲) ۱۲۵ شیار وجود دارد. اندازه‌ی زاویه‌ی α چند درجه و چند دقیقه است؟



شکل ۱۲