فصل اوّل

محاسبه‌ی طول

هدف‌های رفتاری: فراگیر باید در پایان این فصل بتواند :

۱ــ واحد اندازه‌گیری طول، اجزا و اضعاف آن را در سیستم بین‌المللی SI توضیح دهد.

۲ــ اجزا و اضعاف واحد طول را به هم تبدیل کند.

۳ــ دقت، خطا و اشتباه در اندازه‌گیری‌ها را تعیین و بهترین مقدار را محاسبه کند.

۴ــ طول‌ها را با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورث محاسبه کند.

۵ــ طول‌ها را با استفاده از نسبت تشابه شکل‌ها، به‌دست آورد.

۶ــ طول‌ها را با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی محاسبه کند.

۷ــ محیط اجسام و زمین‌های دارای شکل‌های هندسی ساده و مرکب را محاسبه کند.

۱ــ واحد اندازه‌گیری طول در سیستم SI

۱ــ۱ــ تعریف واحد طول

واحد اندازه‌گیری طول در سیستم SI[۱]، متر (m)[۲] است.

۲ــ۱ــ اجزا و اضعاف متر : برای اندازه‌گیری طول‌های کوچک، از واحدهای کوچک‌تری استفاده می‌شود که به آنها اجزای واحد طول می‌گویند. اجزای متر عبارت‌اند از :

دسی‌متر (dm)، سانتی‌متر (cm) و میلی‌متر (mm)

۱ــ SI مخفف کلمه‌ی System International است.

۲ــ m مخفف کلمه‌ی Meter است.

یک متر مسافتی است که نور در زمان $\frac{۱}{۲۹۹۷۹۲۴۵۸}$ ثانیه در خلأ طی می‌کند.

برای اندازه‌گیری طول‌های بزرگ، از واحدهای بزرگ‌تری استفاده می‌شود که به آنها اضعاف واحد طول می‌گویند. اضعاف متر عبارت‌اند از :

دکامتر (dam)، هکتومتر (hm) و کیلومتر (km)

در جدول ۱ علایم استاندارد اجزا و اضعاف واحد طول و معانی آنها نشان داده شده است. این علایم به‌صورت پیشوندهایی در مقابل واحد اصلی قرار می‌گیرد.

جدول ۱ــ جدول اجزا و اضعاف واحد طول

اجزای واحد طول		اضعاف واحد طول	
مثال	علامت مفهوم	مثال	علامت مفهوم
۱dm = ۰/۱m	d = دسی = ۰/۱	۱dam = ۱۰m	da = دکا = ۱۰
۱cm = ۰/۰۱m	c = سانتی = ۰/۰۱	۱hm = ۱۰۰m	h = هکتو = ۱۰۰
۱mm = ۰/۰۰۱m	m = میلی = ۰/۰۰۱	۱km = ۱۰۰۰m	k = کیلو = ۱۰۰۰

۲ــ تبدیل واحدهای طول

برای تبدیل واحدهای فرعی طول (اجزا و اضعاف متر) به واحد اصلی طول (متر) و برعکس، کافی است مقادیر مربوط به هرکدام از پیشوندها را از جدول اجزا و اضعاف (جدول ۱) اعمال کنید.

مثال: ۳۵۷۱ میلی‌متر، چند متر است؟

۳۵۷۱ میلی‌متر = ۳۵۷۱×۰/۰۰۱ متر = ۳/۵۷۱ متر

ضریب تبدیل واحدهای طول به‌صورت توان‌هایی از ۱۰ می‌باشد. در جدول ۲ ضرایب تبدیل واحدهای طول به یکدیگر آمده است.

جدول۲ــ جدول ضرایب تبدیل واحدهای طول

اجزا و اضعاف واحد طول	میلی‌متر mm	سانتی‌متر cm	دسی‌متر dm	متر m	دکامتر da.m	هکتومتر h.m	کیلومتر k.m
(یک میلی‌متر) ۱mm	۱	$۱۰^{-۱}$	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۳}$	$۱۰^{-۴}$	$۱۰^{-۵}$	$۱۰^{-۶}$
(یک سانتی‌متر) ۱cm	۱۰	۱	$۱۰^{-۱}$	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۳}$	$۱۰^{-۴}$	$۱۰^{-۵}$
(یک دسی‌متر) ۱dm	$۱۰^{۲}$	۱۰	۱	$۱۰^{-۱}$	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۳}$	$۱۰^{-۴}$
(یک‌متر) ۱m	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۲}$	۱۰	۱	$۱۰^{-۱}$	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۳}$
(یک دکامتر) ۱da.m	$۱۰^{۴}$	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۲}$	۱۰	۱	$۱۰^{-۱}$	$۱۰^{-۲}$
(یک هکتومتر) ۱h.m	$۱۰^{۵}$	$۱۰^{۴}$	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۲}$	۱۰	۱	$۱۰^{-۱}$
(یک کیلومتر) ۱k.m	$۱۰^{۶}$	$۱۰^{۵}$	$۱۰^{۴}$	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۲}$	۱۰	۱

تمرین

۱ــ اندازه‌های زیر را برحسب متر به‌دست آورید.

$۱۰^{۷}$km و۴۵dam و ۷۱۲mm و ۱/۶km و ۴۵dm و ۷۸mm و ۱۱۵cm

۲ــ اندازه‌های زیر را برحسب سانتی‌متر به‌دست آورید :

۰/۰۹dm و $۸/۹\times۱۰^{۶}$mm و ۴/۴۵dam و $۸۵/۴۱\times۱۰^{-۵}$km

۳ــ طول یک دیوار آجری ۱۷۵/۷۰ متر و ارتفاع آن ۳/۵ متر است.

الف ــ اگر طول دیوار به قطعات ۲ متری تقسیم شود، چند قطعه‌ی ۲ متری به‌دست می‌آید و چند سانتی‌متر باقی می‌ماند؟

ب ــ در صورتی که ارتفاع دیوار به قطعات ۰/۶ متری تقسیم شود، چند قطعه‌ی ۰/۶ متری به‌دست می‌آید و چند میلی‌متر باقی می‌ماند؟

۴ــ طول یک اتاق ۳/۴۵ متر است : اگر بخواهیم برای فرش کردن این اتاق از موزائیک ۳۰×۳۰ سانتی‌متر استفاده کنیم، چند موزائیک در طول این اتاق جای می‌گیرد؟ مقدار باقی‌مانده، چند سانتی‌متر و چند میلی‌متر است؟

۳ــ دقت، خطا، بهترین مقدار و اشتباه در اندازه‌ها

۱ــ۳ــ دقت

کوچک‌ترین تقسیمات یک وسیله‌ی اندازه‌گیری را دقت آن وسیله می‌نامند.

مثال ۱: طول یک پاره خط را با خط‌کشی که کوچک‌ترین تقسیمات آن میلی‌متر است اندازه می‌گیریم ؛ به این ترتیب دقت این خط‌کش در حد میلی‌متر است.

مثال ۲: طول زمینی را چهار بار اندازه‌گیری و اعداد زیر را ثبت کرده‌اند :

۷۵۸/۴۲m و ۷۵۶/۶۰m و ۷۵۶/۵۲m و ۷۵۶/۵۸m

با توجه به اندازه‌های داده شده درمی‌یابیم که دقت وسیله‌ی مورد استفاده در حد سانتی‌متر بوده است.

۲ـ۳ـ خطا

اختلاف یک اندازه‌ی گرفته شده را با مقدار واقعی، خطای اندازه‌گیری می‌نامند.

مثال: یک طول ۱۰۰ متری را دوبار اندازه‌گیری و اعداد زیر را ثبت کرده‌ایم :

۱۰۰/۰۴ بار دوم　　۹۹/۹۲ بار اوّل

خطای اندازه‌گیری در بار اوّل　$۱۰۰m - ۹۹/۹۲m = ۰/۰۸m = ۸cm$

خطای اندازه‌گیری در بار دوم　$۱۰۰m - ۱۰۰/۰۴m = -۰/۰۴m = -۴cm$

۳ـ۳ـ بهترین مقدار: وقتی مقدار واقعی یک کمیت مشخص نباشد، به اندازه‌گیری آن می‌پردازیم و به این ترتیب در عمل به‌جای مقدار واقعی که مجهول است، از میانگین اندازه‌گیری‌ها استفاده می‌کنیم.

بهترین مقدار برای نشان دادن اندازه‌ی واقعی یک کمیت، میانگین اندازه‌گیری‌هاست.

مثال: طولی را سه بار اندازه‌گیری و اعداد زیر را ثبت کرده‌ایم :

۱۸۵۹/۶۱m و ۱۸۵۹/۳۵m و ۱۸۵۹/۴۲m

بهترین مقدار برای طول موردنظر عبارت است از :

$$\frac{۱۸۵۹/۴۲+۱۸۵۹/۳۵+۱۸۵۹/۶۱}{۳}=۱۸۵۹/۴۶m$$

۴ـ۳ـ اشتباه

هرگاه خطای یک اندازه‌گیری بیش از حدّ مجاز باشد به آن اشتباه می‌گویند.

معمولاً خطای مجاز را در حدود ۲ تا ۳ برابر دقت وسیله‌ی اندازه‌گیری درنظر می‌گیرند. در

جدول ۳ خطای مجاز تقریبی مترِکمری و مترِ بلند را مشاهده می‌کنید.

جدول ۳ــ خطای مجاز وسایل اندازه‌گیری

نام وسیله‌ی اندازه‌گیری	خطای مجاز
متر کمری	۲ تا ۳ میلی‌متر
متر بلند	۲ تا ۳ سانتی‌متر

در کارهای معمولی، هر طول را حداقل دوبار اندازه می‌گیریم تا مطمئن شویم که اشتباهی رخ نداده است. در کارهای دقیق، تعداد دفعات اندازه‌گیری یک طول افزایش می‌یابد ؛ حتی ممکن است یک طول را ده بار یا بیش‌تر اندازه‌گیری کنند تا میانگین آنها به مقدار واقعی نزدیک‌تر باشد. اما باید به نکته‌ی زیر توجه کنید :

قبل از گرفتن میانگین اندازه‌ها، اندازه‌ی اشتباه باید حذف شود.

مثال: طول قطعه زمینی را سه‌بار اندازه‌گیری و به‌صورت زیر ثبت کرده‌ایم.

۵۸/۹۰m و ۵۸/۱۲m و ۵۸/۰۶m

بهترین مقدار برای طول این قطعه زمین چند متر است؟

عدد ۵۸/۹۰ به‌طور آشکار با میانگین دو عدد دیگر اختلاف فراوانی دارد و به روشنی مشخص است که این اندازه‌گیری اشتباه می‌باشد و باید حذف شود ؛ پس داریم :

$$\text{طول قطعه زمین} = \frac{۵۸/۰۶\text{m} + ۵۸/۱۲\text{m}}{۲} = ۵۸/۰۹\text{m}$$

تمرین

۱ــ دانش‌آموزان یک کلاس به پنج گروه تقسیم شده و طول بلندی را اندازه‌گیری کرده‌اند. موارد زیر مدّنظر است :

الف ــ تعیین اندازه‌ی اشتباه، ب ــ دقت وسیله‌ی اندازه‌گیری و پ ــ محاسبه‌ی بهترین مقدار

۵۸۸/۲۸m و ۵۸۸/۳۶m و ۵۶۸/۲۵m و ۵۸۸/۱۲m و ۵۸۸/۲۴m

۲ــ با یک ترازوی دقیق در آزمایشگاه، جرم مقداری ماسه را سه‌بار اندازه‌گیری و اعداد زیر را ثبت کرده‌ایم. دقت وسیله‌ی اندازه‌گیری و بهترین مقدار را تعیین کنید.

۲/۳۹۳kg و ۲/۳۹۲kg و ۲/۳۹۱kg

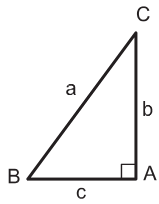
۴ـ محاسبه‌ی طول با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورث

۱ـ۴ـ قضیه‌ی فیثاغورث

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر

مثال: در مثلث ABC شکل ۱ زاویه‌ی $A = ۹۰^\circ$ است.

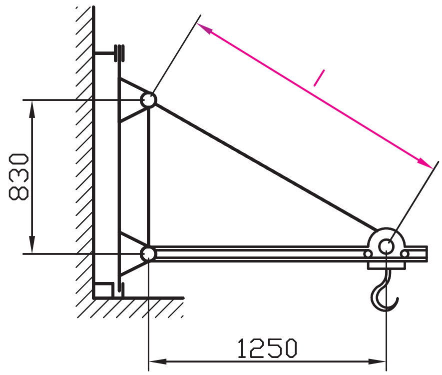
پس داریم : $a^۲ = b^۲ + c^۲$



شکل ۱

۲ـ۴ـ کاربرد قضیه‌ی فیثاغورث

مثال ۱: در حماله مطابق شکل ۲ اندازه‌ی l چه‌قدر است؟



شکل ۲

طبق قضیه‌ی فیثاغورث داریم :

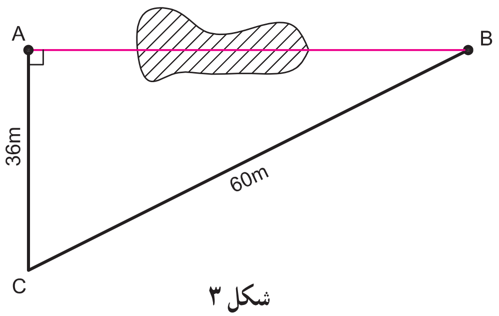
$l^۲ = ۱۲۵۰^۲ + ۸۳۰^۲$

$l^۲ = ۱۵۶۲۵۰۰ + ۶۸۸۹۰۰ = ۲۲۵۱۴۰۰$

$l = \sqrt{۲۲۵۱۴۰۰}$

$l = ۱۵۰۰/۴۷$

مثال ۲: می‌خواهیم فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B را که بین آنها مانعی وجود دارد تعیین کنیم. برای این‌کار، مطابق شکل ۳ مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را تشکیل داده و اضلاع AC و BC را اندازه‌گیری کرده‌ایم. فاصله‌ی AB چند متر است؟



شکل ۳

طبق رابطه‌ی فیثاغورث داریم:

$$(BC)^{۲} = (AC)^{۲} + (AB)^{۲}$$

$$۶۰^{۲} = ۳۶^{۲} + (AB)^{۲} \Rightarrow (AB)^{۲} = ۶۰^{۲} - ۳۶^{۲}$$

$$(AB)^{۲} = ۲۳۰۴$$

$$AB = \sqrt{۲۳۰۴} \Rightarrow AB = ۴۸m$$

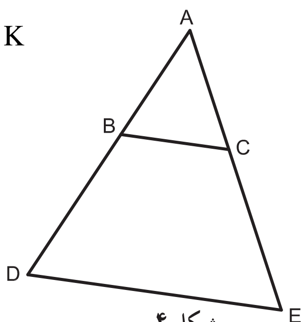
۵ــ محاسبه‌ی طول با استفاده از نسبت تشابه شکل‌های هندسی

۱ــ۵ــ تعریف نسبت تشابه

در دو شکل متشابه، نسبت بین اضلاع متناظر عدد ثابتی است که به آن نسبت تشابه می‌گویند و آن را با حرف «K» نشان می‌دهند.

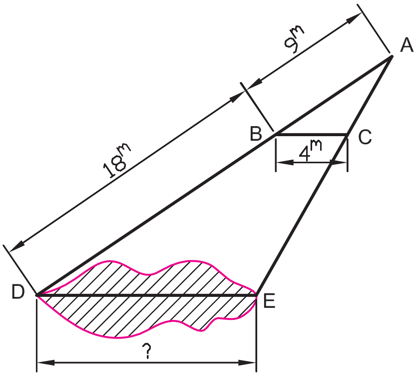
مثلاً در دو مثلث ABC و ADE که متشابه هستند (شکل ۴) داریم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = K$$



شکل ۴

۲ــ۵ــ کاربرد نسبت تشابه



مانع اندازه‌گیری

شکل ۵

مثال ۱: در شکل ۵، خط BC موازی ضلع DE است ؛ یعنی دو مثلث ABC و ADE متشابه هستند و داریم :

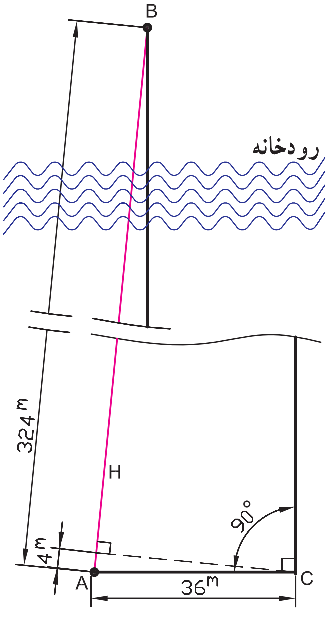
متر AB = ۹ ، متر BD = ۱۸ و متر BC = ۴ ، طول ضلع DE چند متر است؟

حل: طبق تعریف نسبت تشابه داریم :

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$$

$$\frac{۹}{۹+۱۸}=\frac{۴}{DE}\Rightarrow DE=\frac{۴\times(۹+۱۸)}{۹}\Rightarrow DE=۱۲ \text{ متر}$$

مثال ۲: می‌خواهیم فاصله‌ی نقطه‌ی A را از نقطه‌ی B که در آن طرف رودخانه قرار دارد (شکل ۶)، به‌دست آوریم.



شکل ۶

نقطه‌ی C را چنان انتخاب می‌کنیم که مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه باشد. سپس ارتفاع CH را تعیین و فواصل را اندازه‌گیری می‌نماییم. در این‌صورت، طول AB قابل محاسبه است. برای مثال، در این مسأله، متر ۴ = AH و متر ۳۶ = AC را اندازه‌گیری کرده‌ایم. فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B چند متر است؟

حل: دو مثلث ABC و ACH متشابه‌اند (چون زوایای این دو مثلث مساوی هستند) ؛ بنابراین اضلاع متناظر، متناسب خواهند بود و داریم :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AH}$$

در نتیجه :

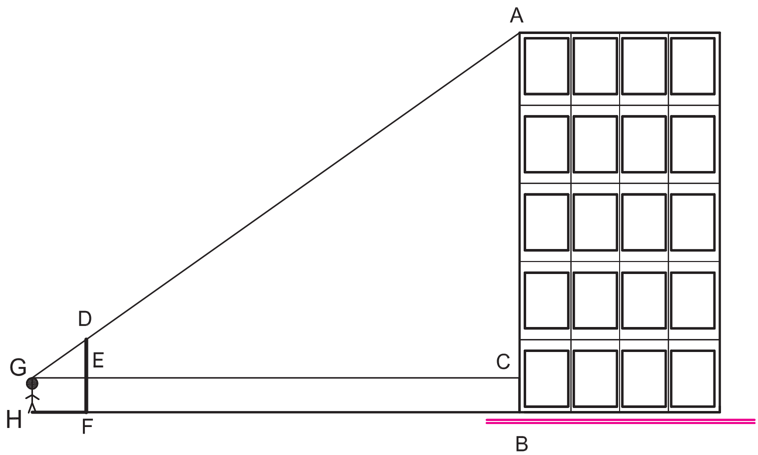
$$\frac{AB}{۳۶}=\frac{۳۶}{۴}$$

و داریم :

$$AB=\frac{۳۶\times۳۶}{۴}\Rightarrow AB=۳۲۴ \text{ متر}$$

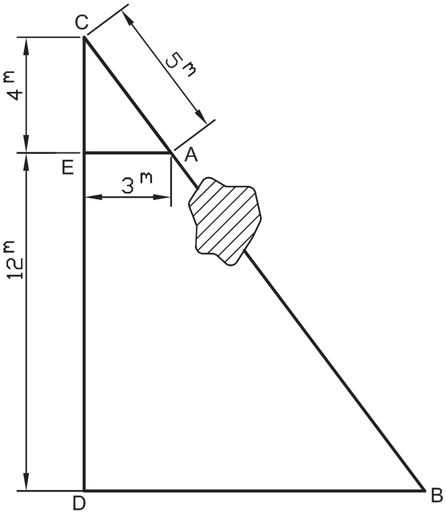
تمرین

۱ــ برای تعیین ارتفاع یک ساختمان، از یک چوب به طول ۳ متر (DF = ۳m) مطابق شکل ۷ استفاده شده است. در صورتی که فاصله‌ی چشم ناظر از زمین برابر ۱/۷۰m (GH = ۱/۷۰m) و HF = ۲m و FB = ۱۸m باشد، ارتفاع ساختمان AB را برحسب متر تعیین کنید.



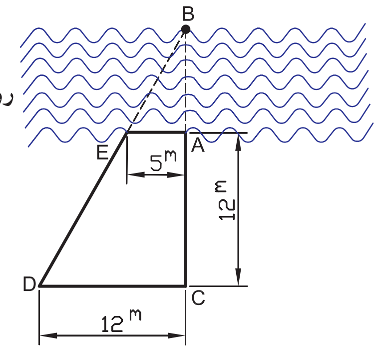
شکل ۷ ــ اصول ترسیم در یک نمای ساختمانی

۲ــ برای تعیین فاصله‌ی دو نقطه‌ی B و A که مانعی بین آنها وجود دارد، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ACE و BCD را بنا کرده‌ایم. فاصله‌ی دو نقطه‌ی B و A را برحسب متر به‌دست آورید.



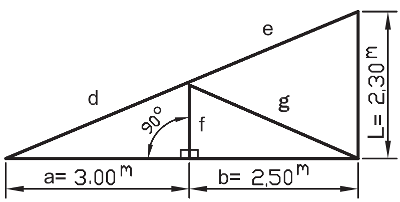
شکل ۸

۳ــ برای تعیین عرض یک رودخانه، طول‌های DC و AC و AE اندازه‌گیری شده‌اند. عرض رودخانه چند متر است؟



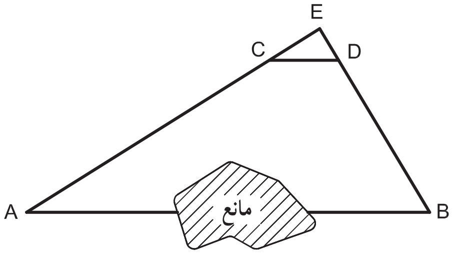
شکل ۹

۴ــ اندازه‌ی طول عضوهای d، e، f و g را در حماله مطابق شکل ۱۰ به‌دست آورید.



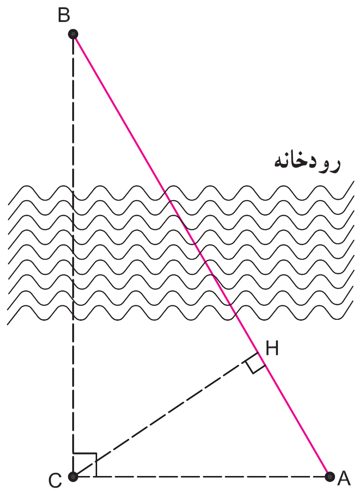
شکل ۱۰

۵ــ برای تعیین فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B که مانعی بین آنها وجود دارد، مثلث دلخواه ABE را بنا کرده و طول اضلاع AE و BE را اندازه گرفته‌ایم (AE = ۳۵m و BE = ۲۰m). از طرفی، مثلث دیگری مانند CED را در نظر گرفته و طول اضلاع آن را اندازه‌گیری کرده‌ایم. (CE = ۳/۵m و ED = ۲m و CD = ۴m). فاصله‌ی نقاط A و B را برحسب متر تعیین کنید.



شکل ۱۱

۶ــ برای اندازه‌گیری فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B (نقطه‌ی B مطابق شکل ۱۲ در آن طرف رودخانه و دور از دسترس می‌باشد) مثلث‌هایی را مطابق شکل رسم کرده و طول‌های AH = ۱۴/۳۵m و AC = ۲۶/۷۸m را اندازه‌گیری نموده‌ایم، طول AB را محاسبه کنید.



شکل ۱۲

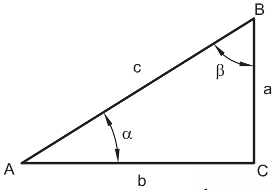
۶ــ محاسبه‌ی طول با استفاده از روابط مثلثاتی (نسبت‌های مثلثاتی)

۱ــ۶ــ تعریف روابط اصلی مثلثاتی (نسبت‌های مثلثاتی): در هر مثلث قائم‌الزاویه، روابط اصلی مثلثاتی (نسبت‌های مثلثاتی) به‌صورت جدول ۴ تعریف می‌شود.

جدول ۴

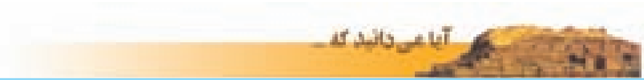
$\dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$ = تانژانت = tg	$\dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$ = سینوس =sin
$\dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$ = کتانژانت = cotg	$\dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$ = کسینوس = cos

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه ABC شکل ۱۳، روابط اصلی مثلثاتی برای زاویه‌ی α چنین تعریف می‌شود :



شکل ۱۳

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$tg\alpha = \frac{a}{b}$	$\cot g\alpha = \frac{b}{a}$



اصطلاحات مثلثات مثل «سینوس و کسینوس و تانژانت» دقیقاً ترجمه‌ی واژه‌هایی است که در نوشته‌های ریاضی‌دانان ایرانی و به‌خصوص کتاب «کشف‌القناع» خواجه ــ نصیرالدین طوسی به‌کار رفته است. درواقع در هیچ زمینه‌ای از ریاضیاتِ محاسبه‌ای مثل حساب و جبر و مثلثات نمی‌توان قانون یا دستوری را یافت که به‌وسیله‌ی ریاضی‌دانان ایرانی کشف نشده باشد.

تمرین

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC شکل ۱۳، روابط اصلی مثلثاتی را برای زاویه‌ی β در جدول بنویسید.

$\sin\beta =$ ———	$\cos\beta =$ ———	$tg\beta =$ ———	$\cot g\beta =$ ———

۲ــ۶ــ مقادیر عددی نسبت‌های مثلثاتی: همیشه مقادیر نسبت‌های مثلثاتی برای هر زاویه‌ی معین، مقدار ثابتی است. در جدول ۵ مقدار عددی نسبت‌های مثلثاتی زوایای °۰، °۳۰، °۴۵، °۶۰ و °۹۰ را ملاحظه می‌کنید.

جدول ۵ ــ نسبت‌های مثلثاتی زوایای °۰ و °۳۰ و °۴۵ و °۶۰ و °۹۰

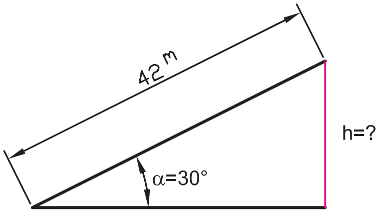
زاویه‌ی α / نسبت مثلثاتی	°۰	°۳۰	°۴۵	°۶۰	°۹۰
$\sin\alpha$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
$\cos\alpha$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
$tg\alpha$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده
$\cot g\alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

توجه: افراد فنی معمولاً اعداد جدول ۵ را به‌خاطر می‌سپارند و برای سایر زوایا، از جدول‌های مثلثاتی یا ماشین‌های حساب استفاده می‌کنند. استفاده از نسبت‌های مثلثاتی با ماشین‌های حساب با ارقام اعشاری بیش‌تر و جدول‌های مثلثاتی با ارقام اعشاری محدودتر، می‌تواند پاسخ‌های متفاوتی را حاصل کند.

۳ــ۶ــ کاربرد نسبت‌های مثلثاتی

مثال ۱: در شکل ۱۴ ارتفاع h را محاسبه می‌کنیم :

برای شکل موردنظر از رابطه‌ی سینوس استفاده می‌نماییم (دلیل آن را توضیح دهید).



شکل ۱۴

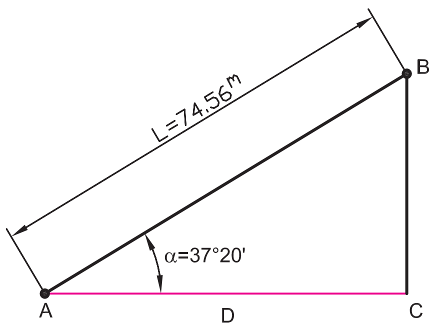
$$\sin\alpha = \frac{h}{۴۲}$$

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{h}{۴۲\text{متر}} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{h}{\text{متر } ۴۲} \quad h = \frac{۴۲\times ۱}{۲} = ۲۱ \text{ متر}$$

مثال ۲: طول شیب‌دار $AB = ۷۴/۵۶m$ را در روی زمین اندازه‌گیری کرده‌ایم. در صورتی‌که زاویه‌ی شیب $\alpha = ۳۷^\circ ۲۰'$ باشد، فاصله‌ی افقی بین A و B چند متر است؟

حل: با توجه به شکل ۱۵ داریم : $\cos\alpha = \frac{D}{L}$

بنابراین داریم : $D = L.\cos\alpha$



فاصله‌ی افقی از A تا B =D

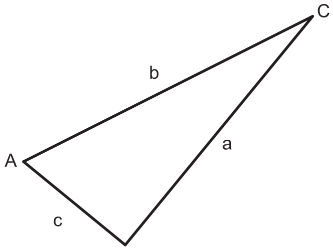
شکل ۱۵

با استفاده از جدول‌های مثلثاتی انتهای کتاب داریم :

$$\cos\alpha = \cos ۳۷^\circ ۲۰' = ۰/۷۹۵۱$$

با جای‌گذاری آنها در فرمول داریم :

$$D = ۷۴/۵۶m \times ۰/۷۹۵۱ = ۵۹/۲۸m$$

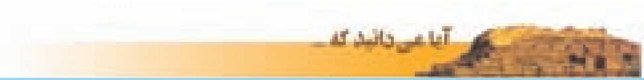


شکل ۱۶

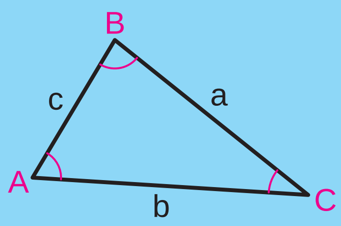
۴ــ۶ــ محاسبه‌ی طول در مثلث غیرمشخص

رابطه‌ی سینوس‌ها: در هر مثلث غیرمشخص مانند شکل ۱۶ داریم :

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$



رابطه سینوس‌ها $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ یکی از فرمول‌های مهم حل مثلث می‌باشد که بیرونی آن‌را در فصل هشتم از مقاله سوم کتاب قانون مسعودی اثبات کرده است.



یکی از مهم‌ترین ابتکارات بیرونی واحد گرفتن شعاع دایره مثلثاتی در هنگام محاسبه جیب‌ها (خطوط مثلثاتی ــ sin) می‌باشد به‌طوری که اگر جدول جیب‌های کتاب قانون مسعودی را به‌دستگاه شمار دهگانی تبدیل کنیم درست جدول سینوس‌هایی را که امروزه به‌کار می‌بریم حاصل می‌شود.

مثال ۱: در مثلث ABC (شکل ۱۶)، $a=۴۵m$ طول و $\hat{A}=۳۷^\circ$ و $\hat{B}=۱۱۸^\circ$ است. طول b چند متر است؟

حل: رابطه‌ی سینوس‌ها را می‌نویسیم :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{۴۵m}{\sin ۳۷^\circ}=\frac{b}{\sin ۱۱۸^\circ}$$

$$\rightarrow b=\frac{\sin ۱۱۸^\circ}{\sin ۳۷^\circ}\times ۴۵m=\frac{۰/۸۸۳۰}{۰/۶۰۱۸}\times ۴۵m$$

$$b=۶۶/۰۲m$$

مثال ۲: در شکل ۱۷ اندازه‌ی سه زاویه و طول یک ضلع مثلث، معلوم است. طول دو ضلع دیگر چه‌قدر است؟

حل: رابطه‌ی سینوس‌ها را درنظر می‌گیریم :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

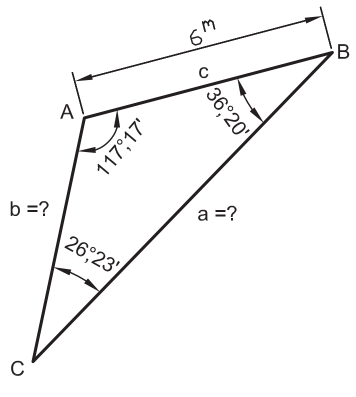
برای محاسبه‌ی a داریم :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

$$a(\sin C)=c(\sin A)$$

$$a=\frac{\sin A}{\sin C}\times c\Rightarrow a=\frac{\sin ۱۱۷^\circ ۱۷'}{\sin ۲۶^\circ ۲۳'}\times ۶m$$

$$a=\frac{۰/۸۸۸۷۵}{۰/۴۴۴۳۷}\times ۶m\rightarrow \boxed{a=۱۲m}$$



شکل ۱۷

برای محاسبه‌ی b داریم :

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \quad \text{یا} \quad \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$$

از یکی از دو رابطه‌ی فوق استفاده می‌کنیم :

$$b=\frac{\sin B}{\sin C}\times c$$

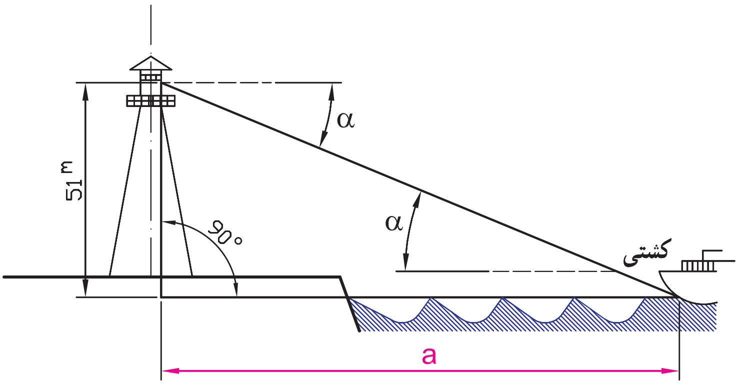
$$b=\frac{\sin ۳۶^\circ ۲۰'}{\sin ۲۶^\circ ۲۳'}\times ۶m=\frac{۰/۵۹۲۴۸}{۰/۴۴۴۳۷}\times ۶=۷/۹۹۹۷\rightarrow b\simeq ۸m$$

تمرین

۱ــ مقادیر نسبت‌های مثلثاتی (cotg و tg و cos و sin) را برای زوایای زیر با استفاده از جدول مثلثاتی ضمیمه‌ی کتاب به‌دست آورید :

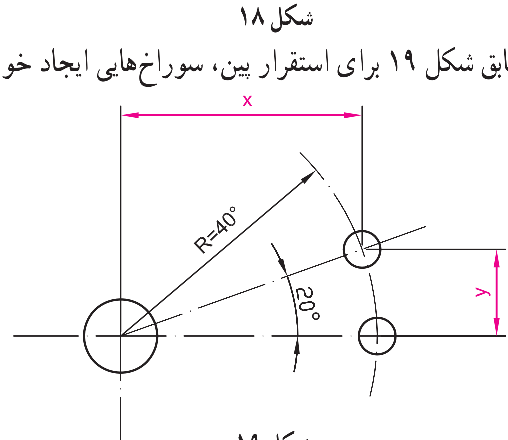
$۷۵^\circ ۳۰'$ و $۸۸^\circ ۴۰'$ و $۳۸^\circ ۵۰'$ و $۴۸^\circ ۱۰'$ و $۱۵^\circ ۲۰'$

۲ــ یک دیده‌بان از برجی به ارتفاع ۵۱ متر، نزدیک شدن یک کشتی را تحت زاویه‌ی $۴^\circ,۵۰'$ مشاهده می‌کند. فاصله‌ی کشتی تا برج را (حدّ فاصل a) به متر حساب کنید.



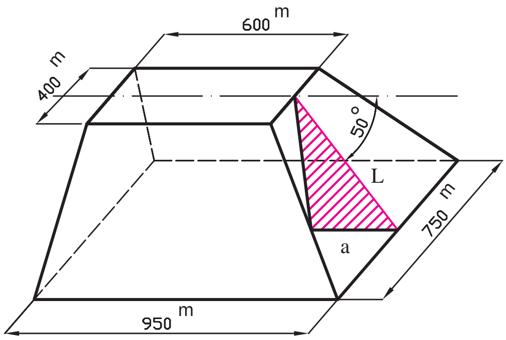
شکل ۱۸

۳ــ در قطعه‌ای مطابق شکل ۱۹ برای استقرار پین، سوراخ‌هایی ایجاد خواهد شد. مقادیر x و y را به‌دست آورید.



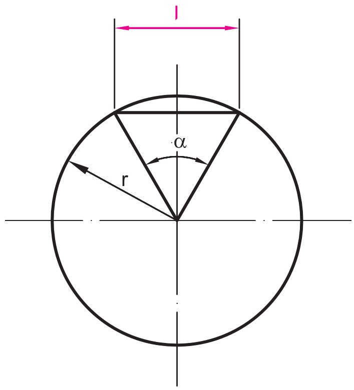
شکل ۱۹

۴ـ در شکل ۲۰ مقدار L را به‌دست آورید.



شکل ۲۰

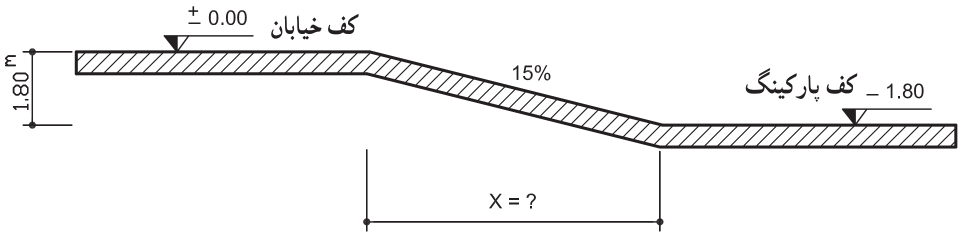
۵ـ رابطه‌ای برای محاسبه‌ی طول «l» قطعه دایره، برحسب شعاع دایره و زاویه‌ی α بنویسید (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

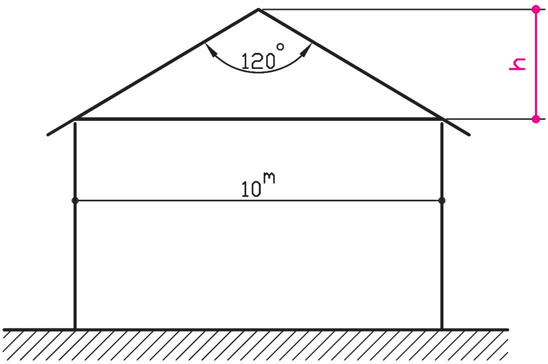
۶ـ کف پارکینگ یک ساختمان مسکونی، مطابق شکل ۲۲، ۱/۸۰ متر پایین‌تر از کف خیابان است. در صورتی‌که شیب رَمپ (شیب طولی راه) ۱۵٪ باشد، طول افقی رمپ باید چند متر باشد؟ (رَمپ، سطح شیب‌داری است که سطوحِ با اختلاف ارتفاع را به یکدیگر وصل می‌کند.)

شیب رَمپ: نسبت اختلاف ارتفاع را به طول افقیِ رَمپ، «شیب رمپ» می‌گویند.



شکل ۲۲

۷ــ اندازه‌ی طول h را در سقف شیب‌دار مطابق شکل ۲۳ به‌دست آورید.

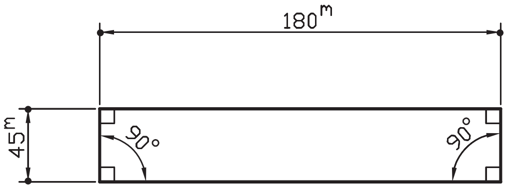


شکل ۲۳

۷ــ محاسبه‌ی محیط

۱ــ۷ــ محیط چند ضلعی‌ها (سه ضلعی، چهارضلعی، پنج‌ضلعی و...) برابر است با مجموع اضلاع آنها

مثال ۱: ابعاد زمینی مطابق شکل ۲۴ است. در صورتی که بخواهیم برای محصور کردن



شکل ۲۴

زمین، از سیم خاردار استفاده کنیم و فاصله‌ی تیرک‌های چوبی سیم خاردار از هم ۳ متر باشد، چند عدد تیرک چوبی برای این کار لازم است؟ چنانچه از چهار ردیف سیم خاردار استفاده شود، طول سیم خاردار مصرفی چند متر است؟

حل: الف ــ

۱ــ طول محیط چهار ضلعی را حساب می‌کنیم :

$$L = ۱۸۰ + ۴۵ + ۱۸۰ + ۴۵ = ۴۵۰m$$

۲ــ طول محیط را تقسیم بر فاصله‌ی دو تیرک می‌کنیم :

$$n = \frac{\text{طول کل (محیط)} \quad (m)}{\text{فاصله‌ی دو تیرک از هم} \quad (m)} = \frac{۴۵۰}{۳} = ۱۵۰$$ تعدادتیرک لازم

ب ــ

۳ــ برای محاسبه‌ی طول سیم خاردار، با توجه به این‌که چهار مرتبه به دور زمین می‌چرخد، به‌روش زیر عمل می‌کنیم :

طول سیم خاردار لازم $۴۵۰ \times ۴ = ۱۸۰۰m$

۲ــ۷ــ محیط دایره به شعاع r برابر است با: $\boxed{u = ۲\pi r}$

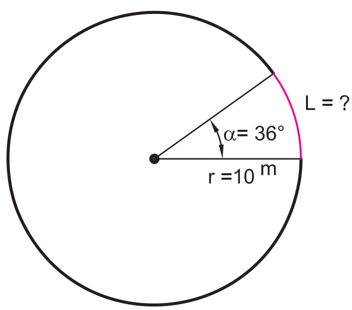
مثال: محیط دایره به شعاع ۵cm برابر است با : $۲ \times ۳/۱۴ \times ۵cm = ۳۱/۴cm$

۳ــ۷ــ طول قوس دایره‌ی مقابل به زاویه‌ی α برابر است با: $\boxed{L = \frac{۲\pi r \times \alpha}{۳۶۰^\circ}}$

مثال ۱: در شکل ۲۵ طول قوس L را محاسبه می‌کنیم :

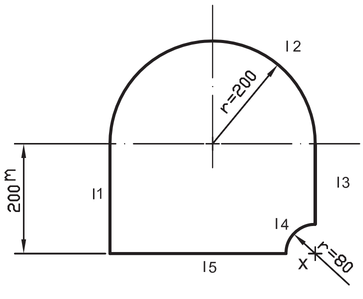
$$L = \frac{۲\pi r \times \alpha}{۳۶۰^\circ} = \frac{۲ \times ۳/۱۴ \times ۱۰m \times ۳۶^\circ}{۳۶۰^\circ}$$

$$L = ۶/۲۸m$$



شکل ۲۵

مثال ۲: با استفاده از روش برش با گاز، قطعه‌ای مطابق شکل ۲۶ از ورق فولادی بریده خواهد شد ؛ طول مسیر برش چند متر است؟ (اندازه‌ها برحسب میلی‌متر است.)



شکل ۲۶

حل: منظور از طول مسیر برش، همان محیط قطعه است. برای به‌دست آوردن محیط قطعه، ابتدا محیط آن را به طول‌های l_1 ، l_2 ، l_3 ، l_4 و l_5 تفکیک می‌کنیم ؛ سپس طول هریک از آنها را محاسبه کرده و آنها را با هم جمع می‌نماییم.

$$U = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5$$

$$l_1 = 200\text{mm}$$

$$l_2 = \frac{d_2 \times \pi}{2} = \frac{400\text{mm} \times 3/14}{2} = 628\text{mm}$$

$$l_3 = 200\text{mm} - 80\text{mm} = 120\text{mm}$$

$$l_4 = \frac{d_4 \times \pi}{4} = \frac{160\text{mm} \times 3/14}{4} = 125/6\text{mm}$$

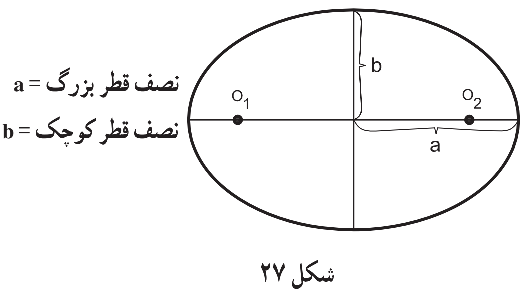
$$l_5 = 400\text{mm} - 80\text{mm} = 320\text{mm}$$

$$U = 200\text{mm} + 628\text{mm} + 120\text{mm} + 125/6\text{mm} + 320\text{mm} = 1413/6\text{mm}$$

$$U = 1/414\text{m}$$

۴ــ۷ــ محیط بیضی:

فرمول ساده و دقیقی برای محاسبه‌ی محیط بیضی وجود ندارد. اما با فرض این‌که بیضی دایره‌ای است که از یک جهت کشیده شده و دارای دو شعاع a و b می‌باشد (شکل ۲۷) فرمول‌های تقریبی محاسبه‌ی محیط



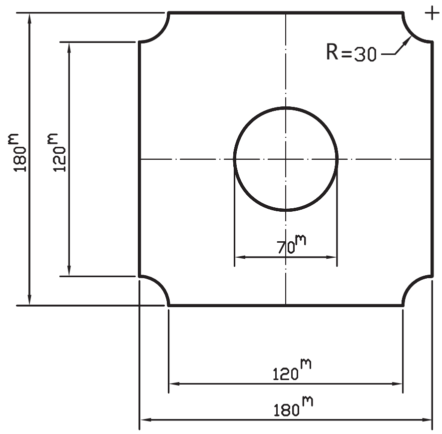
شکل ۲۷

بیضی عبارت‌اند از :

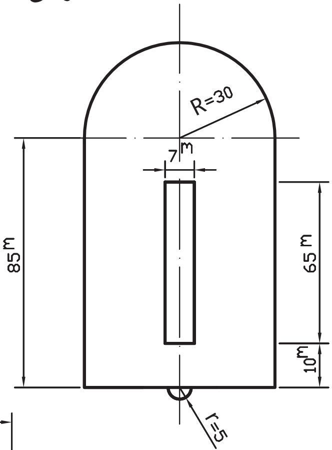
با دقت بیش‌تر $\boxed{u=\pi\sqrt{2(a^{2}+b^{2})}}$ و با دقت کم‌تر $\boxed{u=\pi(a+b)}$

تمرین

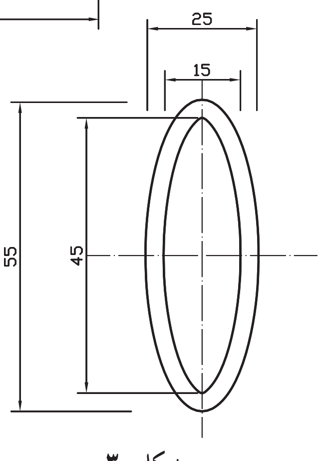
۱ــ محیط داخلی و خارجی شکل‌های ۲۸، ۲۹ و ۳۰ را با توجه به اندازه‌های داده شده محاسبه کنید. (اندازه‌ها به متر می‌باشد.)



شکل ۲۹

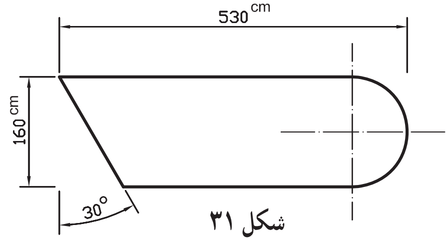


شکل ۲۸



شکل ۳۰

۲ــ محیط زیرسازی (فونداسیون) شکل ۳۱ را به متر به‌دست آورید.



شکل ۳۱