فصل ششم

مدارهای R - L - C جریان متناوب

هدف های رفتاری

در پایان این فصل، از هنرجو انتظار می‌رود :

۱ــ مدار R-L-C سری، موازی و مختلط را بررسی و دیاگرام برداری جریان و ولتاژ آن‌ها را رسم کند و زوایای اختلاف فاز را از روی دیاگرام نشان دهد.

۲ــ روابط مربوط به محاسبه‌ی مقاومت ظاهری و جریان ولتاژ، ضریب توان و توان‌ها را در مدارهای R-L-C سری، موازی و مختلط بنویسد و با استفاده از فرمول‌های مذکور، مقادیر خواسته شده را محاسبه کند.

۳ــ تأثیر فرکانس را بر مقاومت ظاهری، جریان‌ها، توان‌ها و ضریب توان با نوشتن فرمول‌های مربوط در مدارهای سری و موازی بررسی کند.

۴ــ فرکانس رزنانس را برای مدارهای R-L-C سری و موازی محاسبه کرده و موارد کاربرد فرکانس رزنانس را ذکر کند.

۵ــ پهنای باند و ضریب کیفیت رزنانس مدارهای R-L-C سری و موازی را به‌دست آورد.

۶ــ معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای R-L-C سری و موازی را به‌دست آورد.

۱ــ۶ــ مقدمه

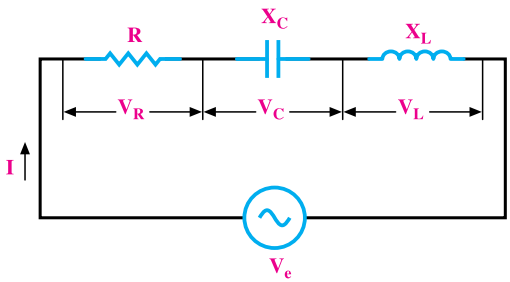
در یک شبکه‌ی الکتریکی، مصرف‌کننده‌های متنوعی تغذیه می‌شوند. این مصرف‌کننده‌ها با توجه به نوع کار در رده‌بندی مقاومت اهمی، سلفی و خازنی یا ترکیب سری یا موازی آن‌ها قرار می‌گیرند ؛ مثلاً در یک واحد صنعتی، الکتروموتورهای پر قدرت، انرژی مکانیکی واحد صنعتی را

تأمین می‌کنند. می‌دانیم یک الکتروموتور شامل یک یا چند بوبین و سیم‌پیچ است و با یک مدار R-L، مدل می‌شود. در سیستم‌های مخابراتی از قبیل رادیو و تلویزیون، فرستنده‌های رادیویی و تلویزیونی مدارهای مکالمه‌ی تلفن و مدارهای مکالمه‌ی سیستم دربازکن، ترکیب‌های متنوعی از R-L-C در اتصال سری و موازی وجود دارد. در این فصل، ابتدا به بررسی اتصال سری و موازی R-L-C می‌پردازیم. سپس ترکیب‌های مختلط این مدارها را بررسی خواهیم کرد.

۲ــ۶ــ مدارهای R-L-C سری

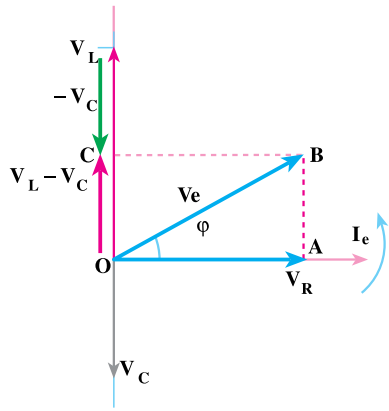
مدار الکتریکی R-L-C سری مطابق شکل ۱ــ۶ است. در این مدار سه عنصر R، L و C به‌طور متوالی اتصال دارند. اگر جریان سینوسی $i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$ از این مدار سری عبور کند، در دو سر مقاومت اهمی ولتاژی به معادله‌ی $v_R = I_m R(\sin \omega t + \theta_i)$ ایجاد می‌کند که این ولتاژ با جریان هم‌فاز است. در دو سر سلف، ولتاژی به معادله‌ی $v_L = X_L I_m \sin(\omega t + \theta_i + ۹۰^\circ)$ و در دو سر خازن، ولتاژی به معادله‌ی $v_C = X_C I_m \sin(\omega t + \theta_i - ۹۰^\circ)$ پدید می‌آید. به طوری که در شکل ۱ــ۶ مشاهده می‌شود، این ولتاژها هم فاز نیستند و راستای بردار آن‌ها، بر روی هم منطبق نیست. به همین علت، ولتاژ کل مدار از جمع برداری رابطه‌ی ۱ــ۶ به‌دست می‌آید.

$$\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_C + \vec{V}_L \qquad (۱ــ۶)$$



شکل ۱ــ۶ــ مدار R-L-C سری

دیاگرام برداری ولتاژها و جریان، مطابق شکل ۲ــ۶ خواهد شد. از آن‌جا که جریان در عناصر R، L و C یکسان است، دیاگرام برداری R-L-C سری، بر مبنای جریان در شکل ۲ــ۶ رسم شده است. در رسم این دیاگرام $X_L > X_C$ فرض شده است و در مجموع مدار خاصیت R-L سری دارد. به طور کلی می‌توان نوشت :



شکل ۲ــ۶ــ دیاگرام برداری مدار R-L-C سری

۱ــ اگر $X_L > X_C$ باشد، مدار در مجموع دارای خاصیت اهمی و سلفی است و ولتاژ بر جریان، تقدم فاز دارد.

۲ــ اگر $X_L = X_C$ باشد، مدار کاملاً خاصیت اهمی دارد و ولتاژ و جریان هم‌فازند. (حالت تشدید)

۳ــ اگر $X_L < X_C$ باشد، مدار خاصیت اهمی خازنی خواهد داشت و ولتاژ از جریان عقب‌تر خواهد بود.

۴ــ با تغییر عناصر R، L و C می‌توان در مدار اختلاف فاز بین -90° تا $+90^\circ$ الکتریکی ایجاد کرد، یعنی $-90^\circ < \varphi < +90^\circ$

۱ــ۲ــ۶ــ محاسبه‌ی امپدانس مدار R-L-C سری: در مثلث OAB دیاگرام برداری مدار R-L-C سری می‌توان نوشت :

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$$

$$V_e^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 \qquad (۶ــ۲)$$

اگر در رابطه‌ی ۶ــ۲ مقادیر $V_e = I_e Z$ ، $V_R = I_e R$ ، $V_L = I_e X_L$ و $V_C = I_e X_C$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت :

$$I_e^2 Z^2 = I_e^2 R^2 + (I_e X_L - I_e X_C)^2$$

$$I_e^2 Z^2 = I_e^2 R^2 + I_e^2 (X_L - X_C)^2$$

$$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (۶\text{ـ}۳)$$

۲ـ۲ـ۶ـ محاسبه‌ی ضرایب توان‌ها: در مثلث OAB شکل ۲ـ۶ می‌توان نوشت :

$$\tan\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L I - X_C I}{RI} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

بدین ترتیب، φ زاویه‌ی اختلاف فاز به شکل زیر محاسبه می‌شود :

$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\frac{X_L - X_C}{R} \qquad (۶\text{ـ}۴)$$

اگر $X_L > X_C$ باشد، $\varphi > 0$ و اگر $X_L < X_C$ باشد، $\varphi < 0$ خواهد شد.

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{V_R}{V_e} = \frac{I \times R}{I \times Z}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \qquad (۶\text{ـ}۵)$$

$$\sin\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{|V_L - V_C|}{V} = \frac{|I \times X_L - I \times X_C|}{I \times Z}$$

$$\sin\varphi = \frac{|X_L - X_C|}{Z} \qquad (۶\text{ـ}۶)$$

۳ـ۲ـ۶ـ مثلث توان‌ها: توان مصرفی در مقاومت اهمی، توان اکتیو و در سلف و خازن از نوع راکتیو است.

$$P_e = I_e^2 R = V_e I_e \cos\varphi \ (W) \qquad (۶\text{ـ}۷)$$

$$P_{d_L} = I_e^2 X_L \qquad (V.A.R) \text{ سلفی}$$

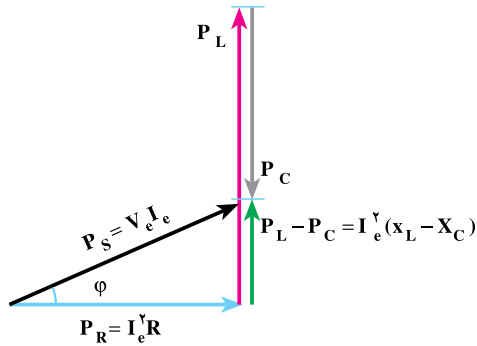
$$P_{d_C} = -I_e^2 X_C \qquad (V.A.R) \text{ خازنی}$$

توان راکتیو کل برابر است با :

$$P_d = P_{d_L} + P_{d_C} = I_e^2 X_L - I_e^2 X_C = I_e^2 (X_L - X_C)$$

$$P_d = V_e I_e \sin\varphi = I_e^2 (X_L - X_C) \qquad (V.A.R) \qquad (۶\text{ـ}۸)$$

با توجه به توان مفید مقاومت و توان‌های راکتیو سلف و خازن مثلث توان‌ها، مطابق شکل ۳ــ۶ رسم می‌شود.



شکل ۳ــ۶ــ مثلث توان‌های مدار R-L-C سری

اگر جریان $i = I_m \sin \omega t$ ، یک مدار R-L-C سری را تغذیه کند، با توجه به روابط ولتاژهای دوسر مقاومت اهمی و سلفی و خازنی و رابطه‌ی زمانی توان‌ها می‌توان نوشت :

معادله‌ی زمانی جریان مدار $i = I_m \sin \omega t$

$V_m = I_m \times Z$

ولتاژ دو سر مقاومت اهمی را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$v_R = I_m R \sin \omega t$$

ولتاژ دو سر سلف برابر است با :

$$v_L = I_m X_L \sin(\omega t + \theta_i + \frac{\pi}{۲})$$

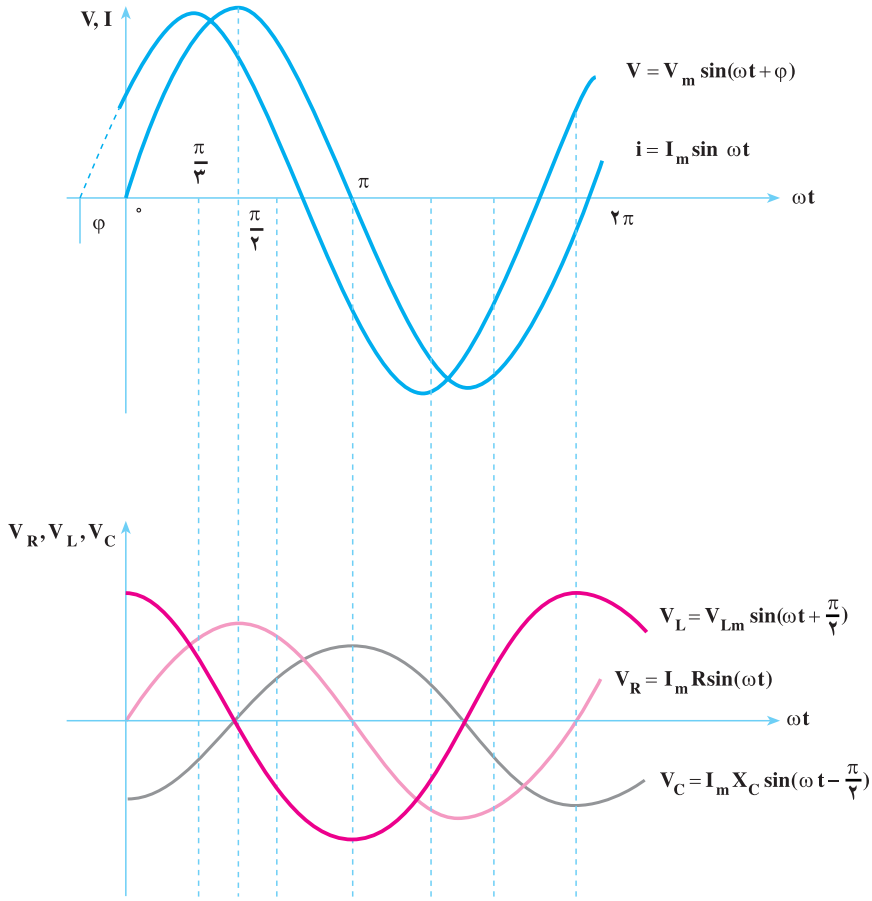
ولتاژ دو سر خازن برابر است با :

$$v_C = I_m X_C \sin(\omega t - \theta_i - \frac{\pi}{۲})$$

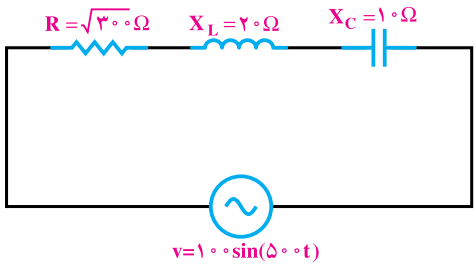
بدین ترتیب، ولتاژ کل مدار محاسبه می‌شود :

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta_v)$$

منحنی تغییرات توابع بالا در شکل ۴ــ۶ مشاهده می‌شود.



شکل ۴ــ۶ــ منحنی تغییرات توابع زمانی جریان کل، ولتاژ کل ولتاژ دو سر مقاومت اهمی، سلفی، خازنی مدار R-L-C سری (دامنه‌ها فرضی و با فرض $R > X_L > X_C$ رسم شده‌اند)



مثال ۱: در مدار شکل مقابل مطلوب است :

الف ــ امپدانس مدار،

$$Z = \sqrt{R^۲ + (X_L - X_C)^۲} = \sqrt{(\sqrt{۳۰۰})^۲ + (۲۰ - ۱۰)^۲} = ۲۰\Omega$$

ب ــ جریان منبع ولتاژ و معادله‌ی زمانی آن،

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{\sqrt{۳۰۰}}{۲۰} = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۲۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\varphi = \cos^{-۱}\left(\frac{R}{Z}\right) = \cos^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۳۰ \rightarrow \varphi = \theta_v - \theta_i \Rightarrow ۳۰ = ۰ - \theta_i \Rightarrow \theta_i = -۳۰$$

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{۱۰۰}{۲۰} = ۵A \ , \ I_e = \frac{I_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۲/۵\sqrt{۲} = ۳/۵۳A$$

$X_L > X_C$ می‌باشد ؛ بنابراین، جریان پس فاز است. $i = ۵\sin(۵۰۰t - ۳۰)$

پ ــ ولتاژ دوسر R، L و C و معادلات زمانی آن‌ها.

$$V_{R_m} = RI_m = \sqrt{۳۰۰} \times ۵ = ۵\sqrt{۳۰۰} = ۵۰\sqrt{۳}V$$

هم‌فاز جریان $v_R = ۵۰\sqrt{۳}\sin(۵۰۰t - ۳۰)$

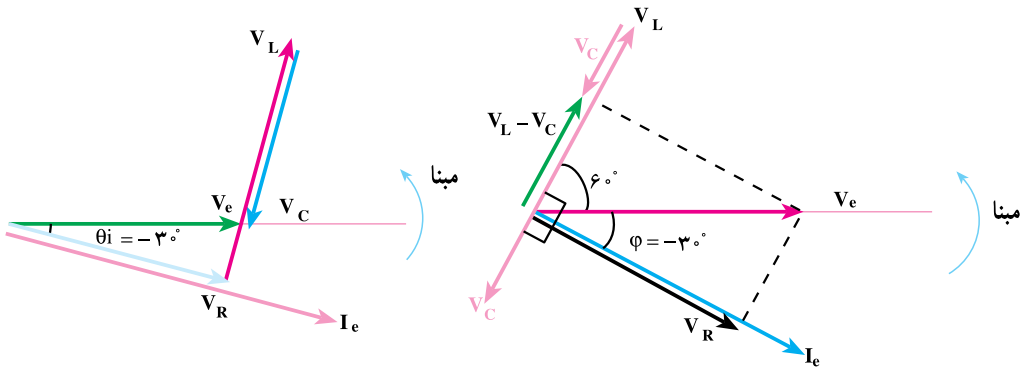
$$V_{L_m} = X_L . I_m = ۲۰ \times ۵ = ۱۰۰V$$

۹۰درجه جلوتر از جریان $v_L = ۱۰۰\sin(۵۰۰t + ۶۰)$

$$V_{C_m} = X_C . I_m = ۱۰ \times ۵ = ۵۰V$$

۹۰ درجه عقب‌تر از جریان $v_C = ۵۰\sin(۵۰۰t - ۱۲۰)$

ت ــ رسم دیاگرام‌برداری ولتاژها و جریان.



شکل ۵ــ۶ــ دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار

ث ــ توان مصرفی و مثلث توان‌ها.

$$P_e = V_e I_e . \cos\varphi = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲۵\sqrt{۳} \quad W$$

چون $X_L > X_C$ زاویه‌ی φ مثبت شده است، P_d نیز مثبت می‌شود.

$$P_d = V_e I_e \sin\varphi = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} \times \frac{۱}{۲} = +۱۲۵ \quad V.A.R$$

$$P_s = V_e I_e = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۲۵۰ \quad V.A$$

توان‌ها را به‌روش زیر نیز می‌توان محاسبه کرد. بدیهی است در هر دو حالت جواب‌ها یکی است.

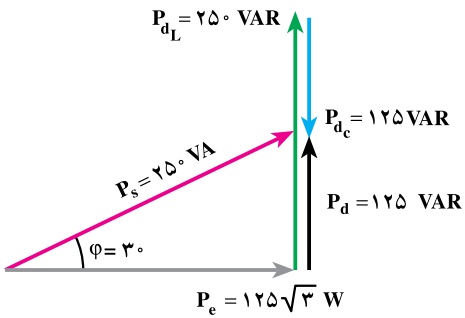
$$P_e = R.I_e^۲ = \sqrt{۳۰۰} \times (\frac{۵}{\sqrt{۲}})^۲ = ۱۰\sqrt{۳} \times \frac{۲۵}{۲} = ۱۲۵\sqrt{۳} \quad W$$

$$P_{d_L} = X_L.I_e^۲ = ۲۰(\frac{۵}{\sqrt{۲}})^۲ = +۲۵۰ \quad V.A.R$$

$$P_{d_C} = -X_C.I_e^۲ = -۱۰(\frac{۵}{\sqrt{۲}})^۲ = -۱۲۵ \quad V.A.R$$

$$\vec{P_d} = \vec{P_{d_L}} + \vec{P_{d_C}} = ۲۵۰ - ۱۲۵ = +۱۲۵ \quad V.A.R$$

$$P_s = \sqrt{P_e^۲ + P_d^۲} = \sqrt{(۱۲۵\sqrt{۳})^۲ + (۱۲۵)^۲} = ۲۵۰ \quad V.A$$



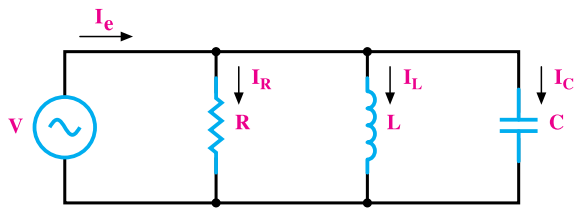
شکل ۶ــ۶

۳ــ۶ــ مدارهای R - L - C موازی

در مدارهای R-L-C موازی، ولتاژ عناصر با هم برابرند. برای جریان در هر عنصر، یک مسیر مستقل وجود دارد. مدار الکتریکی و مسیرهای مستقل جریان R-L-C موازی در شکل ۷ــ۶ نشان داده شده است. اگر یک ولتاژ سینوسی $v = V_m \sin\omega t$ مدار R-L-C موازی را تغذیه کند، جریان i_R با ولتاژ هم‌فاز، جریان i_C از ولتاژ ۹۰° جلوتر و جریان i_L از ولتاژ ۹۰° عقب‌تر است، به ترتیب

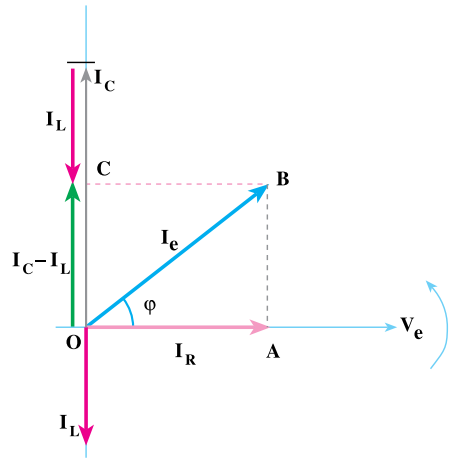
معادله‌ی زمانی $i_R = \frac{V_m}{R}\sin\omega t$ ، $i_C = \frac{V_m}{X_C}\sin(\omega t + \frac{\pi}{۲})$ و $i_L = \frac{V_m}{X_L}\sin(\omega t - \frac{\pi}{۲})$ را خواهند داشت. جریان کل مدار از جمع برداری جریان‌های $\vec{I}_R$ و $\vec{I}_C$ و $\vec{I}_L$ به دست می‌آید.

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C \qquad (۶ــ۹)$$



شکل ۷ــ۶ــ مدار R-L-C موازی

با توجه به مقادیر مؤثر جریان‌های مقاومت اهمی، سلف، خازن از طریق رسم دیاگرام برداری مطابق شکل ۸ــ۶، جریان کل مدار تعیین می‌شود. در رسم دیاگرام $X_C < X_L$ فرض شده است.



شکل ۸ــ۶ــ دیاگرام برداری مدار R-L-C موازی

۱ــ۳ــ۶ــ محاسبه‌ی امپدانس مدار R-L-C موازی: از شکل ۸ــ۶، دیاگرام برداری مدار R-L-C در مثلث قائم الزاویه‌ی OBA می‌توان نوشت :

$$\overline{OB}^{۲} = \overline{OA}^{۲} + \overline{AB}^{۲} \qquad (۶ــ۱۰)$$

$$\overline{OB} = I_e \text{ و } \overline{OA} = I_R \text{ و } \overline{AB} = I_C - I_L \qquad (۶ــ۱۱)$$

با جایگزینی روابط ۱۱ــ۶ در رابطه‌ی ۱۰ــ۶ این رابطه به‌دست می‌آید :

$$I_e^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2 \qquad (۶ــ۱۲)$$

$$I_e = \frac{V_e}{Z} \quad و \quad I_R = \frac{V_e}{R} \quad و \quad I_C = \frac{V_e}{X_C} \quad و \quad I_L = \frac{V_e}{X_L}$$

با جایگزینی این مقادیر در رابطه‌ی ۱۲ــ۶ خواهیم داشت :

$$\frac{V_e^2}{Z^2} = \frac{V_e^2}{R^2} + \left(\frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L}\right)^2$$

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2 \qquad (۶ــ۱۳)$$

۲ــ۳ــ۶ــ محاسبه‌ی اختلاف فاز، ضریب توان‌ها و توان‌های مدار R-L-C موازی:

از دیاگرام برداری شکل ۸ــ۶ می‌توان نوشت :

$$\tan\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{|I_C - I_L|}{I_R} \qquad (۶ــ۱۴)$$

$$\tan\varphi = \frac{\frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L}}{\frac{V_e}{R}} = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} = \tan\varphi = R\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right) \qquad (۶ــ۱۵)$$

بنابراین، اختلاف فاز برابر است با :

$$\varphi = \tan^{-1} R\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right) \qquad (۶ــ۱۶)$$

برای ضریب توان می‌توان نوشت :

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{I_R}{I} = \frac{\frac{V_e}{R}}{\frac{V_e}{Z}}$$

$$\cos\varphi = \frac{Z}{R} \qquad (۶ــ۱۷)$$

برای تعیین $\sin\varphi$ می‌توان نوشت :

$$\sin\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{I_C - I_L}{I} \qquad (۶_۱۸)$$

$$\sin\varphi = \frac{\frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L}}{\frac{V_e}{Z}} = \frac{\cancel{V_e}(\frac{۱}{X_C} - \frac{۱}{X_L})}{\cancel{V_e}\frac{۱}{Z}}$$

$$\sin\varphi = Z\left(\frac{۱}{X_L} - \frac{۱}{X_C}\right) \qquad (۶_۱۹)$$

توان مؤثر را می‌توان به وسیله‌ی روابط زیر محاسبه کرد :

$$P_e = I_R^۲ R = \left(\frac{V_e}{R}\right)^۲ \times R = \frac{V_e^۲}{R} \qquad (۶_۲۰)$$

اگر از رابطه‌ی ۱۲_۶، $I_e = \frac{V}{Z}$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت :

$$P_e = \frac{V_e^۲}{R} = \frac{I_e^۲ \times Z^۲}{R} = \underbrace{I_e \times Z}_{V_e} \times I_e \times \frac{Z}{R}$$

بنابراین، توان مؤثر را در شکل عام رابطه‌ی ۲۱_۶ خواهیم داشت :

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi \qquad (۶_۲۱)$$

برای محاسبه‌ی توان راکتیو، ابتدا توان‌های سلف و خازن را حساب می‌کنیم و توان راکتیو را از آن‌ها نتیجه می‌گیریم :

$$P_{dL} = I_L^۲ X_L = \frac{V_e^۲}{X_L^۲} \times X_L = \frac{V_e^۲}{X_L}$$

$$P_{dC} = -I_C^۲ X_C = -\frac{V_e^۲}{X_C^۲} \times X_C = -\frac{V_e^۲}{X_C}$$

توان راکتیو از جمع جبری توان‌های P_{dL} و P_{dC} به‌دست می‌آید.

$$P_d = P_{dL} + P_{dC}$$

$$P_d = \frac{V_e^۲}{X_L} - \frac{V_e^۲}{X_C} = V_e^۲\left(\frac{۱}{X_L} - \frac{۱}{X_C}\right) = V_e . V_e\left(\frac{۱}{X_L} - \frac{۱}{X_C}\right)$$

به جای یکی از V_e ها مقدار $I_e Z = V_e$ را منظور می‌کنیم.

$$P_d = I_e Z \times V_e \left(\frac{۱}{X_L} - \frac{۱}{X_C} \right)$$

با توجه به رابطه‌ی ۱۹ــ۶ می‌توان نوشت :

$$P_d = \pm I_e V_e \sin\varphi \qquad (۶ــ۲۲)$$

توان ظاهری از توان اکتیو و راکتیو به قرار رابطه‌ی ۲۳ــ۶ محاسبه می‌شود.

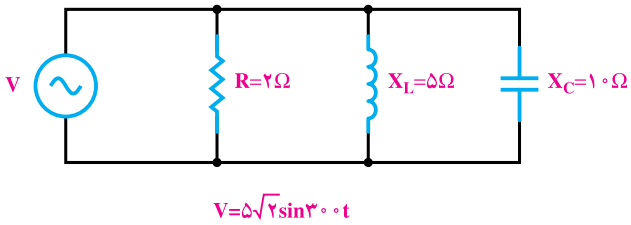
$$P_s = \sqrt{P_e^۲ + P_d^۲} = V_e I_e \qquad (۶ــ۲۳)$$

مثال ۲ : در شکل ۹ــ۶ مطلوب است :

الف ــ جریان هر شاخه.

ب ــ جریان کل و معادله‌ی زمانی آن.

پ ــ رسم مثلث توان‌ها.



شکل ۹ــ۶

راه‌حل:

الف ــ

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۵\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۵V$$

هم‌فاز با ولتاژ V

$$I_R = \frac{V_e}{R} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵A$$

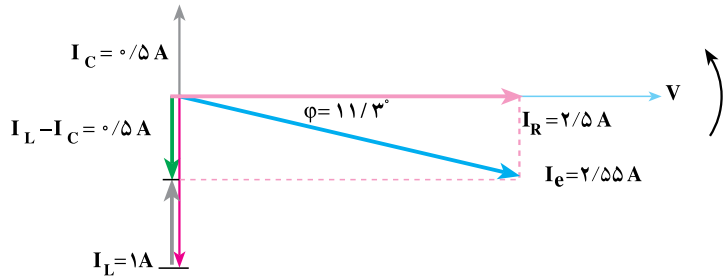
نسبت به ولتاژ ۹۰° پیش‌فاز

$$I_C = \frac{V_e}{X_C} = \frac{۵}{۱۰} = ۰/۵A$$

نسبت به ولتاژ ۹۰° پس‌فاز

$$I_L = \frac{V_e}{X_L} = \frac{۵}{۵} = ۱A$$

ب ــ برای محاسبه‌ی جریان کل و معادله‌ی زمانی آن از دیاگرام برداری جریان‌ها در مبنای ولتاژ استفاده می‌کنیم. بدین منظور، دیاگرام برداری را مطابق شکل ۱۰ــ۶ رسم می‌کنیم.



شکل ۱۰ــ ۶

براساس دیاگرام برداری شکل ۱۰ــ۶، می‌توان محاسبه‌های زیر را انجام داد :

$$I_e^۲ = I_R^۲ + (I_L - I_C)^۲$$

$$I_e^۲ = ۲/۵^۲ + (۱ - ۰/۵)^۲$$

$$I_e^۲ = ۶/۵ \Rightarrow I = ۲/۵۵\ \ A$$

$$\varphi = \tan^{-۱}\left(\frac{I_L - I_C}{I_R}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{۰/۵}{۲/۵}\right) = ۱۱/۳^\circ$$

$$I_m = I_e\sqrt{۲} = ۲/۵۵ \times \sqrt{۲} = ۳/۶\ \ A$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_i$$

$$۱۱/۳ = ۰ - \theta_i$$

$$\theta_i = -۱۱/۳^\circ$$

$$i = ۳/۶\sin(۳۰۰t - ۱۱/۳^\circ)$$

پ ــ برای رسم مثلث توان‌ها، ابتدا توان تک‌تک عناصر را محاسبه می‌کنیم.

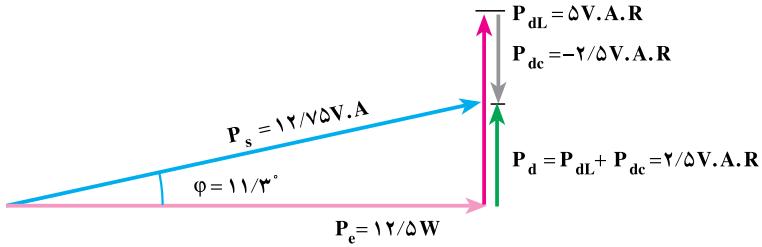
$$P_e = I_R^۲ \times R = (۲/۵)^۲ \times ۲ = ۱۲/۵ \qquad W$$

$$P_{dL} = I_L^۲ \times X_L = ۱^۲ \times ۵ = ۵ \qquad V.A.R$$

$$P_{dC} = -I_C^۲ \times X_C = -۰/۵^۲ \times ۱۰ = -۲/۵ \qquad V.A.R$$

$$P_d = P_{d_L} + P_{d_c} = ۵ - ۲/۵ = ۲/۵ \qquad V.A.R$$

$$P_S = \sqrt{۱۲/۵^۲ + ۲/۵^۲} = ۱۲/۷۵ \qquad V.A$$



شکل ۱۱ــ۶

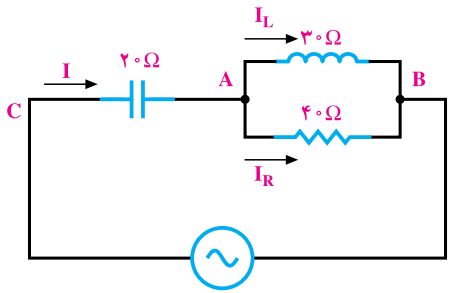
۴ــ۶ــ مدارهای R-L-C مختلط (سری، موازی)

مدارهای R-L-C مختلط از چند مدار ساده‌ی R، R-L، R-C یا R-L-C با شاخه‌های موازی یا سری تشکیل می‌شوند. این مدارها پس از ساده کردن شبکه در نهایت به یک مدار R-L یا R-C ساده تبدیل می‌شوند. از آن‌جا که خواص این مدارها را قبلاً مطالعه کرده‌ایم، مدارهای R-L-C مختلط را با چند مثال دنبال می‌کنیم. در تحلیل مدارهای R-L-C مختلط، برای سهولت تحلیل، ولتاژ شاخه‌ی موازی را به عنوان ولتاژ مرجع (مبنا) در نظر می‌گیرند و سایر کمیّت‌های الکتریکی مدار را بر اساس ولتاژ مبنای شاخه‌ی موازی محاسبه می‌کنند.

مثال ۳: در مدار الکتریکی شکل ۱۲ــ۶ $V_{AB} = ۱۲۰$ ولت است.

مطلوب است:

الف ــ جریان هر شاخه و جریان کل.



شکل ۱۲ــ۶

راه‌حل: با فرض اینکه $V_{AB} = ۱۲۰$ مبناست محاسبات را دنبال می‌کنیم.

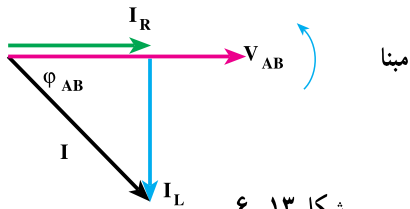
$$I_R = \frac{V_{AB}}{R} = \frac{۱۲۰}{۴۰} = ۳[A]$$

$$I_L = \frac{V_{AB}}{X_L} = \frac{۱۲۰}{۳۰} = ۴[A]$$

برای محاسبه‌ی جریان کل، دیاگرام برداری جریان‌ها را در مبنای V_{AB} رسم می‌کنیم و I_R

هم‌فاز V_{AB} می‌باشد و I_L به اندازه‌ی ۹۰ درجه از V_{AB} عقب‌تر است.

از شکل ۱۳ــ۶ می‌توان نوشت :



شکل ۱۳ــ۶

این رابطه، همان رابطه‌ی ۲۷ــ۳ است.

$$\vec{I} = \vec{I_R} + \vec{I_L}$$

$$I^2 = I_R^2 + I_L^2$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5[A]$$

$$\varphi_{AB} = \tan^{-1}\left(\frac{I_L}{I_R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53^\circ$$

ب ــ ولتاژ منبع.

V_{AC} ولتاژ دو سر خازن است که محاسبه می‌شود.

$$V_{AC} = X_C . I = 20 \times 5 = 100[V]$$

برای محاسبه‌ی ولتاژ منبع باید جمع برداری زیر را انجام داد.

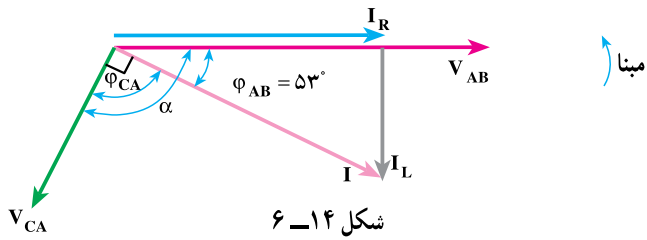
$$\vec{V}_{CB} = \vec{V}_{CA} + \vec{V}_{AB}$$

با استفاده از رابطه‌ی ۵ــ۲ محاسبه می‌شود.

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{CA} = \sqrt{(V_{AB})^2 + (V_{CA})^2 + 2(V_{AB})(V_{CA})\cos\alpha}$$

که α زاویه‌ی بین V_{CA} با V_{AB} است و برای محاسبه‌ی آن باید V_{CA} را در شکل ۱۳ــ۶ رسم کرد.

V_{CA} ولتاژ دو سر خازن خالص می‌باشد که از جریان I به اندازه‌ی ۹۰ درجه عقب‌تر است و با رسم آن در شکل ۱۳ــ۶ و شکل ۱۴ــ۶ به‌دست می‌آید.



شکل ۱۴ــ۶

با توجه به شکل ۶ــ۱۴ داریم :

$$\alpha = \varphi_{AB} + \varphi_{CA}$$

$$\alpha = ۵۳^\circ + ۹۰ = ۱۴۳^\circ$$

با جاگذاری مقادیر در رابطه‌ی زیر V محاسبه می‌شود.

$$V = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{CA} = \sqrt{V_{AB}^۲ + V_{CA}^۲ + ۲V_{AB}.V_{CA}\cos\alpha}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{CA} = \sqrt{۱۲۰^۲ + ۱۰۰^۲ + ۲(۱۲۰)(۱۰۰)(-۰/۸)} = ۷۲/۱\,[V]$$

پ ــ امپدانس کل مدار.

ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی امپدانس کل مدار، رابطه‌ی $Z = \frac{V}{I} = \frac{۷۲/۱}{۵} = ۱۴/۴\Omega$ است.

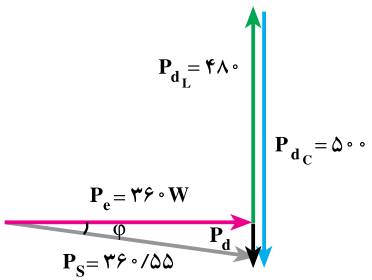
ت ــ مثلث توان‌ها.

$$P_e = R.I_R^۲ = ۴۰(۳)^۲ = ۳۶۰[W]$$

$$P_{d_L} = X_L.I_L^۲ = ۳۰(۴)^۲ = +۴۸۰[V.A.R]$$

$$P_{d_C} = -X_C.I_C^۲ = -X_C.I^۲ = -۲۰(۵)^۲ = -۵۰۰\,[V.A.R]$$

$$P_d = P_{d_L} + P_{d_C} = ۴۸۰ - ۵۰۰ = -۲۰VAR$$

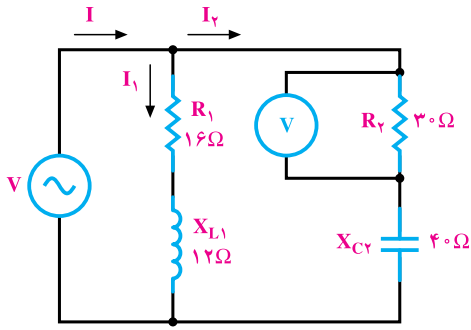


شکل ۶ــ۱۵

با توجه به شکل ۶ــ۱۵ می‌توان نوشت :

$$P_S = \sqrt{P_e^۲ + (P_{d_L} + P_{d_c})^۲} = \sqrt{۳۶۰^۲ + (۴۸۰ - ۵۰۰)^۲} = ۳۶۰/۵۵V.A$$

مثال ۴: در مـــدار الکتریکی شکل ۶ــ۱۶ اگر مقدار قرائت شده از ولت‌متر در دو سر مقاومت ۳۰ اهمی ۶۰ ولت باشد، مطلوب است :



شکل ۶ــ۱۶

الف ــ جریان دو شاخه.

$$I_۲ = \frac{V_R}{R} = \frac{۶۰}{۳۰} = ۲A$$

$$Z_۲ = \sqrt{R_۲^۲ + X_{C_۲}^۲} = \sqrt{۳۰^۲ + ۴۰^۲} = ۵۰\Omega$$

$$V = Z_۲ . I_۲ = ۵۰ \times ۲ = ۱۰۰V$$

$$Z_۱ = \sqrt{R_۱^۲ + X_{L_۱}^۲} = \sqrt{۱۶^۲ + ۱۲^۲} = ۲۰\Omega$$

$$I_۱ = \frac{V}{Z_۱} = \frac{۱۰۰}{۲۰} = ۵A$$

ب ــ رسم دیاگرام برداری $I_۱$ و $I_۲$.

ابتدا V را به‌عنوان مبنا اختیار می‌کنیم و با محاسبه‌ی اختلاف فاز $I_۱$ و $I_۲$ نسبت به V آن دو را رسم می‌کنیم (شکل ۶ــ۱۷).

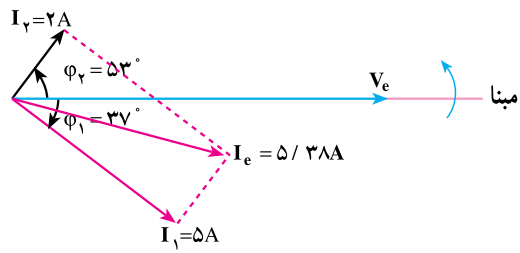
شاخه‌ی ۱ یک مدار R-L سری است و داریم : $\cos\varphi_۱ = \frac{R_۱}{Z_۱} = \frac{۱۶}{۲۰} = ۰/۸$

$I_۱$ «پس‌فاز» $\varphi_۱ = \cos^{-۱}(۰/۸) = ۳۷^\circ$

شاخه‌ی ۲ یک مدار R-C سری است و داریم : $\cos\varphi_۲ = \frac{R_۲}{Z_۲} = \frac{۳۰}{۵۰} = ۰/۶$

$I_۲$ «پیش‌فاز» $\varphi_۲ = \cos^{-۱}(۰/۶) = -۵۳^\circ$

$I_۱$ به اندازه‌ی $\varphi_۱ = ۳۷^\circ$ از V عقب‌تر و $I_۲$ به اندازه‌ی $\varphi_۲ = ۵۳^\circ$ از V جلوتر است.



شکل ۶ــ۱۷