فصل چهارم

مدارهای R – C جریان متناوب

هدف‌های رفتاری

در پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود :

۱ــ مقادیر مقاومت ظاهری، اختلاف فاز، جریان، ولتاژ، ضریب‌توان و ضریب کیفیت مدارهای R-C سری و موازی را با نوشتن فرمول‌های مربوط محاسبه کند.

۲ــ دیاگرام برداری ولتاژها را در مدارهای R-C سری و جریان‌ها را در مدارهای R-C موازی رسم کند.

۳ــ ضریب کیفیت مدارهای R-C سری و موازی را محاسبه کند.

۴ــ تأثیر فرکانس بر مقاومت ظاهری، جریان، اختلاف فاز و ضریب‌قدرت در مدارهای R-C سری و موازی را شرح دهد.

۵ ــ منحنی تغییرات اثر فرکانس بر امپدانس و جریان در مدارهای R-C سری و موازی را با استفاده از معادله آن و از طریق نقطه‌یابی رسم کند.

۶ــ معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای R-C سری و موازی را به‌دست آورد.

۷ــ مدارهای R-C سری را به موازی و بالعکس تبدیل کند.

۱ــ۴ــ مقدمه

کاربرد عناصر اهمی و خازنی در مدارهای الکترونیکی، مخابرات، الکترونیک صنعتی و شبکه‌های قدرت مثلاً فیلترها[۱]، تایمرها[۲]، تصحیح‌کننده ضریب توان[۳]، ضرورت بحث مدارهای R-C را ایجاب

۱ــ فیلترها مدارات R-L-C هستند که می‌توانند امواج خاص را عبور دهند یا حذف کنند.

۲ــ تایمرها دستگاهی هستند که با استفاده از مقادیر R-C، به رله‌ها فرمان می‌دهند.

۳ــ در صنعت برق اثرات سلفی را با خازن‌ها و اثرات خازنی را با سلف‌ها برای کاهش توان راکتیو خنثی می‌کنند این عمل را که ضریب توان را به نزدیکی $\cos\varphi = 1$ می‌رساند اصلاح ضریب توان گویند.

می‌کند. از طرف دیگر، خازن ایده‌آل عملاً وجود ندارد ؛ زیرا هر خازن حقیقی علاوه بر راکتانس خازنی یک مقاومت نشتی‌دارد. به همین علت، هر خازن حقیقی را می‌توان به‌صورت یک مقاومت اهمی و یک راکتانس خازنی ایده‌آل به‌صورت مدار R-C سری یا موازی مُدل کرد و سپس مدار آن‌را تحلیل نمود. در این فصل، رفتار مدارهای R-C سری و موازی در جریان متناوب در حالت پایدار (ماندگار) بررسی خواهیم کرد ؛ زیرا حالت‌های گذرای این مدارها از محدوده‌ی بحث ما خارج است. پاسخ گذرا در مدارهای الکتریکی عکس‌العمل مدار در مقابل تغییرات جریان و ولتاژ شبکه است که با گذشت زمان از بین می‌رود.

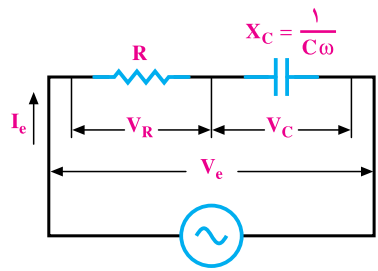
۲ــ۴ــ مدار R - C سری

مدار الکتریکی R-C سری مطابق شکل ۱ــ۴ است. ولتاژ منبع از ولتاژ V_R و V_C تشکیل می شود. جریان در هر دو عنصر C و R یکسان و برابر I_e است. ولتاژ دو سر مقاومت اهمی با جریان I_e هم‌فاز و ولتاژ دو سر خازن V_c از جریان I_e، ۹۰° الکتریکی پس‌فاز است. برای به‌دست‌آوردن ولتاژ V_e، چون $\vec{V}_R$ و $\vec{V}_C$ بردارهای جداگانه‌ای هستند، از دیاگرام برداری استفاده می‌کنیم. برای رسم دیاگرام برداری، جریان I_e را مبنا قرارمی‌دهیم و $\vec{V}_R$ را هم فاز با جریان و $\vec{V}_C$ را ۹۰° پس‌فاز از جریان مطابق شکل ۲ــ۴ رسم می‌کنیم. جمع برداری $\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_C$، ولتاژ منبع و به‌عبارت دیگر، ولتاژ دوسر R - C سری را نشان خواهد داد. اگر جریان لحظه‌ای مدار را به‌صورت $i = I_m \sin(\omega t)$ فرض کنیم، ولتاژ لحظه‌ای V_R و V_c به‌صورت‌های زیر بیان خواهند شد :

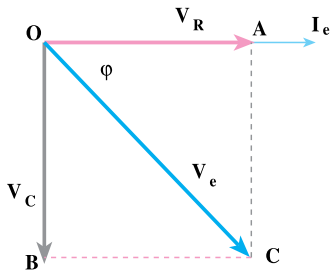
$$i = I_m \sin \omega t \qquad (۴ــ۱)$$

$$v_R = I_m . R \sin \omega t \qquad \text{هم فاز با جریان} \qquad (۴ــ۲)$$

$$v_C = I_m . X_c \sin(\omega t - ۹۰^\circ) \qquad ۹۰ \text{ درجه عقب‌تر از جریان} \qquad (۴ــ۳)$$



شکل ۱ــ۴ــ مدار الکتریکی R-C سری



شکل ۲ــ۴ــ دیاگرام برداری مدار R-C سری

۱ــ۲ــ۴ــ محاسبه‌ی امپدانس مدار R - C سری: در شکل ۱ــ۴ و دیاگرام برداری شکل ۲ــ۴ می‌توان نوشت :

$$V_R = R.I_e \qquad (۴ــ۴)$$

$$V_c = I_e X_c = I_e \times \frac{۱}{C\omega} = \frac{I_e}{۲\pi fC} \qquad (۴ ــ ۵)$$

در مثلث OAC شکل۲ــ۴ می‌توان نوشت :

$$\overline{OC}^{۲} = \overline{OA}^{۲} + \overline{AC}^{۲}$$

$$V_e^{۲} = V_R^{۲} + V_c^{۲}$$

$$I_e^{۲}Z^{۲} = I_e^{۲}R^{۲} + I_e^{۲}X_c^{۲}$$

$$Z^{۲} = R^{۲} + X_c^{۲}$$

$$Z = \sqrt{R^{۲} + X_C^{۲}} \qquad (۴ــ۶)$$

۲ــ۲ــ۴ــ محاسبه‌ی اختلاف فاز و ضریب‌توان در مدار R - C سری : از شکل ۲ــ۴ و مثلث OAC می‌توان نوشت :

$$\tan\varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{V_C}{V_R} = \frac{I_e.X_C}{I_e.R} \qquad (۴ــ۷)$$

بنابراین، اختلاف فاز برابر است با :

$$\varphi = \tan^{-۱}\frac{X_C}{R} = \tan^{-۱}\frac{۱}{R.C.\omega} \qquad (۴ ــ ۸)$$

ضریب‌توان برابر است با :

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{V_R}{V_e} = \frac{I_e.R}{I_e.Z}$$

$$\cos\varphi = \frac{V_R}{V_e} = \frac{R}{Z} \qquad (۴ــ۹)$$

$\sin\varphi$ را از شکل ۲ــ ۴ و مثلث OAC می‌توان به‌قرار زیر حساب کرد :

$$\sin\varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{V_C}{V_e} = \frac{I_e.X_C}{I_e.Z}$$

$$\sin\varphi = \frac{V_C}{V_e} = \frac{X_C}{Z}$$ (۴ـ۱۰)

۳ـ۲ـ۴ـ محاسبه‌ی توان‌ها در مدار R-C سری: برای توان مؤثر می‌توان نوشت :

$$P_e = RI_e^2$$ (۴ـ۱۱)

از رابطه‌ی ۴ـ۹ مقاومت R برابر است با : $R = Z\cos\varphi$

از طرف دیگر، امپدانس مدار برابر است با : $Z = \frac{V_e}{I_e}$

با جایگزینی مقادیر در رابطه‌ی ۴ـ۱۱ توان مؤثر به‌صورت رابطه‌ی ۴ـ۱۲ ظاهر می‌شود :

$$P_e = Z\cos\varphi \times I_e^2$$

$$P_e = \frac{V_e}{I_e}\cos\varphi \times I_e^2$$

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi$$ (۴ـ۱۲)

برای محاسبه‌ی توان غیرمؤثر می‌توان نوشت :

$$P_d = -I_e^2 X_C$$ (۴ـ۱۳)

از رابطه‌ی ۴ـ۱۰ مقادیر Z و X_C را در رابطه‌ی ۴ـ۱۳ جایگزین می‌کنیم.

$$X_C = Z\sin\varphi \quad \text{و} \quad Z = \frac{V_e}{I_e} \quad \text{و} \quad \sin\varphi = \frac{X_C}{Z}$$

$$P_d = I_e^2 . Z\sin\varphi = I_e^2 \frac{V_e}{I_e}\sin\varphi$$

بنابراین :

$$P_d = V_e I_e \sin\varphi$$ (۴ـ۱۴)

درمدارهای R - C جریان پیش‌فاز است ؛ بنابر قرارداد توان P_d را با علامت منفی خواهیم داشت.

یعنی :

$$P_d = -V_e I_e \sin\varphi$$

از رابطه‌های ۴ـ۱۲ و ۴ـ۱۴ توان ظاهری را به‌قرار زیر می‌توان محاسبه کرد :

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{V_e^2 I_e^2 \cos^2\varphi + V_e^2 I_e^2 \sin^2\varphi}$$

$$P_s = V_e I_e$$ (۴ـ۱۵)

مثال ۱: در یک مدار R - C سری متشکل از $R = ۸\Omega$ و $C = ۳۰\mu F$ ، در چه فرکانسی جریان مدار ۳۰° از ولتاژ پیش‌فاز خواهد شد؟

راه حل:

$$\varphi = \tan^{-۱}\frac{۱}{۲\pi fCR} \quad \text{و} \quad \varphi = -۳۰^\circ$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲\pi fCR}$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱}{۲\pi \times f \times ۳۰ \times ۱۰^{-۶} \times ۸} \Rightarrow f = \frac{۳ \times ۱۰^{۶}}{\sqrt{۳} \times ۲\pi \times ۳۰ \times ۸}$$

$$f = ۱۱۴۹/۲Hz$$

مثال ۲: در یک مدار R-C سری، تابع تغییرات ولتاژ و جریان به‌ترتیب $V = ۲۲۰\sin(۱۰۰\pi t)$ و $i = ۵\sin(۱۰۰\pi t + ۶۰^\circ)$ است. مطلوب است :

الف ــ عناصر مدار R و C

ب ــ معادله‌ی زمانی ولتاژ دو سر مقاومت اهمی و خازن.

پ ــ رسم منحنی تغییرات ولتاژ و جریان کل و ولتاژ دوسر مقاومت اهمی و خازن.

ت ــ رسم دیاگرام برداری ولتاژها.

ث ــ محاسبه‌ی توان‌ها و رسم مثلث توان‌ها.

راه‌حل :

الف ــ از معادلات ولتاژ و جریان می‌توان نوشت :

$$I_e = \frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۳/۵۳A \quad \text{و} \quad V_e = \frac{۲۲۰}{\sqrt{۲}} = ۱۵۵/۶ \text{ ولت}$$

$$f = \frac{\omega}{۲\pi} = \frac{۱۰۰\pi}{۲\pi} = ۵۰Hz \quad \text{و} \quad \omega = ۱۰۰\pi$$

$$\varphi = \theta_v - \theta_i = ۰ - ۶۰ = -۶۰^\circ \quad \text{و} \quad I_m = ۵A \quad \text{و} \quad V_m = ۲۲۰V$$

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{۲۲۰}{۵} = ۴۴\Omega$$

از روابط ۴ـ۹ و ۴ـ۱۰ می‌توان نوشت :

$$R = Z\cos\varphi = ۴۴ \times \cos(-۶۰) = ۴۴ \times \frac{۱}{۲} = ۲۲\Omega$$

$$X_C = Z\sin\varphi = ۴۴\sin ۶۰^\circ = ۴۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳۸/۱\Omega$$

$$C = \frac{۱}{X_c.\omega} = \frac{۱۰^{۶}}{۳۸/۱ \times ۱۰۰\pi} = ۸۳/۵۸\mu F$$

ب ــ

$$V_R = R.I_m \sin(\omega t + \theta_i)$$

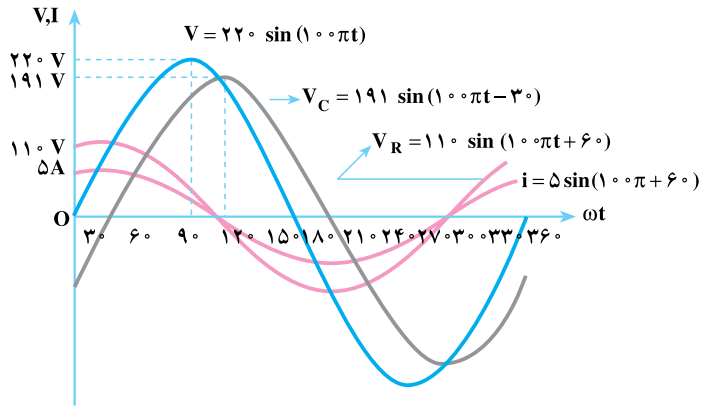
$$V_R = ۲۲ \times ۵ \times \sin(۱۰۰\pi t + ۶۰)$$

$$V_R = ۱۱۰\sin(۱۰۰\pi t + ۶۰)$$

$$V_C = I_m.X_C \sin(۱۰۰\pi t + \theta_I - ۹۰)$$

$$V_C = ۵ \times ۳۸/۱\sin(۱۰۰\pi t + ۶۰ - ۹۰) = ۱۹۱\sin(۱۰۰\pi t - ۳۰)$$

پ ــ



شکل ۳ــ۴

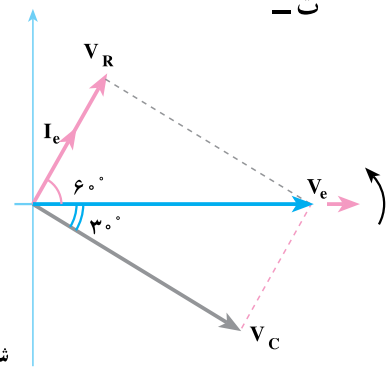
ت ــ

$$V_C = \frac{۱۹۱}{\sqrt{۲}} = ۱۳۵ \text{ ولت} \quad \text{و} \quad \theta_{V_C} = -۳۰^\circ$$

$$V_R = \frac{۱۱۰}{\sqrt{۲}} = ۷۷/۷۸ \text{ ولت} \quad \text{و} \quad \theta_{V_R} = ۶۰^\circ$$

$$I_e = \frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۳/۵۳A \quad \text{و} \quad \theta_i = ۶۰^\circ$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I = ۰ - ۶۰^\circ = -۶۰^\circ$$



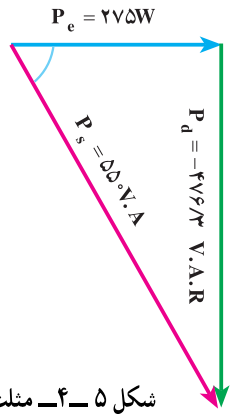
شکل ۴ــ۴ــ دیاگرام برداری

ث ـ

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi = I_e^2 R = \frac{۲۲۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} \times \cos ۶۰^\circ = ۲۷۵W$$

$$P_d = -V_e I_e \sin\varphi = -I_e^2 X_C = \frac{-۲۲۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} \times \sin ۶۰^\circ = -۴۷۶/۳ V.A.R$$

$$P_s = V_e I_e = \frac{۲۲۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۵۵۰ \ V.A$$



شکل ۵ ــ۴ــ مثلث توان‌ها

۴ــ۲ــ۴ــ ضریب کیفیت مدار R-C سری : با توجه به رابطه‌ی ضریب کیفیت (Q) و تحلیلی مشابه مدارهای R-L سری (قسمت ۶ــ۳) می‌توان رابطه‌ی (۱۶ــ۴) را به‌دست آورد.

$$Q = \frac{۱}{C\omega R} \quad \text{یا} \quad Q = \frac{X_C}{R} \qquad (۱۶ــ۴)$$

مثال ۳: ضریب کیفیت در مدار مثال ۲ چه‌قدر است ؟

$$X_C = Z\sin\varphi = ۳۸/۱۸$$

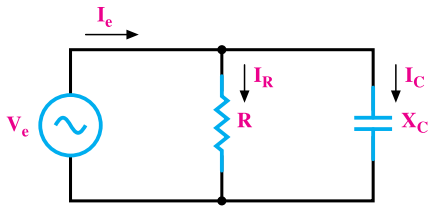
$$R = Z\cos\varphi = ۲۲\Omega$$

$$Q = \frac{X_C}{R} = \frac{۳۸/۱۸}{۲۲} = ۱/۷۳$$

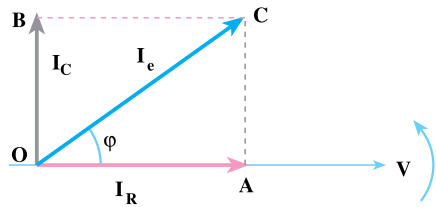
۳ــ۴ــ مدار R - C موازی

یک خازن حقیقی را عملاً به‌صورت یک خازن ایده‌آل و یک مقاومت اهمی موازی با آن مُدل می‌کنند. مقاومت اهمی موازی‌شده را **مقاومت نشتی خازن** گویند و علت تخلیه‌ی خازن را در مرور زمان به‌وسیله‌ی این مدار توجیه می‌کنند. الکترون‌ها از طریق این مقاومت بزرگ از پلاریته‌ی

مثبت خازن (صفحه‌ی مثبت) به‌طرف پلاریته‌ی منفی خازن (صفحه‌ی منفی)، مدارشان را کامل می‌کنند و خازن تخلیه می‌شود. مدارالکتریکی R-C موازی مطابق شکل ۶ــ۴ است. ولتاژ هر دو عنصر C و R باهم یکسان و برابر ولتاژ منبع است. جریان کل مدار از دو جریان غیرهم‌فاز I_R (اهمی) و I_C (خازنی) تشکیل می‌شود. جریان I_R با ولتاژ منبع هم‌فاز و جریان I_C از ولتاژ منبع ۹۰ درجه پیش‌فاز است. برای مطالعه‌ی مدار R-C موازی و تحلیل آن، دیاگرام برداری جریان‌ها را مطابق شکل ۷ــ۴ رسم می‌کنند و محاسبه‌های لازم را انجام می‌دهند.



شکل ۶ــ۴ــ مدار الکتریکی R - C موازی



شکل ۷ــ۴ــ دیاگرام برداری مدار R - C موازی

چون ولتاژ هر دو عنصر C و R یکسان است، در رسم دیاگرام به‌منظور سادگی محاسبات، ولتاژ را مبنا قرار می‌دهند.

۱ــ۳ــ۴ــ محاسبه‌ی امپدانس مدار R - C موازی: با استفاده از شکل‌های ۶ــ۴ و ۷ــ۴ می‌توان نوشت :

$$I_R = \frac{V_e}{R} \qquad (۴ــ۱۷)$$

$$I_C = \frac{V_e}{X_C} \text{ و } I_e = \frac{V_e}{Z} \qquad (۴ــ۱۸)$$

نتیجه‌ی جمع دو بردار $\vec{I_R}$ و $\vec{I_C}$ جریان $\vec{I_e}$ است.

$$\vec{I_e} = \vec{I_R} + \vec{I_C}$$

با توجه به مثلث OAC خواهیم داشت :

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2$$

$$I_e^2 = I_R^2 + I_C^2 \qquad (۴\text{ـ}۱۹)$$

با جایگزینی روابط ۴ـ۱۷ و ۴ـ۱۸ در رابطه‌ی ۴ـ۱۹ خواهیم داشت :

$$V_e = I_e Z \Rightarrow Z = \frac{V_e}{I_e}$$

$$\frac{V_e^2}{Z^2} = \frac{V_e^2}{R^2} + \frac{V_e^2}{X_C^2}$$

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{R.X_c}{\sqrt{R^2 + X^2_c}}} \qquad (۴\text{ـ}۲۰)$$

۲ـ۳ـ۴ـ محاسبه‌ی اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان و ضریب‌توان: برای محاسبه‌ی φ اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان از مثلث OAC شکل ۴ـ۷ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم :

$$\tan\varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{I_C}{I_R}$$

$$\tan\varphi = \frac{\frac{V_e}{X_C}}{\frac{V_e}{R}} = \frac{V_e R}{V_e X_C}$$

با ساده کردن رابطه، خواهیم داشت :

$$\tan\varphi = \frac{I_C}{I_R} = \frac{R}{X_C} = RC\omega \qquad (۴\text{ـ}۲۱)$$

اگر از رابطه‌ی ۴ـ۲۱، arctan گرفته شود، زاویه‌ی φ (اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ) به‌دست می‌آید .

$$\varphi = \tan^{-1}(RC\omega) \quad \text{یا} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{I_C}{I_R}\right) \qquad (۴\text{ـ}۲۲)$$

کسینوس زاویه‌ی φ به‌دست‌آمده در رابطه‌ی ۴ـ۲۲ ضریب توان را تعیین می‌کند. برای محاسبه‌ی ضریب‌توان از مثلث OAC در شکل ۴ـ۷ می‌توان نوشت :

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{I_R}{I_e} = \frac{V_e Z}{V_e R}$$

بنابراین :

$$\cos\varphi = \frac{I_R}{I_e} = \frac{Z}{R} \qquad (۴_۲۳)$$

برای تعیین $\sin\varphi$ ، از مثلث OAC شکل ۴ــ۷ می‌توان نوشت :

$$\sin\varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{I_C}{I_e} = \frac{V_e Z}{V_e X_C}$$

$$\sin\varphi = \frac{I_C}{I_e} = \frac{Z}{X_c} \qquad (۴_۲۴)$$

۳ــ۳ــ۴ــ محاسبه‌ی ضریب کیفیت مدار R-C موازی: می‌دانید که انرژی ذخیره‌شده در یک خازن به ظرفیت C و ولتاژ دوسر آن (V) از رابطه‌ی $W = \frac{۱}{۲}CV^۲$ به‌دست می‌آید. ماکزیمم انرژی ذخیره‌شده توسط ولتاژ ماکزیمم V_m ایجاد می‌شود ؛ بنابراین، $W_m = \frac{۱}{۲}CV_m^۲$ ماکزیمم انرژی ذخیره شده در خازن خواهد بود. انرژی مصرفی در مقاومت اهمی در یک سیکل از رابطه‌ی $W = P.T = I_e^۲R \times \frac{۲\pi}{\omega}$ تعیین می‌شود. I_e جریان مؤثر مقاومت اهمی است که از رابطه‌ی $I_e = \frac{V_e}{R}$ به‌دست می‌آید. برای محاسبه‌ی ضریب کیفیت می‌توان نوشت :

$$Q = \frac{۲\pi \text{ (ماکزیمم انرژی ذخیره در خازن)}}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}}$$

$$Q = \frac{۲\pi\left(\frac{۱}{۲}CV_m^۲\right)}{R \times \frac{V_e^۲}{R^۲} \times \frac{۲\pi}{\omega}} \Rightarrow Q = RC\omega \qquad (۴_۲۵)$$

۴ــ۳ــ۴ــ توان‌ها در مدار R-C موازی: با توجه به روش محاسبه‌ی توان‌ها در مدارهای R-C می‌توان نوشت :

P_e توان مؤثر به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$P_e = I_R^۲R = \frac{V_e^۲}{R} = V_e I_e \cos\varphi \qquad (۴_۲۶)$$

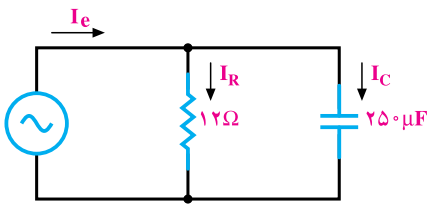
P_d توان غیرمؤثر از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود :

$$P_d = -I_C^2 X_C = -\frac{V_e^2}{X_C} = -V_e I_e \sin\varphi \qquad (۴_۲۷)$$

P_s توان ظاهری برابر است با :

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = V_e I_e \qquad (۴_۲۸)$$

مثال ۴: در مدار RC موازی شکل مقابل اگر ولتاژ منبع $v = ۱۹۲\sqrt{۲}\sin ۲۵۰t$ باشد، مطلوب است :



الف : جریان هر شاخه و معادلات آن‌ها.

$$X_C = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{۲۵۰\times ۱۰^{-۶}\times ۲۵۰} = ۱۶\Omega$$

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۹۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱۹۲V$$

$$I_R = \frac{V_e}{R} = \frac{۱۹۲}{۱۲} = ۱۶A$$

$$I_{Rm} = I_R \cdot \sqrt{۲} = ۱۶\sqrt{۲}A$$

جریان مقاومت هم فاز با ولتاژ

$$i_R = ۱۶\sqrt{۲}\sin ۲۵۰t$$

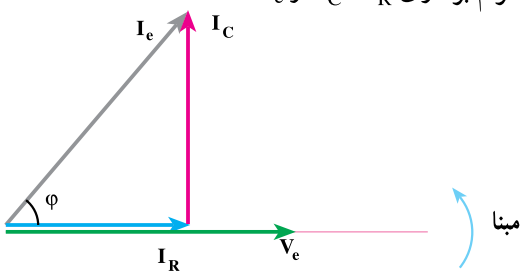
$$I_C = \frac{V_e}{X_c} = \frac{۱۹۲}{۱۶} = ۱۲A$$

$$I_{cm} = I_C \cdot \sqrt{۲} = ۱۲\sqrt{۲}A$$

جریان خازن ۹۰ درجه جلوتر(پیش‌فاز) از ولتاژ

$$i_C = ۱۲\sqrt{۲}\sin(۲۵۰t + ۹۰^\circ)$$

ب : رسم دیاگرام برداری $\vec{I_R}$ ، $\vec{I_C}$ و $\vec{I_e}$.



شکل ۸ــ۴

پ : جریان کل و معادله‌ی آن :

با توجه به شکل ۸ــ۴ داریم : $\vec{I_e} = \vec{I_R} + \vec{I_C} = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20\,A$

$I_m = I_e\sqrt{2} = 20\sqrt{2}\ \ A$

از رابطه‌ی ۲۲ــ۴ خواهیم داشت :

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{I_C}{I_R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{12}{16}\right) = 37^\circ$$

$i = 20\sqrt{2}\sin(250t + 37^\circ)$ I به اندازه‌ی φ از V جلوتر است.

ت : امپدانس مدار.

از رابطه‌ی ۲۰ــ۴ داریم : $\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_c^2}$

ولی با داشتن V_e و I_e که ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی Z رابطه‌ی ۱ــ۳ است.

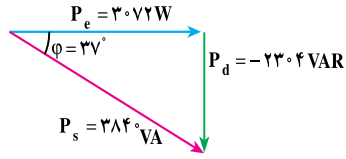
$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{192\sqrt{2}}{20\sqrt{2}} = 9/6\,\Omega$$

ث : محاسبه‌ی توان‌ها و رسم مثلث توان.

$P_e = V_e I_e \cos\varphi = 192 \times 20 \times \cos(37^\circ) = 3072\,W$

$P_d = V_e I_e \sin\varphi = 192 \times 20 \times \sin(-37^\circ) = -2304\ \ VAR$

$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{(3072)^2 + (-2304)^2} = 3840\ \ VA$



۴ــ۴ــ تأثیر فرکانس بر مدارهای R - C

با توجه به امپدانس‌های محاسبه‌شده برای مدار R - C سری، $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ و مدار R - C موازی $\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}$ و درنظرگرفتن این‌که $X_C = \frac{1}{2\pi fC}$ ، مشخص می‌شود. تغییرات فرکانس مدار در امپدانس مدارR-C سری و موازی اثر می‌گذارد. کمیت‌های $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ و Q به‌طریقی به

امپدانس مدار مرتبط‌اند ؛ بنابراین، تغییرات فرکانس، این کمیّت‌ها را نیز تغییر می‌دهد.

هم‌چنین با توجه به این‌که $I_e = \frac{V_e}{Z}$ ، $P_e = V_e I_e \cos\varphi$ ، $P_d = V_e I_e \sin\varphi$ و $P_s = V_e I_e$ هستند، این کمیّت‌ها نیز با تغییرات حاصل در فرکانس شبکه تغییر خواهند کرد. با در نظرگرفتن مطالب گفته شده تأثیر فرکانس را بر روی جریان و امپدانس مدار R - C سری و موازی به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم .

۱ــ۴ــ۴ــ تأثیر فرکانس در مدار R - C سری: در شکل ۱ــ۴ فرض می‌کنیم فرکانس منبع ولتاژ از صفر تا ∞ تغییر کند ولی دامنه‌ی ولتاژ ثابت باقی بماند. مقادیر R و C نیز در تغییرات فرکانس مقادیر ثابت باقی بمانند. فرکانس مدار را هم صفر در نظر می‌گیریم. می‌دانیم در جریان DC فرکانس مدار صفر است. خازن در مدارهای DC خیلی سریع شارژ می‌شود و جریان مدار را قطع می‌کند و منبع ولتاژ با مدار باز ــ یعنی امپدانس بی‌نهایت ــ مواجه می‌شود. بنابراین :

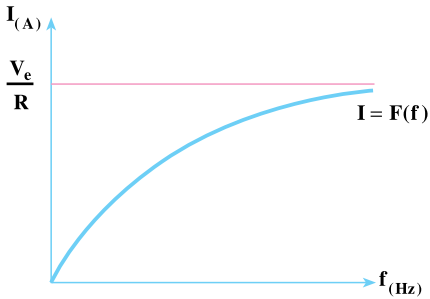
$$f = ۰ \Rightarrow Z = \sqrt{R^۲ + \left(\frac{۱}{۲\pi C \times (۰)}\right)^۲} = \infty \quad و \quad I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\infty} = ۰$$

اگر فرکانس از صفر به بی‌نهایت تغییر کند، امپدانس مدار کاهش یافته و جریان افزایش می‌یابد ؛ به‌گونه‌ای که در فرکانس بی‌نهایت مقدار $X_C = ۰$ و امپدانس مدار $Z = R$ و $I = \frac{V}{R}$ می‌شود. دلیل این‌که خازن اتصال کوتاه می‌شود، تغییرات سریع پلاریته‌ی صفحات آن در فرکانس‌های زیاد است. خازن با وجود این تغییرات سریع نمی‌تواند عکس‌العمل نشان دهد و جریان به‌راحتی از آن عبور می‌کند. بنابراین :

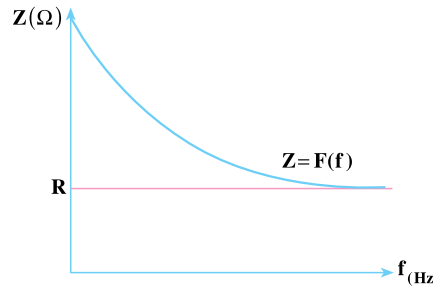
$$f \to \infty \Rightarrow Z = \sqrt{R^۲ + \left(\frac{۱}{۲\pi C \times (\infty)}\right)^۲} = \sqrt{R^۲} = R \quad و \quad I = \frac{V}{R}$$

ضریب کیفیت مدار $Q = \frac{۱}{RC\omega} = \frac{۱}{۲\pi fCR}$ در فرکانس‌های کم‌تر خیلی بالا و در فرکانس بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کند. منحنی تغییرات جریان و امپدانس مدار R - C را در فرکانس‌های متغیر می‌توان به‌صورت شکل‌های ۹ــ۴ از طریق نقطه‌یابی رسم کرد .

$f_{(Hz)}$	۰	∞
$Z_{(\Omega)}$	∞	R
$I_{(A)}$	۰	$\frac{V_e}{R}$



ب: منحنی تغییرات جریان در اثر فرکانس

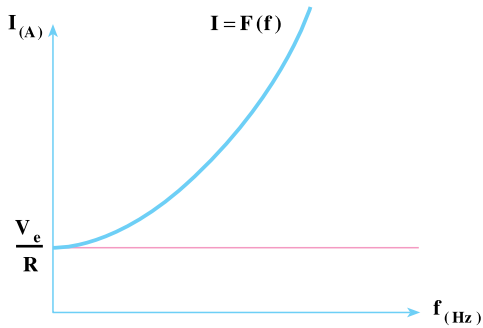


الف: منحنی تغییرات امپدانس در اثر فرکانس

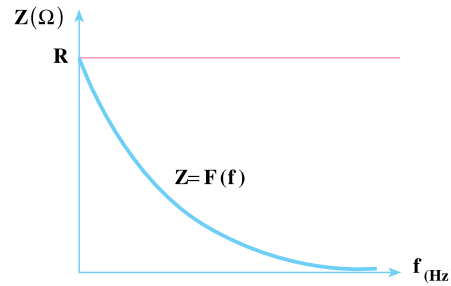
شکل ۹ــ۴ ــ تأثیر فرکانس بر مقادیر Z، I در R-C سری

۲ــ۴ــ۴ــ تأثیر فرکانس در مدار R - C موازی : در یک مدار R - C موازی فرض می‌کنیم فرکانس منبع تغذیه در دامنه‌ی ثابت تغییر کند و در این تغییرات مقدار عناصر R و C ثابت باشند. اگر فرکانس مدار صفر باشد، خازن شاخه‌ی موازی مربوط به خود را در اثر شارژ در حالت دائمی باز می‌کند و جریان $I_c = ۰$ می‌شود. در این حالت، جریان مدار برابر جریان I_R خواهد شد و امپدانس $Z = R$ می‌شود. اگر فرکانس $f = \infty$ شود، شاخه‌ی خازنی اتصال کوتاه می‌کند و جریان I_e بی‌نهایت می‌شود. دراین‌حالت $Z = ۰$ خواهد بود. منحنی تغییرات جریان و امپدانس در R - C موازی نسبت به تغییرات فرکانس مطابق شکل ۱۰ــ۴، از طریق نقطه‌یابی رسم می‌شود .

$f_{(Hz)}$	۰	∞
$Z_{(\Omega)}$	R	۰
$I_{(A)}$	$\frac{V_e}{R}$	∞



ب : منحنی تغییرات I = F(f)

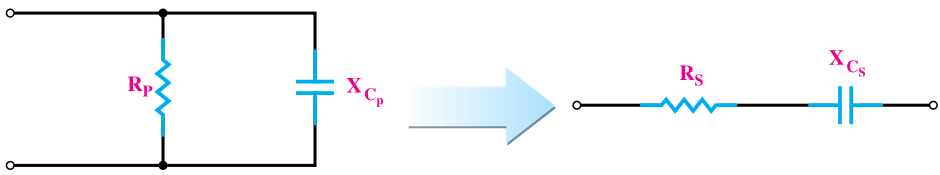


الف : منحنی تغییرات Z = F(f)

شکل ۱۰ــ۴ ــ تأثیر فرکانس بر مقادیر Z و I در R-C موازی

۵ــ۴ــ تبدیل مدار R-C سری به مدار R-C موازی و برعکس

مدار R-C موازی را در نظر بگیرید می‌خواهیم معادل سری آن را به‌دست آوریم. در مدار معادل باید Z_P و φ_P با Z_s و φ_s مدار قبل از تبدیل یکی باشد.



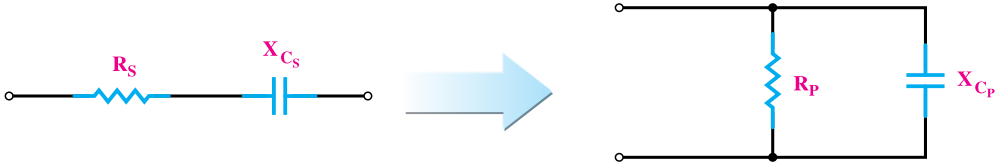
$$Z_P = \frac{R_P . X_{C_P}}{\sqrt{R_P^2 + X_{C_P}^2}}$$

$$\cos\varphi_P = \frac{Z_P}{R_P}$$

$$R_s = \frac{Z_P^2}{R_P}$$

$$X_{C_s} = \frac{Z_P^2}{X_{C_P}}$$

در تبدیل سری به موازی خواهیم داشت :



$$Z_s = \sqrt{R_s^2 + X_{C_s}^2}$$

$$\cos\varphi_s = \frac{R_s}{Z_s}$$

$$R_P = \frac{Z_S^2}{R_S}$$

$$X_{C_P} = \frac{Z_S^2}{X_{C_S}}$$

تمرین

۱ــ یک مقاومت $R=۱۰\Omega$ با یک خازن به راکتانس $X_C=۱۰\sqrt{۳}\Omega$ به‌صورت سری به یک منبع ولتاژ با معادله‌ی $v=۱۰۰\sin ۲۵۰۰t$ متصل است. مطلوب است :

الف : معادله‌ی جریان منبع.

ب : معادله‌ی ولتاژ دو سر هر المان.

پ : محاسبه‌ی توان‌های مدار و رسم مثلث توان‌ها.

جواب :

$$i(t)=۵\sin(۲۵۰۰t+۶۰^\circ)$$

$$v_C(t)=۵۰\sqrt{۳}\sin(۲۵۰۰t-۳۰^\circ)$$

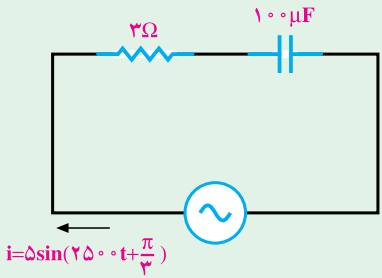
$$v_R(t)=۵۰\sin(۲۵۰۰t+۶۰^\circ)$$

۲ــ در مدار مقابل مطلوب است :

الف : معادله‌ی ولتاژ منبع.

ب : معادله‌ی ولتاژ دو سر هر المان.

پ : رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار.



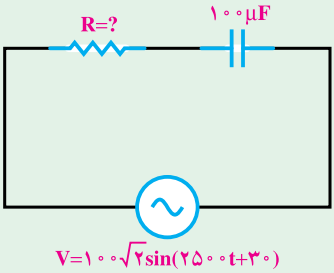
۳ــ در یک مدار $R-C$ سری معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع به ترتیب $V=۱۰۰\sin(۲۵۰۰t-\frac{\pi}{۶})$ و $i=۲\sin(۲۵۰۰t+\frac{\pi}{۶})$ می‌باشد. اندازه‌ی R و C چه‌قدر است؟

جواب : $C=۹/۲۳\mu F$ و $R=۲۵\Omega$

۴ــ یک خازن با راکتانس $X_C=۵\Omega$ با یک مقاومت نامشخص به‌طور سری به هم متصل‌اند. اگر جریان به‌اندازه‌ی $\frac{\pi}{۳}$ رادیان از ولتاژ جلو باشد، مقدار R چند اهم است؟

جواب : $R=۲/۸۸\Omega$

۵ــ در مدار شکل روبه‌رو اگر $Z = ۵\Omega$ باشد، اندازه‌ی R چند اهم است؟

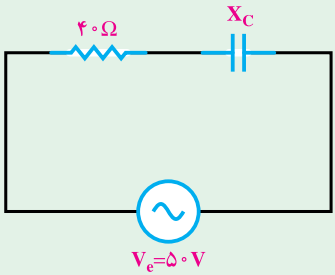


جواب : $R = ۳\Omega$

۶ــ خازنی به‌ظرفیت $۱۰۰\mu F$ با یک مقاومت ۲۰Ω سری شده‌اند. در چه فرکانسی ضریب کیفیت مدار $\frac{۵}{\pi}$ می‌شود؟

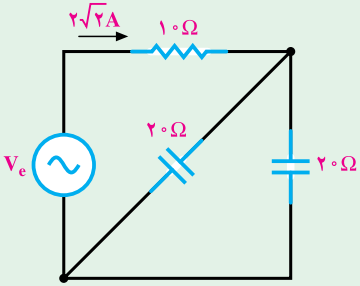
جواب : $f = ۵۰Hz$

۷ــ در مدار شکل روبه‌رو، ولتاژ دو سر خازن $v_C = ۳۰V$ است. ضریب توان و اندازه‌ی X_C چند اهم است؟



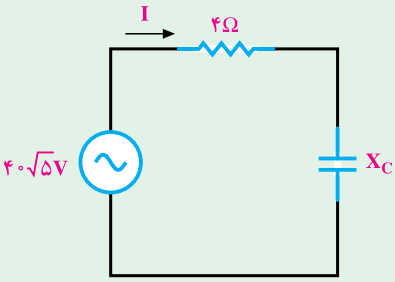
جواب : $X_C = ۳۰\Omega$ و $\cos\varphi = ۰/۸$

۸ــ در مدار روبه‌رو ولتاژ منبع چند ولت است؟



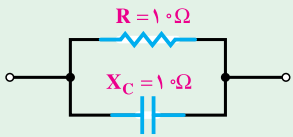
جواب : $V_e = ۴۰v$

۹ــ ضریب کیفیت‌مدار روبه‌رو $Q = ۲$ است. جریان مدار چند آمپر است؟



جواب : $I = ۱۰A$

۱۰ــ مدار R-C موازی شکل روبه‌رو را به یک مدار R-C سری تبدیل کنید.



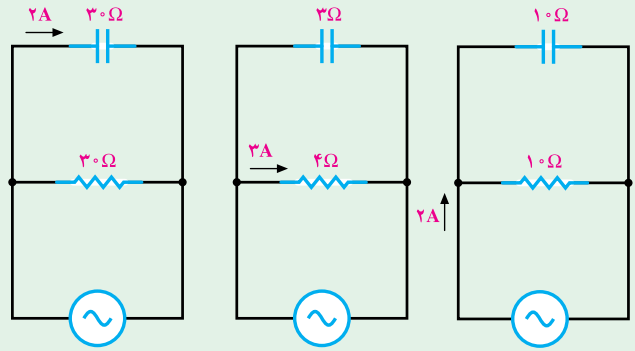
جواب : $R_S = 5\Omega$ و $X_{C_S} = 5\Omega$

۱۱ــ در هر یک از مدارهای زیر مطلوب است :

الف : معادله‌ی جریان و ولتاژ منبع. $(\theta_V = 0)$

ب : توان‌های مدار و رسم مثلث توان.

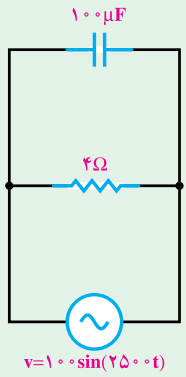
پ : رسم دیاگرام برداری جریان‌ها و ولتاژ مدار.



۱۲ــ در یک مدار R - C موازی معادله‌ی ولتاژ و جریان به‌ترتیب $v(t) = 200\sin 1000t$ و $i(t) = 10\sin(1000t + \frac{\pi}{4})$ می‌باشد. اندازه‌ی R و C چه‌قدر است؟

جواب : $C = 3/53\mu F$ و $R = 20\sqrt{2}\Omega$

۱۳ــ در مدار شکل روبه‌رو مطلوب است :



الف : جریان هر شاخه و معادلات زمانی آن‌ها.

ب : درصورت دو برابر شدن فرکانس، بند الف را محاسبه کنید.

پ : درصورت نصف شدن فرکانس، بند الف را محاسبه کنید.

ت : جواب‌های بند الف، ب و پ را مقایسه کنید.

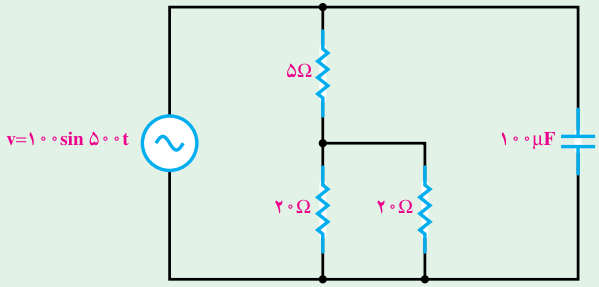
جواب الف : $I_{R(t)} = 25\sin(2500t + 0)$

$I_{C(t)} = 25\sin(2500t + 90^\circ)$

۱۴ــ در مدار شکل زیر مطلوب است :

الف : امپدانس کل مدار.

ب : ضریب قدرت شبکه.



جواب :

$Z = ۱۲\Omega$

$\cos\varphi = ۰/۸$