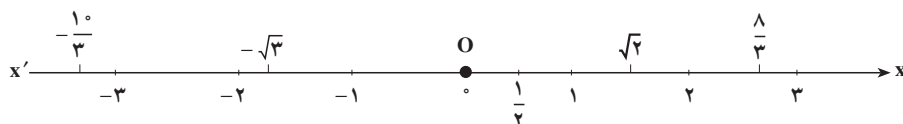


فصل دوم

تابع

یادآوری و تکمیل

می‌دانیم که هر عدد حقیقی متناظر با یک نقطه از محور مختصات و هر نقطه از محور مختصات، نظیر یک عدد حقیقی است. بدین ترتیب که مبدأ O را همتا یا نظیر عدد صفر گرفت؛ آنگاه، اگر x یک عدد حقیقی مثبت باشد، نقطه‌ای از محور را که به فاصله x از O و در سمت راست O (سوی مثبت) قرار دارد نظیر عدد x و چنانچه x یک عدد حقیقی منفی باشد (که در این صورت $-x$ مثبت است) نقطه‌ای از محور را که به فاصله $-x$ از O و در سمت چپ آن است نظیر عدد x اختیار کرد. بدین گونه به هر عدد حقیقی یک نقطه از محور، و تنها یکی، و به هر نقطه از محور یک عدد حقیقی یکتا نسبت داده می‌شود. بنابراین نقاط یک محور را می‌توانیم با اعداد حقیقی مشخص کنیم. به این جهت محور را گاهی خط حقیقی می‌نامند و برای یک عدد حقیقی و نقطه نظیر آن یک نماد به کار می‌برند و عدد حقیقی x را نقطه x نیز می‌گویند.



بازه

در ریاضیات ۲ با مثال‌هایی از بازه آشنا شده‌اید و می‌دانید که مثلاً بازه $۲- و ۶$ مجموعه همه اعداد حقیقی x بین $۲-$ و ۶ یعنی $۲ < x < ۶$ است که به صورت $(۲, ۶)$ نشان داده می‌شود.

$$(۲, ۶) = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲ < x < ۶\}$$

به طور کلی اگر a و b دو عدد حقیقی و $a < b$ باشد:

۱- مجموعه همه اعداد حقیقی x را که از a بزرگ‌تر و از b کوچک‌تر باشند بازه a و b می‌نامند و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

۲- اجتماع بازه باز (a, b) و دو نقطه a و b را بازه بسته a و b می نامند و آن را چنین می نویسند :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

۳- اجتماع (a, b) و نقطه b را بازه نیم باز از چپ (یا نیم بسته از راست) می نامند و چنین نشان

می دهند :

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

به همین ترتیب بازه نیم باز از راست (یا نیم بسته از چپ) تعریف می شود. به علاوه بازه های بیکران را به شکل زیر تعریف می کنند :

$$\{x \in \mathbb{R} | x \geq a\} = [a, +\infty) \quad \text{۴- بازه نیم باز } a \text{ و } +\infty :$$

$$\{x \in \mathbb{R} | x > a\} = (a, +\infty) \quad \text{۵- بازه باز } a \text{ و } +\infty :$$

$$\{x \in \mathbb{R} | x \leq a\} = (-\infty, a] \quad \text{۶- بازه نیم باز } -\infty \text{ و } a :$$

$$\{x \in \mathbb{R} | x < a\} = (-\infty, a) \quad \text{۷- بازه باز } -\infty \text{ و } a :$$

به طور خلاصه داریم :

$$x \in (a, b) \Leftrightarrow a < x < b$$

$$x \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$$

$$x \in [a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$$

$$x \in (a, b] \Leftrightarrow a < x \leq b$$

$$x \in [a, +\infty) \Leftrightarrow x \geq a$$

$$x \in (a, \infty) \Leftrightarrow x > a$$

$$x \in (-\infty, a] \Leftrightarrow x \leq a$$

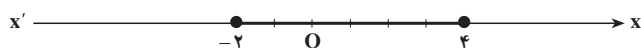
$$x \in (-\infty, a) \Leftrightarrow x < a$$

نمایش هندسی بازه ها

اگر نقاط a و b را روی محور اختیار کنیم هریک از بازه های تعریف شده بالا را می توان به وسیله یک پاره خط یا یک نیم خط، باز یا بسته، از محور نشان داد. نقطه هایی را که به بازه متعلق نیستند با دایره های تو خالی روی محور مشخص می کنند.

مثال ۱: بازه های داده شده را روی محور به شکل زیر نشان می دهیم :

$$۱) \quad [-2, 4] = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 4\}$$



$$۲) \quad (-۲, ۴] = \{x \in \mathbb{R} | -۲ < x \leq ۴\}$$

A number line with points -۲, ۰, and ۴ marked. An open circle is at -۲ and a closed circle is at ۴. The segment between them is shaded.

$$۳) \quad [-۲, ۴) = \{x \in \mathbb{R} | -۲ \leq x < ۴\}$$

A number line with points -۲, ۰, and ۴ marked. A closed circle is at -۲ and an open circle is at ۴. The segment between them is shaded.

$$۴) \quad (-۲, ۴) = \{x \in \mathbb{R} | -۲ < x < ۴\}$$

A number line with points -۲, ۰, and ۴ marked. Open circles are at both -۲ and ۴. The segment between them is shaded.

$$۵) \quad [۴, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq ۴\}$$

A number line with points ۰ and ۴ marked. A closed circle is at ۴, and the line is shaded to the right.

$$۶) \quad (۴, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > ۴\}$$

A number line with points ۰ and ۴ marked. An open circle is at ۴, and the line is shaded to the right.

$$۷) \quad (-\infty, -۲] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -۲\}$$

A number line with points -۲ and ۰ marked. A closed circle is at -۲, and the line is shaded to the left.

$$۸) \quad (-\infty, -۲) = \{x \in \mathbb{R} | x < -۲\}$$

A number line with points -۲ and ۰ marked. An open circle is at -۲, and the line is shaded to the left.

برای آشنایی بیشتر با مفهوم بازه و عملیات روی آن‌ها، در زیر چند مثال نمونه را همراه با جواب آن‌ها آورده‌ایم:

۱- عبارتهای زیر را در صورت امکان ساده کنید:

الف) $[-۴, ۷] \cap (-۲, ۴)$

ب) $[-۴, ۷] \cup (-۲, ۴)$

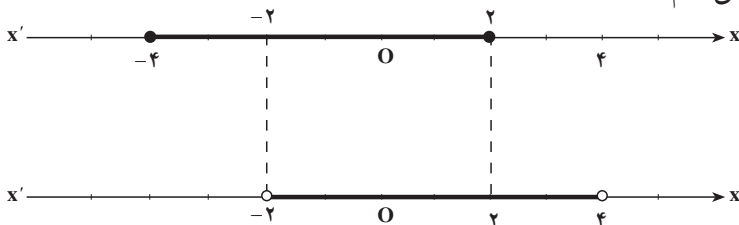
پ) $[-۴, ۷] \cap [۳, +\infty)$

ت) $[-۴, ۷] \cup [۳, +\infty)$

جواب:

الف) ابتدا نمودار هندسی هر بازه را روی محور مشخص می‌کنیم، سپس ناحیه مشترک دو

بازه را پیدا می‌کنیم:



با توجه به نمودار هندسی بازه‌ها ملاحظه می‌کنیم که اشتراک آن‌ها بازه $[-2, 2]$ است. باید توجه داشت که اگر نقطه‌های پایانی اشتراک دو بازه به هر دو بازه تعلق داشته باشند (مانند ۲) در این صورت بازه در آن نقطه بسته و در حالتی که نقطه‌های پایانی اشتراک دو بازه حداکثر متعلق به یکی از بازه‌ها باشند (مانند ۲-) آن‌گاه بازه در آن نقطه باز است.

چنانچه با همین روند ادامه دهیم، جواب‌های قسمت‌های دیگر را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

ب) $[-4, 4]$ پ) \emptyset ت) $[-4, 4] \cup [3, +\infty)$

۲- مجموعه جواب هریک از نامعادله‌های زیر را روی محور اعداد حقیقی مشخص کنید و آن را به صورت یک بازه نشان دهید:

الف) $0 < x - 1 < 2$

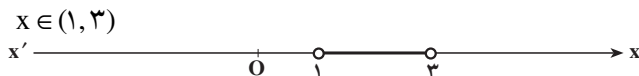
ب) $-1 \leq x + 2 \leq 6$

پ) $\frac{x+1}{2} \geq 2$

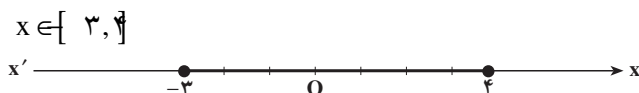
ت) $\frac{2x-1}{3} \leq 1$

جواب:

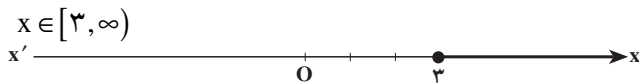
الف) $0 < x - 1 < 2 \Rightarrow 1 < x < 3$



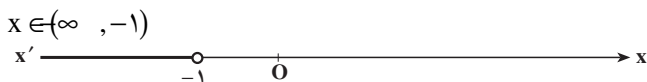
ب) $-1 \leq x + 2 \leq 6 \Rightarrow -3 \leq x \leq 4$



پ) $\frac{x+1}{2} \geq 2 \Rightarrow x+1 \geq 4 \Rightarrow x \geq 3$



ت) $\frac{2x-1}{3} \leq 1 \Rightarrow 2x-1 \leq 3 \Rightarrow x \leq 1$



۳- مجموعه‌های زیر را به صورت بازه نمایش دهید.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

جواب:

$$A = (-1, 3] \quad B = [-1, 3) \quad C = (-\infty, 6) \quad D = [-2, +\infty)$$

۴- بازه‌های زیر را به وسیله مجموعه نمایش دهید.

$$\text{الف) } [3, 4] \quad \text{ب) } (-3, 7] \quad \text{پ) } (-\infty, 1] \quad \text{ت) } [2, +\infty)$$

جواب:

$$\text{الف) } A = \{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x \leq 5\} \quad \text{ب) } B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 7\}$$

$$\text{پ) } C = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\} \quad \text{ت) } D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$$

تمرین

۱- با استفاده از تعریف بازه، عبارت‌های زیر را در صورت امکان، ساده کنید.

$$\text{الف) } (-2, 5] \cup [3, 6) \quad \text{ب) } (-\infty, 0] \cap [-4, 4]$$

$$\text{پ) } (0, +\infty) \cap (-\infty, 3] \quad \text{ت) } [-3, 4] \cup (2, 3]$$

۲- بازه‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

$$\text{الف) } [2, +\infty) \quad \text{ب) } (2, +\infty) \quad \text{پ) } [-3, 2]$$

$$\text{ت) } (-2, 2) \quad \text{ث) } [-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) \quad \text{ج) } (-\infty, -1]$$

۳- مجموعه‌های زیر را به وسیله بازه نمایش دهید.

$$\text{الف) } A = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x \leq 6\} \quad \text{ب) } B = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$$

$$\text{پ) } C = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2\} \quad \text{ت) } D = \{x \in \mathbb{R} | -6 < x \leq -1\}$$

۴- بازه‌های زیر را به وسیله مجموعه نمایش دهید.

$$\text{الف) } [3, 7] \quad \text{ب) } [0, +\infty) \quad \text{پ) } (0, +\infty)$$

$$\text{ت) } [-4, -1) \quad \text{ث) } (-\infty, 0] \quad \text{ج) } [-3, 2)$$

۵- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$ باشد


بازه‌هایی را که با مجموعه‌های زیر تعریف شده‌اند مشخص کنید:

$$\text{الف) } A \cup B \quad \text{ب) } A \cap B \quad \text{پ) } A \cup B \cup C$$

$$\text{ت) } A \cap C \quad \text{ث) } B \cap C \quad \text{ج) } (A \cup B) \cap C$$

$$\text{چ) } (A \cap B) \cap C \quad \text{ح) } B \cup C$$

۶- در جدول زیر، خانه‌های خالی را با نماد مجموعه، نماد بازه و نمودار مناسب، پر کنید.

نمودار	نماد مجموعه	نماد بازه
		$[-1, 2]$
	$\{x \in \mathbb{R} 2 < x < 4\}$	
		
	$\{x \in \mathbb{R} -2 < x \leq 3\}$	

۷- مجموعه جواب هریک از نامعادله‌های زیر را تعیین کنید و روی محور نمایش دهید.

الف) $2x - 3 < 0$ ب) $2x - 4 \geq 0$ پ) $\frac{x+1}{2} > 2x - 1$

ت) $0 \leq x + 2 < 3$ ث) $-2 \leq \frac{x}{2} - 1 \leq 2$ ج) $-1 \leq \frac{-2x+1}{3} < 4$

معادلات و نامعادلات گویا

معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند. برای مثال عبارت‌های زیر همگی عبارت‌های گویا هستند.

$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{3x}{x+5}, \quad \frac{2x^2+x-1}{x+2}, \quad 3x - \frac{1}{x+3}$$

مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنی است که مخرجش صفر نباشد. یعنی درحالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، آن‌گاه مقدار عبارت گویا تعریف نشده است.

عبارت گویای $\frac{3x}{2} - \frac{1}{x+3}$ به‌ازای $x = -3$ تعریف نشده است، زیرا با قرار دادن $x = -3$

در آن مخرج کسر دوم برابر با صفر شده و در این حالت، کسر تعریف نشده است.

معادله‌هایی که در آن‌ها عبارت‌های گویا وجود داشته باشند، معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

می‌نامند. برای حل این معادله‌ها، ابتدا همه عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله منتقل می‌کنیم،

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ نظیر ای معادله به دست آمده می‌نویسیم}$$

می‌رسیم. از قبل می‌دانیم کسری برابر با صفر است که صورت آن برابر با صفر باشد، در نتیجه معادله $P(x) = 0$ را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده از این معادله نباید مخارج هیچ‌یک از کسرها را صفر کنند (چرا؟) بنابراین از بین جواب‌های به دست آمده آن‌هایی را قبول می‌کنیم که مخارج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکنند و همچنین در شرایط مسأله صدق کنند.

قبل از این که چند معادله شامل عبارت‌های گویا را حل کنیم، بهتر است مخارج مشترک‌گیری کسرها را بیان کنیم. مخارج مشترک بین دو یا چند کسر همان کوچک‌ترین مضرب مشترک بین مخارج آن‌ها است و برای محاسبه ک.م.م. مخارج کسرها، کافی است در صورت امکان مخارج هر کسر را تجزیه کنیم، سپس حاصل ضرب عوامل مشترک با نمای بزرگتر در عوامل غیر مشترک را به دست آوریم.

$$\text{مثال ۱: معادله } \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \text{ را حل کنید.}$$

ابتدا عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله می‌بریم:

$$\frac{x-2}{x-4} - \frac{x+1}{x+3} = 0$$

اکنون مخارج مشترک را محاسبه کرده و عملیات جبری را انجام می‌دهیم.

$$\text{مخرج کسر اول} = (x-4)$$

$$\text{مخرج کسر دوم} = (x+3)$$

$$\text{مخرج‌ها} = (x-4)(x+3) = \text{ک.م.م.}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{(x-2)(x+3) - (x+1)(x-4)}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 6 - x^2 + 3x + 4}{(x-4)(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x - 2}{(x-4)(x+3)} = 0$$

$$P(x) = 0 \text{ ملاحظه می‌کنیم که به معادله ای نظیر } \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ رسیدیم، بنابراین با حل معادله}$$

سعی می‌کنیم جواب‌های معادله را پیدا کنیم.

$$4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

چون $x = \frac{1}{4}$ مخرج کسرهای $\frac{x-2}{x-4}$ و $\frac{x+1}{x+3}$ را صفر نمی‌کند، پس قابل قبول است و $x = \frac{1}{4}$ جواب این معادله است.

مثال ۲: معادله $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$ را حل کنید.

ابتدا عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله می‌بریم، سپس مخرج مشترک را به دست می‌آوریم.

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} - \frac{x-1}{x-2} = 0$$

$$\text{مخرج کسر اول} = x^2-2x = x(x-2)$$

$$\text{مخرج کسر دوم} = x$$

$$\text{مخرج کسر سوم} = x-2$$

$$\text{مخرج‌ها} = \text{ک.م.م.} = x(x-2)$$

بنابراین داریم:

$$\frac{x^2-2x+2-(x-2)(1+x)-x(x-1)}{x(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+4}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow -x^2+4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2, x=-2$$

چون $x=2$ مخرج کسرهای $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}$ ، $\frac{x-1}{x-2}$ را صفر می‌کند، جواب قابل قبول نیست و

فقط $x=-2$ جواب این معادله و قابل قبول است. از آن جا که جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، با قرار دادن $x=-2$ در معادله، به یک رابطه درست به صورت زیر می‌رسیم:

$$\frac{(-2)^2-2(-2)+2}{(-2)^2-2(-2)} - \frac{1+(-2)}{-2} = \frac{-2-1}{-2-2} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید:

$$۱) \frac{2x+4}{x+2} = 1$$

$$۲) \frac{x+5}{3x+15} = \frac{1}{3}$$

$$۳) \frac{۳x-۲}{x} + \frac{۲x+۵}{x+۳} = ۵$$

$$۴) \frac{۲x+۳}{۲x-۲} - \frac{۵}{x^2-1} = \frac{۲x-۳}{۲x+۲}$$

$$۵) \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$$

$$۶) \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = ۳x(1 - \frac{x-1}{x+1})$$

$$۷) \frac{۲x+۳}{x-1} - \frac{۲x-۳}{x+1} = \frac{10}{x^2-1}$$

$$۸) \frac{۳}{۳x^2-۳x-۲۸} = \frac{۵}{۵x^2-x-۲0}$$

۹- به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است.

۱۰- به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t=-3$ است.

نامعادله‌های شامل عبارت‌های گویا

وقتی نوعی دارو در عضله دست راست یک بیمار تزریق می‌شود، غلظت دارو (برحسب میلی گرم در هر میلی لیتر) t ساعت بعد از تزریق در عضله دست چپ، به طور تقریبی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C = \frac{0.12t}{t^2+2}$$

می‌خواهیم بدانیم که چند ساعت بعد از تزریق، غلظت دارو در عضله دست چپ برابر با 0.4 میلی گرم در میلی لیتر یا بیشتر است؟ برای حل این مسئله داریم:

$$C \geq 0.4 \Rightarrow \frac{0.12t}{t^2+2} \geq 0.4$$

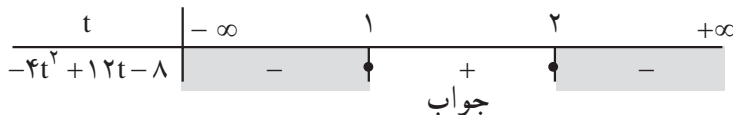
چنانچه دو طرف معادله را در عدد 100 ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{12t}{t^2+2} \geq 4 \Rightarrow \frac{12t}{t^2+2} - 4 \geq 0 \Rightarrow \frac{12t-4t^2-8}{t^2+2} \geq 0$$

اکنون عبارت $P = \frac{-4t^2+12t-8}{t^2+2}$ را تعیین علامت می‌کنیم، چون مخرج کسر همواره

مثبت است یعنی همواره $t^2 + 2 > 0$ ، پس علامت P بستگی به علامت صورت کسر دارد، بنابراین کافی است صورت کسر را تعیین علامت کنیم.

$$-4t^2 + 12t - 8 = 0 \quad -4(t^2 - 3t + 2) = 0 \Rightarrow -4(t-1)(t-2) = 0 \Rightarrow t=1 \text{ یا } t=2$$



با توجه به جدول ملاحظه می‌کنیم، برای این که $C \geq 0.4$ باشد باید $1 \leq t \leq 2$ یعنی در فاصله یک تا دو ساعت بعد از تزریق، غلظت دارو در عضله دست چپ بیمار برابر با 0.4 میلی گرم در هر میلی لیتر یا بیشتر است.

نامعادله‌هایی که در آن‌ها عبارت‌های گویا وجود داشته باشند را نامعادله‌های شامل عبارت‌های گویا می‌نامند. برای حل این نامعادله‌ها، ابتدا همه عبارت‌های جبری را به یک طرف نامعادله منتقل می‌کنیم، سپس با مخرج مشترک‌گیری و ساده کردن عبارت‌های جبری به دست آمده به نامعادله‌هایی

نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ می‌رسیم (که در آن‌ها صورت و مخرج

کسر چندجمله‌ای‌های بر حسب متغیر x هستند)، سپس برای یافتن مجموعه جواب هر یک از نامعادله‌های بالا، برای مثال $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ ، عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را در یک جدول تعیین علامت می‌کنیم و در این حالت قسمت‌هایی از جدول تعیین علامت که به ازای آن‌ها عبارت فوق در آن‌ها مثبت یا صفر هستند، مجموعه جواب نامعادله است.

مثال ۱: نامعادله $\frac{x+2}{2x-1} \leq \frac{1}{x-2}$ را حل کنید.

$$\frac{x+2}{2x-1} - \frac{1}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-2) - (2x-1)}{(2x-1)(x-2)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(2x-1)(x-2)} \leq 0$$

اکنون عبارت $P = \frac{x^2 - 2x - 3}{(2x-1)(x-2)}$ را تعیین علامت می‌کنیم؛ برای این منظور جواب‌های

صورت و مخرج کسر را در صورت وجود محاسبه می‌کنیم:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x=3, x=-1$$

$$(2x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x=2$$

جدول تعیین علامت عبارت P را تشکیل می دهیم :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	+	•	-	-	-	+
$(2x-1)(x-2)$	+	+	•	-	+	+
P	+	•	-	+	-	+

جواب
تعریف نشده
تعریف نشده
جواب

با توجه به جدول ملاحظه می کنیم که عبارت P برای $x \in [-1, \frac{1}{2}) \cup (2, 3]$ دارای علامت

منفی یا صفر است، در نتیجه داریم :

$$\text{مجموعه جواب} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < \frac{1}{2} \text{ یا } 2 < x \leq 3 \right\}$$

مثال ۲: نامعادله $\frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 3x + 2} < 1$ را حل کنید.

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 2 - x^2 + 3x - 2}{x^2 - 3x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{4x - 4}{x^2 - 3x + 2} < 0$$

عبارت $P = \frac{4x - 4}{x^2 - 3x + 2}$ را تعیین علامت می کنیم، برای این منظور جواب های صورت و

مخرج کسر را در صورت وجود پیدا می کنیم :

$$4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 2$$

جدول تعیین علامت عبارت P را تشکیل می دهیم :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$4x - 4$	-	•	+	+
$x^2 - 3x + 2$	+	•	-	+
P	-	•	-	+

جواب
تعریف نشده
تعریف نشده

باید توجه داشت که در عبارت P به ازای $x=1$ مخرج کسر صفر می شود که در این حالت کسر تعریف نشده است. با توجه به جدول ملاحظه می کنیم که عبارت P برای $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$ دارای علامت منفی است، در نتیجه داریم:

$$\{x \in \mathbb{R} | x < 1 \text{ یا } 1 < x < 2\} = \text{مجموعهٔ جواب}$$

تمرین: هریک از نامعادله های زیر را حل کنید.

$$۱) 1 - \frac{1}{x} < x + 1$$

$$۲) \frac{6 - x^2}{x} > 1$$

$$۳) \frac{2x-1}{x} > 1$$

$$۴) \frac{x^2-2}{x} < 1$$

$$۵) \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} \leq 2$$

$$۶) \left| \frac{1-x}{2x-5} \right| > 1$$

$$۷) \frac{1}{2x^2+x+1} \geq \frac{1}{x^2+1}$$

$$۸) 2x - 3 - \frac{1}{x-5} < x - 4 - \frac{1}{x-5}$$

به ازای چه مقادیری از x عبارت های جبری زیر قابل محاسبه اند؟

$$۹) \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$۱۰) \sqrt[4]{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}}$$

$$۱۱) \sqrt{\frac{2x^2+x-6}{3x^2-7x-6}} - 5x\sqrt{16-x^2}$$

۱۲- وقتی یک نوع کالای مرغوب و جدید به بازار می آید، فروش هفتگی آن کالا به طور معمول برای یک دوره زمانی افزایش و سپس کاهش می یابد. فرض کنید بازار فروش S هزار واحد کالا، t هفته بعد از معرفی، از رابطه زیر به دست آید:

$$S = \frac{200t}{t^2 + 100}$$

چه موقع فروش هفتگی کالا ۸ هزار واحد یا بیشتر در هر هفته است؟

محاسبهٔ نسبت های مثلثاتی (α β)

در ریاضی ۲ با نسبت ها و توابع مثلثاتی آشنا شدیم و منحنی نمایش تغییرات بعضی از توابع

مثلثاتی را رسم کردیم. دیدیم اگر α یک زاویه دلخواه باشد، آن گاه :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ و } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ و } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

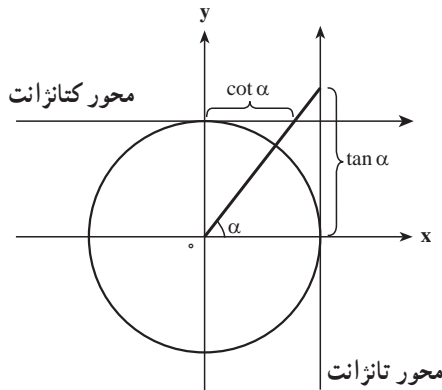
یکی دیگر از نسبت های مهم مثلثاتی، کتانژانت است که به صورت زیر تعریف می شود :

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

از این تعریف می توان نتیجه گرفت که در زاویه هایی که مقدار تانژانت ناصفر است، مقدار کتانژانت قابل تعریف است، از طرفی داریم :

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \Rightarrow \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

از رابطه اخیر نتیجه می شود که تانژانت و کتانژانت قابل تعریف برای یک زاویه، همواره هر دو هم علامت می باشند، در نتیجه علامت کتانژانت در دایره مثلثاتی مانند علامت تانژانت است.



مثال ۱:

$$\text{الف) } \cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ب) } \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

مثال ۲: اگر $\sin^2 \alpha \cot \alpha < 0$ در این صورت انتهای کمان α در کدام ناحیه دایره مثلثاتی

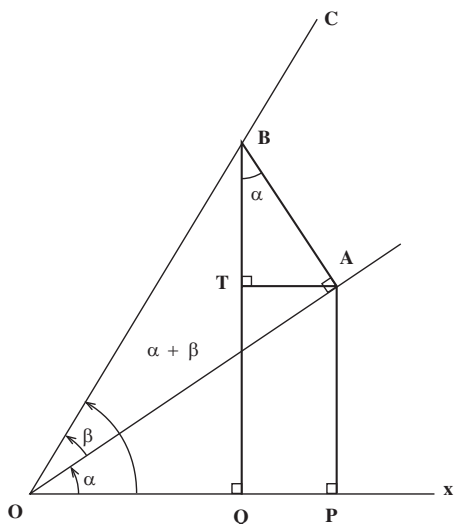
واقع است؟

حل: با توجه به تعریف کتانژانت داریم :

$$\sin^2 \alpha \cot \alpha < 0 \Rightarrow \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} < 0 \Rightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$$

برای این که نابرابری اخیر برقرار باشد، باید $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ دارای علامت‌های متفاوت باشند، در نتیجه انتهای کمان α ، در ربع دوم $(\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0)$ یا در ربع چهارم $(\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0)$ واقع است.

محاسبه برخی نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha + \beta)$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α و β



فرض کنید نیم خط OA با محور OX زاویه α و با زاویه β بسازد. از A بر OA عمودی خارج می‌کنیم تا OC را در نقطه B قطع کند. از A عمود AP و از B عمود BQ را بر OX رسم می‌کنیم و نیز از A عمود AT را بر BQ فرود می‌آوریم. زاویه ABT برابر α است و داریم:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BT} + \overline{TQ}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BT} + \overline{AP}}{\overline{OB}} \\ &= \frac{\overline{BA} \cos \alpha}{\overline{OB}} - \frac{\overline{OA} \sin \alpha}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{OB}} \cos \alpha - \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \sin \alpha \\ &= \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} \quad (1)$$

با قرار دادن $\alpha + \beta$ نتیجه زیر نیز به دست می‌آید:

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (2)$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \quad (3)$$

با قرار دادن $\alpha \neq \beta$ نتیجه زیر نیز حاصل می‌شود :

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \quad (4)$$

اگر در رابطه (4) به جای $\sin^2 \alpha$ قرار دهیم $1 - \cos^2 \alpha$ ؛ خواهیم داشت :

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

در نتیجه :

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha + 1 \quad (5)$$

و اگر در رابطه (4) به جای $\cos^2 \alpha$ قرار دهیم $1 - \sin^2 \alpha$ ؛ خواهیم داشت :

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1 + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1 + 2 \sin^2 \alpha$$

در نتیجه :

$$\cos^2 \alpha - 1 + 2 \sin^2 \alpha \quad (6)$$

مثال ۱: عبارت مثلثاتی $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$ را ساده کنید.

حل:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + (2 \cos^2 \alpha - 1)} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

چنانچه در رابطه‌های (۱) و (۳) $-\beta$ را جایگزین β کنیم، فرمول‌های زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

با فرض این که $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$ ، از تعریف تانژانت داریم :

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

چنانچه $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$ ، با تقسیم صورت و مخرج کسر سمت راست بر $\cos \alpha \cos \beta$ خواهیم داشت :

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

بنابراین :

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

با قرار دادن $\alpha \pm \beta$ نتیجه زیر به دست می آید :

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

مثال ۲:

الف) $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

ب) $\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

ج) $\tan 75^\circ = \tan(30^\circ + 45^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

د) $\cot 75^\circ = \frac{1}{\tan 75^\circ} = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 3}$

هـ) $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

مثال ۳: درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin(x - \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0$

حل:

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ تساوی} &= (\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6}) + (\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ تساوی} &= \sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ &= \sin a \cos b + \sin a \cos b = 2 \sin a \cos b \end{aligned}$$

$$\text{ج) } \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$$

حل:

$$\begin{aligned} \cos^4 x - \sin^4 x &= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= (\cos 2x) \times 1 = \cos 2x \end{aligned}$$

مثال ۴: فرض کنید $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ و $\tan \beta = \frac{3}{4}$ در زاویه‌های α و β حاده باشند، عبارت‌های

زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \sin(\alpha + \beta) \quad \text{ب) } \cos 2\beta \quad \text{ج) } \tan 2\alpha$$

حل: الف) برای محاسبه $\sin(\alpha + \beta)$ نیاز به نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس برای زاویه‌های حاده α و β داریم:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$$

چون α زاویه‌ای حاده است، پس انتهای کمان α در ربع اول دایره مثلثاتی است، پس $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ در نتیجه $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + \tan^2 \beta = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{16}{25} \xRightarrow{\beta \text{ حاده}} \cos \beta = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{9}{25} \xRightarrow{\beta \text{ حاده}} \sin \beta = \frac{3}{5}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} + \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} = \frac{56}{65}$$

$$\cos^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} \quad (\text{ب})$$

$$\tan^2 \theta = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (\text{ج})$$

از آن جا که $\sin \theta = \frac{5}{13}$ و $\cos \theta = \frac{12}{13}$ ، خواهیم داشت :

$$\tan \theta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{12}$$

در نتیجه :

$$\tan^2 \theta = \frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\frac{10}{12}}{\frac{119}{144}} = \frac{120}{119} = \frac{120}{119}$$

تمرین

۱- نسبت های مثلثاتی زوایای 15° و $22/5^\circ$ را محاسبه کنید.

۲- فرض کنید $\tan \theta = \frac{3}{4}$ و $\tan \beta = \frac{5}{12}$ و α و β حاده باشند، عبارت های زیر را محاسبه کنید.

$$\sin(\alpha - \beta), \cos(\alpha - \beta), \tan(\alpha - \beta)$$

۳- فرض کنید $\sin \theta = \frac{4}{5}$ و $\sin \beta = \frac{15}{17}$ و α حاده و β منفرجه باشد، عبارت های زیر را محاسبه کنید.

$$\sin(\alpha - \beta), \cos(\alpha - \beta), \cot(\alpha - \beta)$$

$$\sin^2 \alpha, \cos^2 \alpha, \tan^2 \beta$$

۴- عبارت های زیر را ساده کنید.

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}), \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}), \tan(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})$$

۵- درستی برابری های زیر را ثابت کنید.

$$\text{الف) } \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = -\cos x$$

$$\text{ب) } \cos(\frac{\pi}{4} + \theta) = -\sin \theta$$

$$\text{ج) } \cos(\alpha \pm \beta) - \cos(\alpha \mp \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\text{د) } \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = \sin x$$

$$\text{هـ) } \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{و) } \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\text{ز) } 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{ح) } \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{ط) } \frac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \sin 2\alpha$$

$$\text{ی) } \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$$

$$\text{ک) } \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2 \cot x$$

تابع

تاریخچه تابع

برای نخستین بار مفهوم تابع با عنوان «مقدار متغیر» در قرن هفدهم میلادی در کارهای رنه دکارت (۱۶۵۰-۱۶۵۹م) ریاضیدان فرانسوی و در نوشته‌های هندسی پدید آمد. دکارت در کتاب هندسه خود مفهوم تابع را به عنوان «تغییر عرض در نتیجه تغییر طول» بررسی می‌کند. در قرن هجدهم یوهان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸) دیدگاه جدید و به اصطلاح تحلیلی را نسبت به تابع مطرح می‌کند، او می‌گوید:

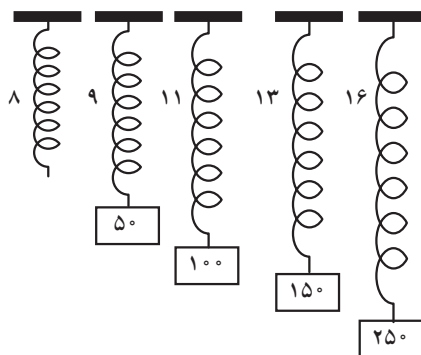
«تابع به عنوان دستوری است که مقدار یک متغیر را با مقدار متغیر دیگر در نظر می‌گیرد.»

در سال ۱۷۴۸ لئونارد اولر (۱۷۸۳-۱۷۰۷م) شاگرد یوهان برنولی نماد f را برای تابع در نظر گرفت و آن را از دیدگاه تحلیلی به این صورت مطرح می‌کند:

«تابع یک متغیر، عبارت است از یک عبارت تحلیلی که به نحوی از این مقدار متغیر و از عددها یا مقدارهای ثابت تشکیل شده است.» بالاخره، پس از طی دو قرن یوهان پیتر گوستاو لوژن دیریکله (۱۸۵۹-۱۸۰۵م) ریاضی دان آلمانی در اواسط قرن نوزدهم، تعریف امروزی تابع را به صورتی روشن بیان می کند :

« y تابعی از متغیر x در بازه $a \leq x \leq b$ است، به شرطی که برای هر مقدار x از این بازه، مقدار مشخص و منحصر به فردی مانند y متناظر با آن وجود داشته باشد.»

همان طور که می دانید تابع عملی است که روی عناصر یک مجموعه عمل می کند و عنصری در یک مجموعه را نظیر می سازد. به عنوان مثال (۱) به شکل و جدول زیر توجه کنید.



وزن (P)	۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰
طول (l)	۸	۹	۱۱	۱۳	۱۶

این جدول اندازه طول یک فنر را، که تابعی است از مقدار وزنی که به آن آویخته شده است، نشان می دهد (وزن بر حسب گرم و طول بر حسب سانتی متر). وزن را با p و طول را با l مشخص می کنیم. مثلاً اگر $p = ۱۰۰$ گرم باشد $l = ۱۱$ سانتی متر است. به طوری که دیده می شود به هر p تنها یک l وابسته می گردد. بدین ترتیب جدول بالا رابطه میان دو کمیت p و l را به صورت یک عمل نظیر سازی که به اعداد سطر بالا اعداد سطر پایین نظیر می شوند، نشان می دهد.

مجموعه عناصری که یک تابع روی آن ها عمل می کند، دامنه تابع نام دارد. در این مثال دامنه تابع بازه $[۰, M]$ است که M حداکثر وزنی است که می توان به آن فنر آویزان نمود تا فنر پاره نشود.

مثال ۲: تابع $f(x) = ۳x - ۱$ را با دامنه $\left\{-۱, -\frac{۱}{۳}, ۰, \frac{۱}{۳}, ۱, ۲\right\}$ در نظر بگیرید. توجه کنید که

در ارائه هر تابعی، دامنه آن نیز باید ارائه شود. می‌خواهیم f را به وسیله جدول و هم چنین به صورت مجموعه زوج‌های مرتب نمایش دهیم.

حل: مقادیر $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(-1) = 3(-1) - 1 = -3 - 1 = -4$$

$$f(-\frac{1}{3}) = 3(-\frac{1}{3}) - 1 = -1 - 1 = -2$$

$$f(0) = 3(0) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$f(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3}) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f(1) = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f(2) = 3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$$

جدول زیر مقادیر $f(x)$ متناظر با مقادیر x را نشان می‌دهد:

x	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	2
$y = f(x)$	-4	-2	-1	0	2	5

اکنون برای مشخص کردن تابع به صورت زوج‌های مرتب، مجموعه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$f = \{(x, f(x)) | x \in D_f\}$$

$$f = \{(-1, -4) \text{ و } (-\frac{1}{3}, -2) \text{ و } (0, -1) \text{ و } (\frac{1}{3}, 0) \text{ و } (1, 2) \text{ و } (2, 5)\}$$

مثال ۳: تابع $f(x) = 2x + 3$ را با دامنه $\{-2, -1, 0, 1\}$ در نظر می‌گیریم. f را به وسیله زوج‌های

مرتب و نمودار نمایش دهید.

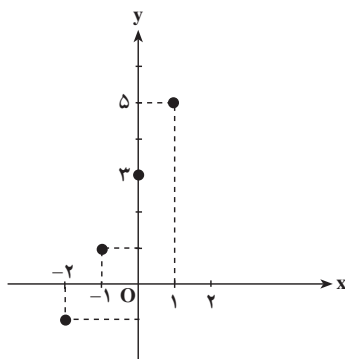
حل: داریم:

$$f(-2) = -4 + 3 = -1$$

$$f(-1) = -2 + 3 = 1$$

$$f(0) = 0 + 3 = 3$$

$$f(1) = 2 + 3 = 5$$



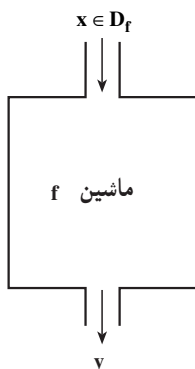
$$f = \{(-2, -1) \text{ و } (-1, 1) \text{ و } (0, 3) \text{ و } (1, 5)\}$$

به طوری که در مثال‌های قبل دیده می‌شود، $f(x)$ علاوه بر این که مقدار تابع f را معین می‌کند، قانون این تابع را نیز مشخص می‌نماید و به هر عضو از دامنه تابع تنها یک عضو از بُرد را نسبت می‌دهد. اگر تابع f به عضوی از دامنه، مانند x ؛ عنصر y از بُرد تابع را نسبت دهد، می‌نویسیم:

$$y = f(x)$$

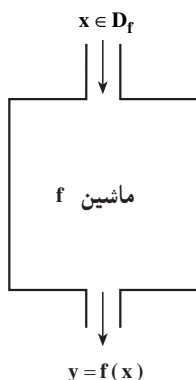
در این کتاب، دامنه و برد تابع‌هایی که با آن‌ها سروکار داریم مجموعه اعداد حقیقی یا بخشی از اعداد حقیقی است. تابع f را که دامنه و بردش اعداد حقیقی باشد یعنی $D_f \subseteq \mathbb{R}$ و $R_f \subseteq \mathbb{R}$ تابع حقیقی با مقادیر حقیقی می‌نامند. اگر دامنه یک تابع مانند f مجموعه A و مقادیر تابع اعداد حقیقی باشند می‌نویسیم:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$



تابع به عنوان ماشین

در ابتدای این بخش، تاریخ پیدایش و تکمیل مفهوم و تعریف امروزی تابع بیان شد، با کمی دقت در آن، مشخص می‌شود که تصور ذهنی مشترک همه ریاضیدان‌ها از تعریف تابع این است که تابع مانند یک ماشین عمل می‌کند، به طوری که x از دامنه تابع را در ورودی ماشین می‌گیرد و تنها یک مقدار y را در خروجی ظاهر می‌کند، پس می‌توان مدل مقابل را برای تابع در نظر گرفت:



چون ماشین f روی x عملی را انجام می‌دهد، می‌توان حاصل آن عمل روی x را با $f(x)$ نمایش داد، بنابراین در خروجی ماشین می‌توان به جای y از $f(x)$ استفاده کرد.

مقادیر x که متعلق به دامنه تابع هستند، از طریق ورودی به ماشین راه پیدا می‌کنند، سپس درون ماشین f طبق دستور یا قاعده‌ای که از قبل مشخص شده است، مقدار منحصر به فرد $y = f(x)$ ساخته می‌شود.

باید توجه داشت که معمولاً از x برای نشان دادن متغیر، از f برای نشان دادن تابع و از y یا $f(x)$ برای نشان دادن مقدار تابع استفاده می‌کنیم.

اکنون می‌توان مثال صفحه ۳۹ را که درباره طول فنر و وزنه آویخته شده به آن است را با توجه

به آنچه که دیدیم، با نمادهای :

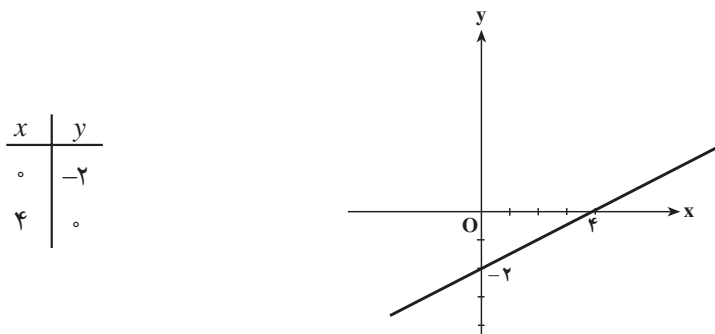
$$\begin{cases} f: D_f \rightarrow \mathbb{R} \\ p \mapsto f(p) \quad \text{یا} \quad f = \{(p, f(p)) | p \in D_f\} \end{cases}$$

نیز نشان داد. بنابراین تابع f را به وسیله جدول، نمودار یا یکی از شکل‌های بالا می‌توان نمایش داد. آشکار است که تعریف f به هر صورت که باشد به هر p تنها یک l وابسته می‌کند. مثلاً همه نمادهایی که برای تعریف تابع به کار برده‌ایم به $p=15^\circ$ تنها مقدار $l=13$ را نسبت می‌دهند.

از آنجا که تابع $f: x \mapsto y$ و مجموعه زوج‌های مرتب که f را مشخص می‌کند، و مقدار تابع یعنی $f(x)$ و معادله $y = f(x)$ ، همگی به‌طور یکسان بستگی میان x و y را معین می‌کنند، پس از این، متناسب با موقعیت، ما از $f(x)$ و $y = f(x)$ نیز به‌عنوان تابع نام می‌گیریم^۱. اما گاهی بیان یک تابع به‌صورت یک قانون $f(x)$ مشکل و یا عملاً غیرممکن است، که در این صورت برای تجسم تابع از جدول و نمودار استفاده می‌شود.

مثال ۴: تابع حقیقی $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$ را با دامنه \mathbb{R} در نظر می‌گیریم. داریم و $f(0) = -2$

$f(4) = 0$ و نمودار آن خط گذرنده بر دو نقطه $(0, -2)$ و $(4, 0)$ است.



نکته: هر نقطه که مختصاتش در معادله $y = f(x)$ صدق کند بر نمودار تابع f قرار دارد؛ و برعکس، اگر نقطه‌ای بر نمودار تابع f واقع باشد مختصاتش در معادله بالا صدق خواهد کرد. البته اگر دامنه تابع را یک بازه، مثلاً $[0, 4]$ در نظر بگیریم، نمودار تابع فقط پاره‌خطی خواهد بود که بین دو نقطه $(0, -2)$ و $(4, 0)$ رسم می‌شود.

۱- تعریف تابع به وسیله مجموعه زوج‌های مرتب و با استفاده از مفاهیم مجموعه‌ها روشن‌تر و دقیق‌تر و از نظر صوری نیز جالب است. اما چنین تعریفی نه صورت شهودی دارد و نه از توصیفی برخوردار است، و به‌کاربردن آن در بسیاری از موارد غیرعملی است.

مثال ۵: تابع $f(x) = 2x + 1$ با دامنه $[-1, 1]$ داده شده است. کدام یک از نقاط زیر متعلق به نمودار آن می‌باشند؟

$$A(2, 5) \text{ و } B(0, 1) \text{ و } C(-\frac{1}{2}, 0) \text{ و } D(-1, -1) \text{ و } E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

حل: داریم:

$$A(2, 5): 2 \notin D_f \quad : \quad A \notin (f) \text{ (نمودار)}$$

$$B(0, 1): f(0) = 2(0) + 1 = 1 \quad : \quad B \in (f) \text{ (نمودار)}$$

$$C(-\frac{1}{2}, 0): f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2}) + 1 = 0 \quad : \quad C \in (f) \text{ (نمودار)}$$

$$D(-1, -1): f(-1) = 2(-1) + 1 = -1 \quad : \quad D \in (f) \text{ (نمودار)}$$

$$E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}): f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}) + 1 = 2 \quad : \quad E \notin (f) \text{ (نمودار)}$$

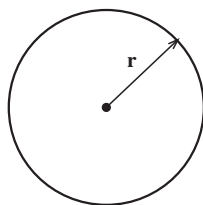
مثال ۶: تابع خطی $f(x) = ax + b$ با دامنه \mathbb{R} را به گونه‌ای مشخص نمایید که $f(1) = 3$ و $f(-1) = 1$.

حل: داریم:

$$\begin{aligned} f(1) &= a(1) + b = a + b \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = 1 \end{cases} \\ f(-1) &= a(-1) + b = -a + b \Rightarrow \\ \hline 2b &= 4 \Rightarrow b = 2, a = 1 \\ f(x) &= x + 2 \end{aligned}$$

مثال ۷: مساحت (A) دایره‌ای به شعاع r (شکل ۱) از دستور زیر به دست می‌آید:

$$A = \pi r^2 \quad (\pi \simeq 3/1416)$$



شکل ۱

به‌طور معمول این فرمول را با نماد تابعی به صورت $A(r) = \pi r^2$ می‌نویسیم تا مشخص شود، مساحت دایره A، وابسته به شعاع دایره r است. هرچه شعاع بزرگتر شود، مساحت بزرگتر می‌شود. دامنه این تابع بازه $(0, +\infty)$ است.