

فصل اول

پدیده‌های تصادفی و احتمال

در اطراف ما پدیده‌هایی رخ می‌دهند که ما قبل از وقوع یا رخداد این پدیده‌ها، تمام حالت‌های ممکن در رخداد آن‌ها را می‌شناسیم، اما از این که کدام یک از حالت‌های ممکن به‌طور قطع رخ خواهد داد، اطلاع دقیقی نداریم و فقط براساس اطلاعات و گاهی وقت‌ها بنابر تجربه‌ای که داریم، می‌توانیم پیش‌بینی کنیم یا حدس بزنیم که کدام یک از حالت‌های ممکن، امکان بیشتری برای به وقوع پیوستن داشته و کدام یک شانس کمتری دارند.

فرض کنید، مطالعات ژنتیکی در نژاد خاصی از مردم آسیا نشان داده است که ۸۵٪ زن‌های تعیین‌کننده رنگ چشم آن‌ها از نوع زن‌های غالب (تیره) هستند، اگر ۲ نفر از افراد متعلق به این نژاد با هم ازدواج کنند، چقدر احتمال دارد رنگ چشم فرزند آن‌ها روشن باشد؟ اگر بدانیم رنگ چشم فرزند اول آن‌ها روشن است، چقدر احتمال دارد رنگ چشم فرزند دوم این خانواده تیره باشد؟ البته با توجه به اطلاعات موجود و مطالعات انجام شده، شما حدس می‌زنید که بچه به دنیا آمده در این خانواده دارای چشم‌هایی به رنگ تیره باشد. آیا امکان روشن بودن چشم این بچه هم وجود دارد؟ آیا روشن بودن رنگ چشم بچه اول روی روشن یا تیره بودن رنگ چشم فرزند دوم در این خانواده تأثیر دارد؟

پدیده‌های تصادفی

به دنیا آمدن یک نوزاد پدیده‌ای است که ما قبل از وقوع، دو حالت ممکن برای آن می‌شناسیم، (پسر یا دختر) اما قبل از تولد نمی‌توانیم با قطعیت پسر یا دختر بودن نوزاد را تعیین کنیم. وقتی یک مکعب را که روی شش وجه آن اعداد ۱ تا ۶ حک شده است (چنین مکعبی را تاس می‌نامیم) به هوا پرتاب می‌کنیم، قبل از این که به زمین بیافتد و از حرکت بایستد نمی‌توانیم با قطعیت عدد رو شده را تعیین کنیم. به چنین پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که، «از همه حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن‌ها مطلع باشیم اما از این که کدام حالت، قطعاً رخ خواهد داد اطمینان نداشته باشیم» یک پدیده تصادفی می‌گوییم.

فضای نمونه‌ای

اگر یک پدیده تصادفی داشته باشیم، «مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن این پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای می‌نامیم.» فضای نمونه‌ای را معمولاً با S نمایش می‌دهند، اگر اعضای S قابل شمارش باشد آن را یک فضای نمونه‌ای گسسته می‌نامیم.

در جدول زیر تعدادی پدیده تصادفی و فضای نمونه‌ای مربوط به هر کدام و تعداد اعضای هر فضای نمونه‌ای مشخص شده است که توجه به این جدول، به خصوص محاسبه تعداد اعضای هر فضای نمونه‌ای بسیار مهم می‌باشد.

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای: $n(S)$	فضای نمونه‌ای: S	پدیده تصادفی
$n(S) = 2$	$S = \{\text{رو و پشت}\}$	انداختن یک سکه
$n(S) = 6$	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	انداختن یک تاس
$n(S) = 2 \times 2 = 4$	$S = \{(d, d), (d, p), (p, d), (p, p)\}$	تولد دو فرزند در یک خانواده
$n(S) = 3! = 6$	$S = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$	کنار هم قرار گرفتن حروف a و b و c به طور تصادفی
$n(S) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$	$S = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$	انتخاب تصادفی دو حرف از بین حروف d, c, b, a (بدون در نظر گرفتن ترتیب)
$n(S) = \binom{4}{2} = 6$	$S = \{\bar{A}_1\bar{A}_2, \bar{A}_1\bar{A}_2Q, \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{Q}, \bar{A}_1Q\bar{A}_2, \bar{A}_1Q\bar{Q}, \bar{A}_1\bar{Q}Q, A_1\bar{A}_2, A_1\bar{A}_2Q, A_1\bar{A}_2\bar{Q}, A_1Q\bar{A}_2, A_1Q\bar{Q}, A_1\bar{Q}Q\}$	انتخاب تصادفی ۲ مهره از جعبه‌ای که در آن ۲ مهره قرمز و ۲ مهره آبی وجود دارد.
$n(S) = P(4, 2) = \frac{4!}{2!} = 12$	$S = \{12, 21, 14, 41, 16, 61, 24, 42, 26, 62, 46, 64\}$	انتخاب تصادفی ۲ رقم از بین ارقام $1, 2, 4, 6$ و ساختن عدد ۲ رقمی
$n(S) = n(S_1) \times n(S_2) = 6 \times 6 = 36$ S_1 فضای نمونه‌ای تاس آبی و S_2 فضای نمونه‌ای تاس قرمز است	$S = \{(1, 1), \dots, (1, 6), \dots, (6, 6)\}$	انداختن دو تاس با هم و یا انداختن ۱ تاس دو بار (تاس آبی و تاس قرمز)

پیشامد تصادفی

اگر یک پدیده تصادفی رخ دهد و S فضای نمونه‌ای این پدیده یا آزمایش تصادفی باشد «هر زیرمجموعه S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.» به عنوان مثال وقتی یک سکه را می‌اندازیم، فضای نمونه‌ای به صورت $\{ر, پ\}$ تعریف می‌شود، مجموعه S دارای $2 = 4$

زیرمجموعه است که طبق تعریف فوق هر کدام از زیرمجموعه‌های S یعنی هریک از مجموعه‌های $A_1 = \{پ\}$ و $A_2 = \{ر\}$ و $A_3 = \{پ, ر\}$ و $A_4 = \{پ, ر, ب\}$ یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه‌ای $S = \{پ, ر, ب\}$ می‌باشد.

پیشامد $A_3 = \emptyset$ را پیشامد نشدنی و پیشامد $A_4 = S$ را پیشامد حتمی می‌نامیم. هر زیرمجموعه فضای نمونه‌ای S مانند A را یک پیشامد تصادفی نامیدیم و «اگر A یک پیشامد تصادفی باشد و نتیجه آزمایش عضوی از A باشد، می‌گوییم A رخ داده است». قبل از ورود به بحث احتمال به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱: خانواده‌ای دارای سه فرزند است اگر پیشامد A ، هم جنس بودن دو فرزند اول و پیشامد B وجود یک فرزند پسر در این خانواده باشد، A و B را مشخص کنید.

حل: فضای نمونه‌ای این پدیده $2 \times 2 \times 2 = 8$ عضو دارد و پیشامدهای A و B از این فضای نمونه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A = \{(پ, د, د), (د, د, د), (د, پ, پ), (پ, پ, پ)\}$$

$$B = \{(پ, د, د), (د, پ, د), (د, د, پ)\}$$

مثال ۲: یک تاس و یک سکه را با هم می‌اندازیم و پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که تاس عدد زوج و سکه «رو» بیاید و پیشامد B را به این صورت تعریف می‌کنیم که سکه «پشت» و تاس عدد کمتر از ۴ باشد، A و B را مشخص کنید.

حل: می‌دانیم فضای نمونه‌ای این مثال دارای $12 = 2 \times 6$ عضو است و داریم:

$$A = \{(۲, رو), (۴, رو), (۶, رو)\}$$

$$B = \{(۱, پشت), (۲, پشت), (۳, پشت)\}$$

مثال ۳: دو تاس را با هم می‌اندازیم و پیشامدهای A و B را به ترتیب «مجموع اعداد دو تاس برابر ۷» و «عدد رو شده حداقل یک تاس برابر ۶» تعریف می‌کنیم، پیشامدهای A و B را معلوم کنید.

حل: فضای نمونه‌ای انداختن دو تاس دارای $36 = 6 \times 6$ عضو است و داریم:

$$A = \{(۱, ۶), (۶, ۱), (۲, ۵), (۵, ۲), (۳, ۴), (۴, ۳)\} \rightarrow n(A) = 6$$

$$B = \{(۱, ۶), (۲, ۶), \dots, (۵, ۶), (۶, ۱), (۶, ۲), \dots, (۶, ۵), (۶, ۶)\} \rightarrow n(A) = ۱۱$$

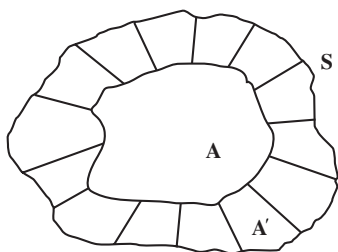
اعمال روی پیشامدها

دیدیم که پیشامدهای یک فضای نمونه‌ای زیرمجموعه‌هایی مانند A و B و C و ... از آن فضا

هستند و بنابراین اعمالی چون اجتماع (\cup)، اشتراک (\cap) یا تفاضل ($-$) بین مجموعه‌ها و نیز متمم یک مجموعه مانند A یعنی A' در پیشامدها نیز قابل تعریف و تعبیر است که به ذکر آن‌ها می‌پردازیم:

متمم یک پیشامد: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی و $A \subseteq S$ پیشامدی در این فضای نمونه‌ای باشد، متمم پیشامد A را با A' نمایش می‌دهیم و تعبیر آن چنین است که «پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.»

در واقع دو پیشامد A و A' کل فضای نمونه‌ای S را تشکیل می‌دهند. به شکل زیر توجه کنید.



تذکر: با توجه به تعریف متمم یک پیشامد

نتایج زیر حاصل می‌شوند:

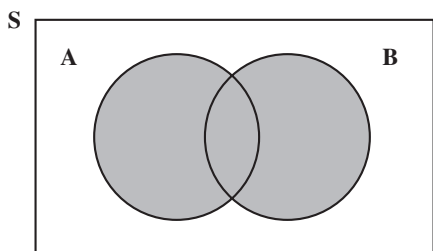
$$A \cup A' = S \text{ (الف)}$$

$$A \cap A' = \emptyset \text{ (ب)}$$

$$n(A') = n(S) - n(A) \text{ (ج)}$$

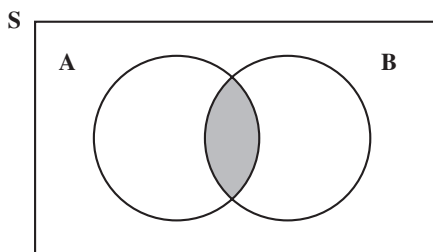
اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد

از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهند. در شکل مقابل پیشامد $A \cup B$ مشخص شده است.



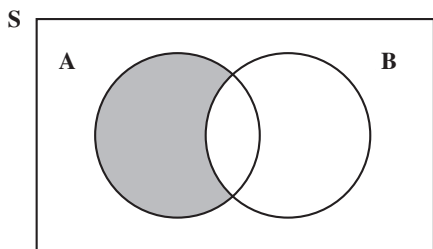
اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد

از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند. در شکل مقابل پیشامد $A \cap B$ مشخص شده است.



تفاضل دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد

در فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A - B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. در شکل مقابل پیشامد $A - B$ مشخص شده است.



پیشامدهای ناسازگار: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت آن‌ها را دو پیشامد ناسازگار می‌نامیم. در واقع اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند با هم رخ نمی‌دهند.

مثال: دو تاس را با هم می‌اندازیم (یا تاسی را دو بار می‌اندازیم) و پیشامدهای A و B و C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

پیشامد آن که عدد رو شده تاس اول ۴ باشد $A =$

پیشامد آن که مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد $B =$

پیشامد آن که اعداد رو شده متمایز باشند $C =$

هر یک از پیشامدهای $A \cup B$ و $A \cap B$ و C' و $A - B$ و $A - C$ را مشخص کنید.

حل: ابتدا مجموعه‌های A و B و C را مشخص می‌کنیم.

$$A = \{(4,1), (4,2), \dots, (4,6)\} \rightarrow n(A) = 6$$

$$B = \{(1,6), (6,1), (5,2), (2,5), (3,4), (4,3)\} \rightarrow n(B) = 6$$

$$C = \{(2,1), (1,2), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), \dots, (5,6), (6,5)\} \rightarrow n(C) = 30$$

پیشامد آن که اعداد رو شده دو تاس با هم برابر باشند $C' =$

$$C' = \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$$

$$A \cup B = \{(1,6), (6,1), (5,2), (2,5), (3,4), (4,3), (4,1), (4,2), (4,4), (4,5), (4,6)\}$$

$A \cup B$ یعنی عدد رو شده تاس اول ۴ یا مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد)

$$A \cap B = \{(4,3)\}$$

$A \cap B$ یعنی عدد رو شده تاس اول ۴ و مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد)

$$A - B = \{(4,1), (4,2), (4,4), (4,5), (4,6)\}$$

$A - B$ یعنی عدد رو شده تاس اول ۴ باشد و مجموع اعداد دو تاس ۷ نباشد)

$$A - C = A \cap C' = \{(4,4)\}$$

$A - C$ یعنی عدد رو شده تاس اول ۴ باشد و اعداد دو تاس متمایز نباشند)

حالا می‌خواهیم امکان به وقوع پیوستن هر پیشامد تصادفی مانند A در یک فضای نمونه‌ای

چون S را اندازه‌گیری کنیم یا اصطلاحاً احتمال وقوع هر پیشامد را محاسبه کنیم.

فرض کنید در یک جعبه ۴ مهره قرمز و ۲ مهره آبی (۴ مهره قرمز با شماره‌های ۱ تا ۴ و ۲ مهره

آبی با شماره‌های ۱ و ۲) موجود است. اگر به تصادف ۱ مهره از این جعبه خارج کنیم با توجه به این که مهره‌های قرمز در جعبه بیشتر از مهره‌های آبی هستند، واضح است که شانس خارج شدن مهره قرمز از شانس خارج شدن مهره آبی بیشتر باشد، حال اگر A را پیشامد خارج شدن مهره قرمز و B را پیشامد خارج شدن مهره آبی تعریف کنیم و کسر حاصل از تقسیم تعداد مهره‌های آبی به تعداد کل مهره‌ها را P(A) و کسر حاصل از تقسیم مهره‌های قرمز به تعداد کل مهره‌های جعبه را P(B) بنامیم، خواهیم داشت :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $P(A) = 2P(B)$ و این که شانس رخداد پیشامد A دو برابر شانس رخداد پیشامد B باشد، با توجه به دو برابر بودن تعداد مهره‌های قرمز نسبت به مهره‌های آبی از قبل پیش‌بینی می‌شد، یعنی تقسیم تعداد حالت‌های مطلوب بر تعداد کل حالت‌های ممکن $\left(\frac{n(A)}{n(S)}\right)$ عددی را به دست می‌دهد که با انتظار و توقع ما مطابقت دارد و همین فرمول $\left(P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}\right)$ در فضاهای قابل شمارش^۱ به عنوان فرمول احتمال به کار می‌رود.

احتمال رخداد پیشامد A

احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با P(A) نشان می‌دهیم و برای محاسبه P(A) کافی است تعداد اعضای A یعنی n(A) را بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای یعنی n(S) تقسیم کنیم. عدد حاصل یعنی P(A) عددی حقیقی است که شانس رخداد پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کند.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$$

از آن جا که A پیشامدی در فضای S است، طبق تعریف داریم :

$$A \subseteq S \Rightarrow 0 \leq n(A) \leq n(S)$$

اگر طرفین نامساوی‌های اخیر را n(S) تقسیم کنیم خواهیم داشت،

$$\frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

۱- فضای قابل شمارش به فضا یا مجموعه‌ای گفته می‌شود که تعداد اعضای آن را با شمارش به دست می‌آوریم.

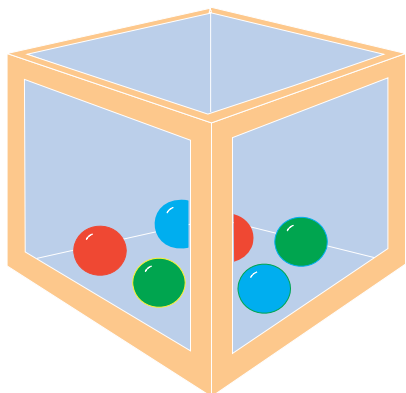
هم چنین با توجه به تعریف احتمال داریم :

$$P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

توجه دارید که هر چقدر تعداد اعضای A بیشتر باشد، کسر $\frac{n(A)}{n(S)}$ بزرگتر و به عدد یک نزدیک تر بوده و اصطلاحاً می‌گوییم احتمال رخداد پیشامد A بیشتر است.

تمرین



فرض کنید در یک جعبه ۱۲ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و ۲ مهره سبز وجود داشته باشد. اگر از این جعبه ۱ مهره به تصادف خارج کنیم، احتمال آبی بودن، قرمز بودن و سبز بودن مهره خارج شده را محاسبه کرده و اعداد حاصل را با حدسی که قبل از محاسبه این احتمالات، زده بودید، مقایسه کنید.

قانون جمع احتمالات

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند داریم :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

که تساوی فوق از تقسیم طرفین تساوی $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (که به اصل شمول معروف است)، بر $n(S)$ به دست می‌آید، و به آن قانون جمع احتمالات گفته می‌شود.
احتمال پیشامد متمم: اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S و A' متمم آن باشد، در این صورت :

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') - P(A \cap A')$$

$$\Rightarrow P(S) = P(A) + P(A') - P(\emptyset)$$

$$\Rightarrow 1 = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A) = 1 - P(A')$$

احتمال پیشامدهای ناسازگار

قبلاً گفتیم که اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت A و B را دو پیشامد ناسازگار و اگر $A \cap B \neq \emptyset$ ، آن‌ها را سازگار می‌نامیم، به نکته زیر توجه کنید. نکته: با توجه به قانون جمع احتمالات، اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، چون $A \cap B = \emptyset$ و $P(\emptyset) = 0$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

در حالت کلی‌تر، اگر A_1, A_2, \dots, A_n پیشامدهایی دو به دو ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند نیز داریم:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

مثال ۱: وقتی تاسی را می‌اندازیم، اگر پیشامد A را «رو شدن عدد زوج» و پیشامد B را «رو شدن عدد فرد» و C را پیشامد «رو شدن عدد اول» تعریف کنیم، یعنی $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ و $C = \{2, 3, 5\}$ در این صورت A و B ناسازگارند ولی A و C سازگار و B و C نیز سازگارند.



مثال ۲: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان این خانواده را مشخص کرده و احتمال آن را محاسبه کنید که: الف) حداقل ۲ فرزند این خانواده دختر باشند. ب) فقط ۱ فرزند در این خانواده پسر باشد.

حل: فضای نمونه‌ای به صورت زیر است:

$$S = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (د, پ, پ), (پ, د, د), (پ, د, پ), (پ, پ, د), (پ, پ, پ)\}$$

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

الف) اگر A را پیشامد «حداقل ۲ فرزند دختر» تعریف کنیم (یا دو دختر یا هر سه دختر) در

$$S = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د)\} \quad \text{این صورت:}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ب) اگر C را پیشامد «فقط ۱ پسر» تعریف کنیم، در این صورت :

$$C = \{(پ,د,د), (د,پ,د), (د,د,پ)\} \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

مثال ۳: از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ۲ مهره زرد می‌باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که :

الف) هر سه سبز باشند ب) هر سه هم‌رنگ باشند ج) فقط ۲ مهره آبی باشد د) حداقل ۱ مهره آبی باشد ه) حداکثر ۲ مهره سبز باشد.

حل: فضای نمونه‌ای این پدیده تصادفی مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۱۱ مهره موجود در جعبه است که تعداد اعضای آن برابر است با :

$$n(S) = \binom{11}{3} = \frac{11!}{(11-3)! \times 3!} = 165$$

$$\text{الف) } A : \text{پیشامد هر سه سبز} \Rightarrow n(A) = \binom{5}{3} = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{10}{165} = \frac{2}{33}$$

ب) B: پیشامد هر سه هم‌رنگ (یا هر سه سبز یا هر سه آبی)

$$\Rightarrow n(B) = \binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 14 \Rightarrow P(B) = \frac{14}{165}$$

ج) C: پیشامد فقط ۲ مهره آبی (۲ مهره آبی و ۱ مهره غیرآبی)

$$\Rightarrow n(C) = \binom{4}{2} \times \binom{7}{1} = 42 \Rightarrow P(C) = \frac{42}{165} = \frac{14}{55}$$

د) D: پیشامد حداقل ۱ مهره آبی (هر سه آبی یا دو آبی و یک غیرآبی یا یک آبی و دو غیرآبی)

$$\Rightarrow n(D) = \binom{4}{1} \times \binom{7}{2} + \binom{4}{2} \times \binom{7}{1} + \binom{4}{3} = 4 \times 21 + 6 \times 7 + 4$$

$$\Rightarrow n(D) = 130 \Rightarrow P(D) = \frac{130}{165} = \frac{26}{33}$$

روش ساده‌تر برای حل قسمت (د) آن است که از پیشامد متمم استفاده کنیم. متمم پیشامد

«حداقل ۱ مهره آبی» یعنی D'، پیشامد «هیچ مهره‌ای آبی» است که معنی آن هر سه غیرآبی بوده و

$$n(D') = \binom{7}{3} = 35$$

$$P(D') = \frac{35}{165} = \frac{7}{33}, \quad P(D) = 1 - P(D') = 1 - \frac{7}{33} = \frac{26}{33}$$

پیشامد «حداکثر ۲ مهره سبز»: E (هـ)

$$E' : \text{پیشامد «هر سه مهره سبز»} \Rightarrow n(E') = \binom{5}{3} = 10$$

$$P(E') = \frac{10}{165} = \frac{2}{33}, \quad P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{2}{33} = \frac{31}{33}$$

مثال ۴: دو تاس را با هم می‌اندازیم، مطلوب است احتمال آن که:

الف) اعداد رو شده هر دو تاس زوج باشند. (ب) اعداد رو شده هر دو تاس مثل هم باشند.

ج) مجموع اعداد رو شده دو تاس ۸ یا اعداد رو شده هر دو تاس زوج باشند. (د) مجموع اعداد رو شده دو تاس کمتر از ۱۰ باشد. (هـ) مجموع اعداد رو شده دو تاس مضرب ۴ باشد.

حل: با توجه به این که دو تاس را همواره دو شیئی متمایز (تاس آبی و تاس قرمز) در نظر می‌گیریم، فضای نمونه‌ای این پدیده تصادفی دارای $6 \times 6 = 36$ عضو است.

$$\text{الف) } A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

$$n(A) = 9 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ب) } B = \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\} \Rightarrow n(B) = 6, \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{ج) } \left\{ \begin{array}{l} C : \text{پیشامد مجموع دو تاس ۸} \Rightarrow C = \{(2,6), (6,2), (5,3), (3,5), (4,4)\} \\ D : \text{پیشامد هر دو تاس زوج} \Rightarrow D = \{(2,2), \dots, (6,4), (6,6)\} \end{array} \right.$$

پیشامد «مجموع اعداد رو شده دو تاس ۸ یا اعداد رو شده هر دو تاس زوج» یعنی پیشامد

$C \cup D$ و طبق قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{5}{36} + \frac{9}{36} - \frac{3}{36} = \frac{11}{36}$$

$$(C \cap D) = \{(2,6), (6,2), (4,4)\}$$

د) E : مجموع دو تاس کمتر از ۱۰

مجموع دو تاس بزرگتر یا مساوی ۱۰: E'

$$E' = \{(6,6), (6,5), (5,6), (6,4), (4,6), (5,5)\} \Rightarrow P(E') = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{و) } P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

پیشامد مجموع دو تاس مضرب ۴ : F (هـ)

در بین اعداد ۲ تا ۱۲ که مجموع دو تاس می‌تواند هریک از این اعداد باشد، مضارب ۴ عبارتند از ۴ و ۸ و ۱۲ بنابراین :

$$F = \{(2,2), (1,3), (3,1), (2,6), (6,2), (5,3), (3,5), (4,4), (6,6)\}$$

$$n(F) = 9, \quad P(F) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

تمرین

۱- کدام یک از پدیده‌های زیر تصادفی است

(الف) انداختن یک تاس که روی هر ۶ وجه آن عدد ۱ حک شده باشد.

(ب) انداختن دو تاس سالم با هم

(ج) به دنیا آمدن یک نوزاد در ماه خرداد

۲- هریک از اعداد فرد و طبیعی کوچک‌تر از ۱۸ را روی یک کارت نوشته و یکی از این کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم ؛

(الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

(ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت بر ۳ بخش‌پذیر باشد را مشخص کنید.

(ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول یا زوج باشد را مشخص کنید.

۳- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، مطلوب است :

(الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

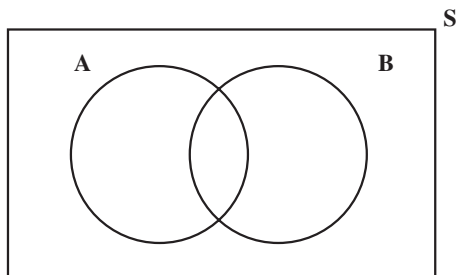
(ب) پیشامد A که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

(ج) پیشامد B که در آن حداقل یک فرزند پسر باشد.

(د) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر از تعداد فرزندان پسر بیشتر باشد.

(هـ) هریک از پیشامدهای $A \cap B$ و $A - C$ و B' را مشخص کنید، آیا پیشامدهای A و C

ناسازگارند؟



۴- با توجه به شکل مقابل پیشامد

$(A - B) \cup (B - A)$ را علامت بزنید. (این

پیشامد را «فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد»

تعریف می‌کنیم.)

۵- تمام اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۵ می توان ساخت، روی کارت های متمایزی نوشته و در یک کیسه قرار می دهیم و سپس یکی از این کارت ها را به تصادف خارج می کنیم مطلوب است :

الف) فضای نمونه ای این پدیده تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۴ باشد.

ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، کوچک تر از ۴۰ باشد.

د) پیشامدهای $(A \cup B)$ و $(A \cap B)$

۶- در تمرین ۵ مطلوب است احتمال آن که :

الف) عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

ب) عدد روی کارت مضرب ۳ یا مضرب ۴ باشد.

ج) عدد روی کارت مضرب ۳ باشد و مضرب ۴ نباشد.

۷- از جعبه ای که حاوی ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب خراب است، ۳ سیب به تصادف برمی داریم، مطلوب است احتمال آن که :

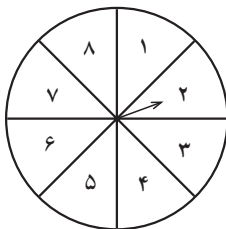
الف) هر سه سیب سالم باشند.

ب) دو سیب، سالم و یکی خراب باشد.

ج) تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های خراب بیشتر باشد.

۸- عقربه ای مطابق شکل زیر و به تصادف پس از به حرکت در آمدن روی یکی از ۸ ناحیه

شکل می ایستد و عددی را نشان می دهد. چقدر احتمال دارد :



الف) عقربه عددی اول را نشان دهد.

ب) عقربه عددی اول یا فرد را نشان دهد.

ج) عقربه روی عدد مضرب ۳ بایستد.

پیشامدهای مستقل

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S بوده و رخداد و یا عدم رخداد هریک تأثیری در رخداد دیگری نداشته باشد، این دو پیشامد را مستقل از هم می‌نامیم. به عنوان مثال به دنیا آمدن فرزندان در یک خانواده پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند و یا انداختن دو تاس آبی و قرمز را در نظر بگیرید و پیشامد A را رو شدن عدد زوج در تاس آبی و پیشامد B را رو شدن عدد اول در تاس قرمز فرض کنید، در این صورت دو پیشامد A و B مستقل از هم می‌باشند زیرا A رخ بدهد یا رخ ندهد پیشامد B می‌تواند رخ دهد.

قانون ضرب احتمالات برای دو پیشامد مستقل

اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ و برعکس اگر تساوی اخیر برقرار باشد دو پیشامد A و B مستقل خواهند بود. توجه داشته باشید که قانون ضرب احتمالات برای هر چند پیشامد که دو به دو مستقل باشند برقرار است.

مثال ۱: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است، مطلوب است احتمال آن که:

الف) فرزندان، به صورت یک در میان پسر و دختر (یا دختر و پسر) باشند.

ب) هر ۳ فرزند پسر باشند.

ج) فرزند سوم دختر باشد.

حل: جنسیت فرزندان در یک خانواده پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند، بنابراین می‌توان

برای حل این مثال از قانون ضرب احتمالات استفاده کرد:

$$A = \{(د, پ, د) \text{ و } (پ, د, پ)\} \text{ الف}$$

$$n(S) = 2^3 = 8, \quad n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{روش اول}$$

$$P(A) = P\{(پ, د, پ)\} + P\{(د, پ, د)\} \quad \text{روش دوم}$$

$$\Rightarrow P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

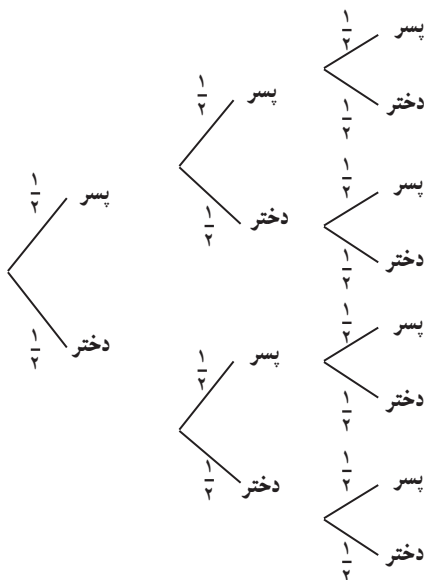
$$B: \text{پیشامد هر ۳ فرزند پسر} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$C: \text{پیشامد فرزند سوم دختر} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{2}$$

توجه دارید که پیشامد جنسیت فرزند سوم با جنسیت فرزندان قبل از خود مستقل است.

تمرین

به نمودار درختی این پدیده دقت کنید و جواب‌های سه قسمت این مثال را از روی نمودار به دست آورید.



مثال ۲: آزمایش‌های انجام شده روی دو شخص A و B نشان می‌دهد که احتمال بهبود شخص A پس از عمل جراحی پیوند کلیه ۸۰٪ و احتمال بهبود شخص B پس از عمل جراحی پیوند کلیه ۶۰٪ است. اگر این دو نفر تحت عمل پیوند کلیه قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو نفر سلامتی خود را به دست آورند.

ب) حداقل یکی از این دو نفر بهبود یابد.

حل: پیشامدهای بهبودی هر یک از این دو نفر مستقل از هم می‌باشد بنابراین:

پیشامد بهبودی هر دو نفر: C (الف)

$$P(C) = \frac{80}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25} \text{ یا } 48\%$$

$$\text{ب) } \begin{cases} A_1: A \text{ پیشامد بهبودی شخص} \\ B_1: B \text{ پیشامد بهبودی شخص} \end{cases}$$

$$P(A_1 \cup B_1) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1 \cap B_1)$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cup B_1) = \frac{80}{100} + \frac{60}{100} - \frac{12}{25} = \frac{7}{5} - \frac{12}{25} = \frac{23}{25} \text{ یا } 92\%$$

مثال ۳: احتمال این که شخصی گروه خونی A^+ داشته باشد ۲۵٪ است و احتمال این که او ناراحتی قلبی داشته باشد ۲۰٪ است و احتمال این که گروه خونی او A^+ یا ناراحتی قلبی داشته باشد ۴۰٪ است چقدر احتمال دارد این شخص هم ناراحتی قلبی داشته باشد و هم گروه خونی او A^+ باشد؟

حل:

روش اول: طبق قانون جمع احتمالات اگر A و B را به ترتیب داشتن گروه خونی A^+ و داشتن ناراحتی قلبی تعریف کنیم، در این صورت داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \Rightarrow \frac{40}{100} = \frac{25}{100} + \frac{20}{100} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{5}{100}$$

روش دوم: دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، بنابراین:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{25}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{500}{10000} = \frac{5}{100}$$

مثال ۴: چقدر احتمال دارد در یک تیم والیبال (تیم ۶ نفره الف) همه در ماه خرداد متولد شده باشند؟ (ب) هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند؟

حل: الف) احتمال به دنیا آمدن یک نفر در یک ماه خاص مانند خرداد، برابر است با $\frac{1}{12}$ و چون متولد شدن افراد در ماه‌های سال پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند در این صورت احتمال به دنیا آمدن هر ۶ نفر در ماه خرداد طبق قانون ضرب احتمالات، برابر است با:

$$P(A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^6$$

ب) اگر فرض کنیم B پیشامد آن باشد که هیچ دو نفری از این ۶ نفر، ماه تولد یکسان نداشته باشد، در این صورت برای نفر اول از این ۶ نفر، هر ۱۲ ماه مطلوب است و نفر دوم در هر ماهی به جز ماه تولد نفر اول می‌تواند متولد شود و نفر سوم در هر ماهی به جز ماه تولد دو نفر قبل و... و برای نفر ششم هر ماه، جز ماه تولد ۵ نفر قبل، مطلوب است بنابراین:

$$P(B) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{385}{1728}$$

تمرین: چقدر احتمال دارد در یک کلاس ۲۵ نفری روز تولد هیچ دو نفری یکسان نباشد؟

مثال ۵: ۶ نفر که دو نفر آن‌ها برادر یکدیگرند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند، چقدر احتمال دارد، (الف) دو برادر کنار هم قرار گرفته باشند (ب) دو برادر در اول و آخر صف واقع شده باشند.

حل: فضای نمونه‌ای عبارت است از کل حالت‌هایی که ۶ نفر می‌توانند در یک ردیف، کنار هم قرار بگیرند که این تعداد حالت برابر است با $n(S) = 6! = 720$ حال اگر پیشامد کنار هم قرار گرفتن دو برادر را A و پیشامد واقع شدن دو برادر در دو طرف صف را B فرض کنیم خواهیم داشت:

(الف) دو برادر را کنار هم قرار داده و ۱ نفر فرض می‌کنیم و با ۴ نفر دیگر ۵ نفر می‌شوند که به ۵! طریق کنار هم قرار می‌گیرند و خود برادرها نیز به ۲! طریق می‌توانند در عین حال که کنار هم هستند با هم جابه‌جا شوند، پس:

$$n(A) = 5! \times 2!$$

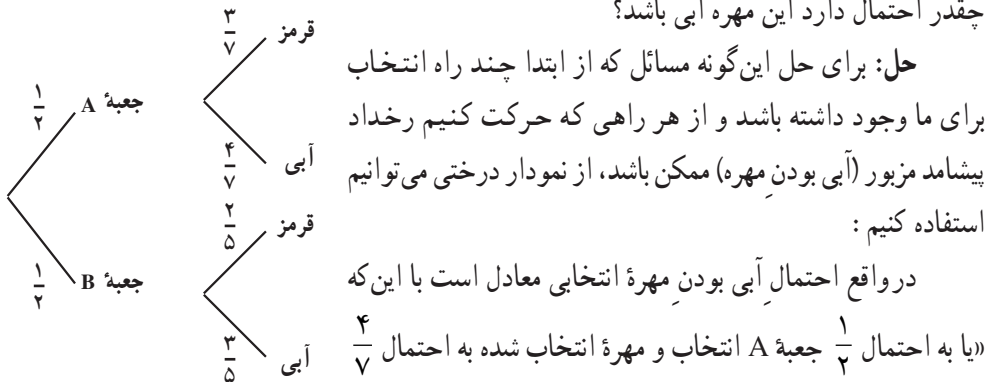
$$\Rightarrow P(A) = \frac{5! \times 2!}{6!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ب) اگر ۶ جایگاه برای این شش نفر در نظر بگیریم در جایگاه اول از سمت چپ هریک از دو برادر می‌توانند قرار بگیرند و جایگاه ششم برادر دیگر و ۴ جایگاه بین آن‌ها توسط ۴ نفر دیگر به ۴! طریق ممکن می‌تواند تغییر کند، لذا:

$$n(B) = 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 2 \times 4!$$

$$P(B) = \frac{2 \times 4!}{6!} = \frac{2}{6 \times 5} = \frac{1}{15}$$

مثال ۶: در جعبه A سه مهره قرمز، ۴ مهره آبی و در جعبه B، ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد، یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و ۱ مهره به تصادف از آن جعبه خارج می‌کنیم، چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟



آبی است و یا به احتمال $\frac{1}{2}$ جعبه B انتخاب و مهره انتخابی از آن به احتمال $\frac{3}{5}$ آبی است»

$$P(\text{آبی}) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{41}{70}$$

مثال ۷: تاسی را سه بار می‌اندازیم مطلوب است احتمال آن که :

الف) هر سه عدد رو شده مثل هم باشند.

ب) هر سه عدد رو شده متمایز باشند. (هیچ دو عددی مثل هم نباشند)

ج) مجموع اعداد رو شده سه تاس بزرگ‌تر از ۱۶ باشد.
حل:

$$\text{الف) } A = \{(1,1,1), (2,2,2), \dots, (6,6,6)\} \rightarrow n(A) = 6, n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

ب) برای این که اعداد رو شده سه تاس متمایز باشند، تاس اول هر عددی می‌تواند باشد که برای آن ۶ حالت ممکن است و تاس دوم هر عددی به جز عدد رو شده در تاس اول می‌تواند باشد یعنی ۵ حالت دارد و برای تاس سوم هر عددی به جز دو عدد رو شده در تاس‌های اول و دوم یعنی ۴ حالت موجود است و لذا طبق اصل ضرب به $6 \times 5 \times 4 = 120$ طریق امکان دارد سه تاس متمایز باشند، بنابراین :

$$P(B) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

$$\text{ج) } C = \{(6,6,6), (6,6,5), (6,5,6), (5,6,6)\} \rightarrow n(C) = 4$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$$

(مجموع اعداد رو شده سه تاس از عدد ۳ تا ۱۸ می‌تواند تغییر کند و مجموع اعداد رو شده بزرگ‌تر از ۱۶ یعنی مجموع دو تاس یا ۱۷ و یا ۱۸ باشد.)

مثال ۸: تاسی را دو بار می‌اندازیم و دو پیشامد A و B را در حالت‌های زیر تعریف می‌کنیم

در هر حالت مستقل بودن یا نبودن دو پیشامد A و B را بررسی کنید :

$$\text{الف) } \begin{cases} \text{پیشامد آن که عدد رو شده تاس اول ۵ باشد : } A \\ \text{پیشامد آن که مجموع اعداد رو شده دو تاس ۱۱ باشد : } B \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} \text{پیشامد آن که عدد رو شده تاس اول ۴ باشد : } A \\ \text{پیشامد آن که مجموع اعداد رو شده دو تاس ۷ باشد : } B \end{cases}$$

حل: الف) با توجه به تعریف دو پیشامد A و B داریم :

$$A = \{(\omega, 1), \dots, (\omega, 6)\} \rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(\omega, 6), (6, \omega)\} \rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$A \cap B = \{(\omega, 6)\} \rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

و چون $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ پس A و B مستقل از هم نیستند.

در این حالت توجه دارید که طبق تعریف نیز به همین نتیجه می‌رسیم زیرا اگر A رخ ندهد (عدم رخداد A) یعنی عدد رو شده تاس اول ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ بیاید، در ۴ حالت اول، پیشامد B یعنی مجموع اعداد رو شده برابر ۱۱ نمی‌تواند رخ بدهد.

ب) در این قسمت نیز مشابه (الف) داریم :

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, \quad B = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

$$A \cap B = \{(4, 3)\}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = P(A) \times P(B)$$

پس A و B مستقل از یکدیگر بوده و با توجه به تعریف نیز همین نتیجه به دست می‌آید زیرا اگر A رخ دهد، B می‌تواند رخ دهد و اگر A رخ ندهد (عدد رو شده تاس اول ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۶ بیاید در هر حالت B یعنی مجموع اعداد رو شده برابر ۷ می‌تواند رخ دهد.

تمرین

۱- یک تاس و یک سکه را با هم می‌اندازیم اولاً فضای نمونه‌ای این پدیده را تشکیل دهید (مجموعه S را مشخص کنید) و سپس احتمال آن را حساب کنید که عدد رو شده تاس عدد اول و سکه پشت بیاید.

۲- در کیسه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره سبز و ۲ مهره قرمز وجود دارد، سه مهره به تصادف و بی‌دری و با جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مهره اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟ اگر این عمل را بدون جایگذاری انجام دهیم چقدر احتمال دارد مهره اول آبی و دومی سبز و سومی آبی باشد؟

۳- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، مطلوب است احتمال آن که :

الف) ۲ فرزند این خانواده پسر باشد. ب) حداقل ۲ فرزند خانواده پسر باشد.

ج) تعداد فرزندان پسر بیشتر از تعداد فرزندان دختر باشد.

۴- ۵ نفر را در نظر می‌گیریم، چقدر احتمال دارد :

الف) هر ۵ نفر در یک روز از هفته متولد شده باشند.

ب) هیچ دو نفری در یک روز از هفته متولد نشده باشند.

۵- احتمال آن که فرزندی در خانواده A با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شود 20% و احتمال

آن که نوزادی در خانواده B با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شود 75% است. چقدر احتمال دارد

حداقل یکی از این دو نوزاد با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شوند؟

(راهنمایی: این دو پیشامد مستقل از هم بوده و $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ است.)

۶- در کیسه‌ای ۳ مهره سیاه و ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد از این کیسه ۳ مهره به

تصادف خارج می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن که :

الف) هیچ دو مهره‌ای همرنگ نباشند.

ب) حداقل دو مهره همرنگ باشند.

ج) هیچ مهره‌ای قرمز نباشد.

۷- احتمال آن که شخص A تا 20 سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند 6% و احتمال آن که شخص

B تا 20 سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند 7% است، چقدر احتمال دارد :

الف) هر دو، تا 20 سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند.

ب) حداقل یکی از آن‌ها تا 20 سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکند.

۸- می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز کلاس دوم و ۷ دانش‌آموز کلاس سوم یک تیم ۳ نفره

به تصادف انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد :

الف) هیچ دانش‌آموز کلاس دوم در تیم نباشد.

ب) تعداد دانش‌آموزان کلاس سوم در تیم انتخابی از تعداد دانش‌آموزان کلاس دوم بیشتر باشد.

۹- دو تاس را با هم می‌اندازیم، مطلوب است احتمال آن که :

الف) حاصلضرب اعداد رو شده دو تاس مضرب ۵ باشد.

ب) اعداد رو شده مضرب ۳ نباشند.

ج) مجموع اعداد رو شده دو تاس ۷ یا هر دو فرد باشند.

د) مجموع اعداد رو شده دو تاس بزرگ‌تر از ۵ باشد.

ه) هر دو تاس بزرگ‌تر از ۲ باشند. (و) مجموع اعداد رو شده دو تاس مضرب ۳ باشد.