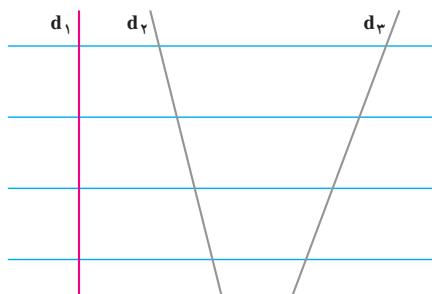


هندسه‌ی ۲



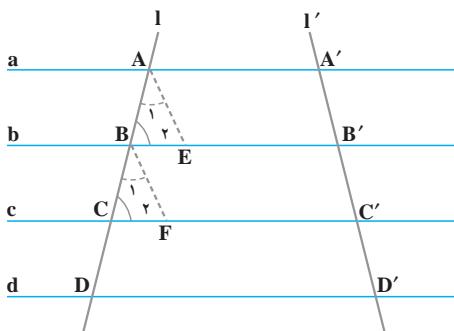
خطوط موازی و قضیه‌ی تالس

خط‌های موازی با فاصله‌های متساوی



در شکل رویه‌رو، خط‌های موازی با فاصله‌های متساوی، سه خط d_1 ، d_2 ، d_3 را قطع کرده‌اند. پاره‌خط‌هایی را که روی هریک از آن‌ها به وجود آمده است، اندازه بگیرید و با هم مقایسه کنید و از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اگر چند خط موازی خطی را قطع کنند و بر روی آن، پاره‌خط‌های متساوی به وجود آورند، این خط‌ها هر خط دیگری را قطع کنند، بر روی آن نیز پاره‌خط‌های متساوی جدا خواهند کرد.



رسم می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که این دو خط با هم موازی‌اند و l قطع کننده‌ی آن‌هاست.

خط‌های موازی a ، b ، c ، و d بر روی خط l پاره‌خط‌های متساوی AB ، BC و CD را جدا کرده‌اند. این خط‌های موازی خط l را هم در A' ، B' ، C' و D' قطع کرده‌اند. ثابت می‌کنیم که پاره‌خط‌های $A'B'$ و $B'C'$ متساوی‌اند. برای این کار، AE و BF را موازی با l

$\angle A_1 \neq B_1$

پس،

همچنین خط های b و c متوازی اند و ۱ قطع کننده‌ی آن هاست؛ پس،

$\angle B_2 \neq C_2$

$AB = BC$

و می‌دانیم که :

$\Delta ABE \cong BCF$

بنابراین، (زض ز) :

$AE = BF \quad (1)$

درنتیجه :

چون چهار ضلعی های $AA'B'E$ و $BB'C'F$ متوازی الاضلاع اند؛ پس،

$BF = B'C' \quad (3)$

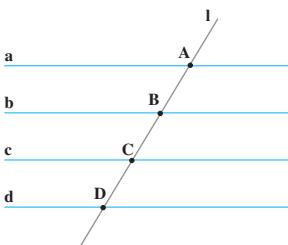
و $AE = A'B' \quad (2)$

$(3), (2), (1)$

$\Rightarrow A'B' = B'C'$

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که $C'D' = D'C$ ؛ بنابراین، پاره خط هایی که روی ۱ جدا شده اند، متساوی اند.

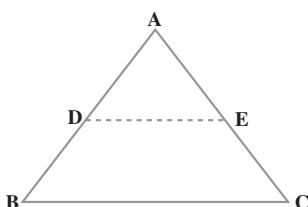
کار در کلاس



۱- خط های a, b, c, d و d متوازی و با
فاصله های مساوی اند و $AB = 2\text{cm}$ است.
تساوی های زیر را کامل کنید.

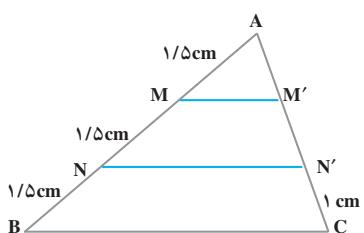
$$BC = \dots \text{ cm}, \quad CD = \dots \text{ cm}$$

$$AC = \dots \text{ cm}, \quad BD = \dots \text{ cm}$$



۲- نقطه‌ی D و سطح ضلع AB و
است. چرا E و سطح ضلع AC است؟
(راهنمایی: از A خطی موازی با BC رسم
کنید).

به طور کلی، خطی که از وسط یک ضلع مثلث موازی با ضلع دیگر رسم شود، از
وسط ضلع سوم هم می‌گذرد.

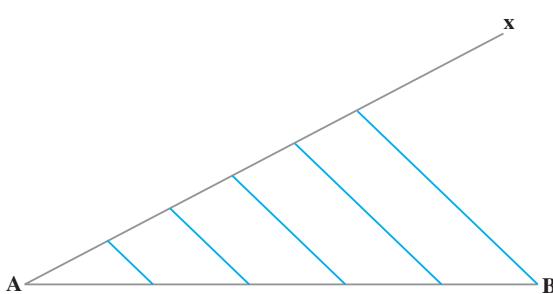


۳- $MM' \parallel NN' \parallel BC$ ؛ اندازه های

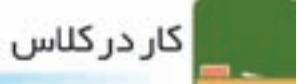
MN' و AM' چه قدر است؟



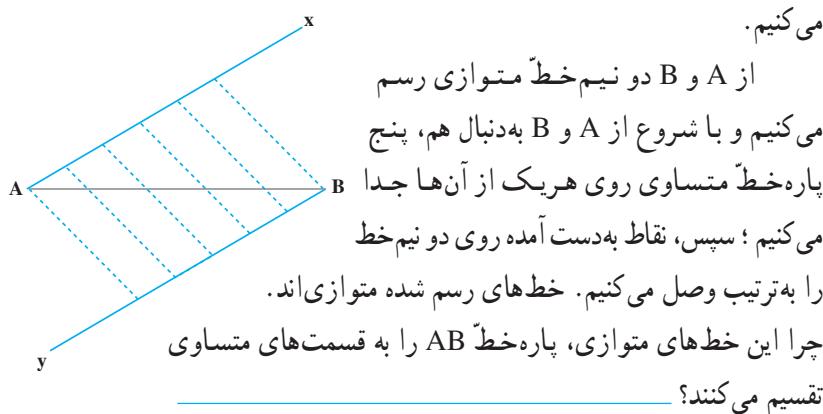
تقسیم پاره خط به قطعات متساوی



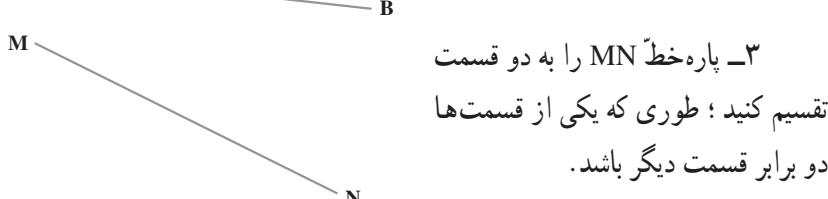
اگر بخواهیم پاره خط AB را به قسمت های متساوی - مثلاً به پنج قسمت متساوی - تقسیم کنیم، چنین عمل می کنیم؛ ابتدا نیم خط AX را رسم می کنیم و با شروع از نقطه A ، پنج پاره خط متساوی به دنبال هم روی آن جدا می کنیم؛ سپس، آخرین نقطه را به B وصل می کنیم و از سایر نقاط، خطوطی موازی با آن رسم می کنیم. این پاره خط ها، AB را به پنج قسمت متساوی تقسیم می کنند.



۱- به روش دیگری هم می توان یک پاره خط را به قسمت های متساوی تقسیم کرد؛ مثلاً، برای تقسیم کردن پاره خط AB به پنج قسمت متساوی، به صورت زیر عمل می کنیم.



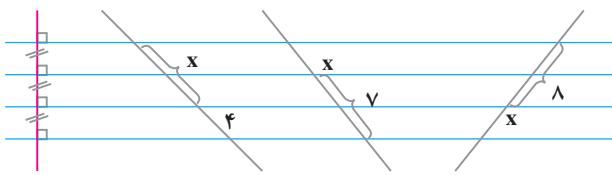
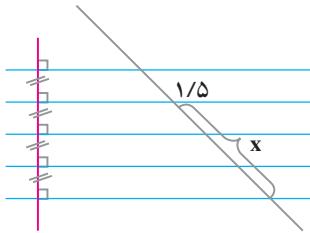
۲- AB را به سه قسمت متساوی تقسیم کنید.



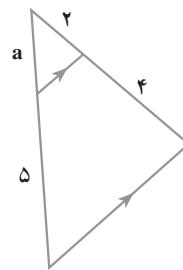
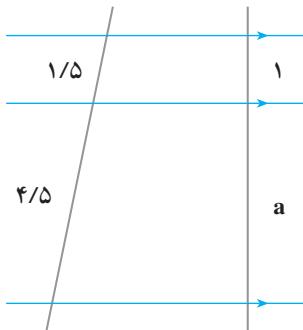
تمرین



۱- در هریک از شکل‌های زیر، x چه عددی است؟



۲- در هریک از شکل‌های زیر، a چه عددی است؟

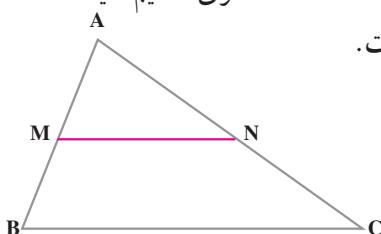


۳- دو پاره خط رسم کنید؛ سپس، یکی از آن‌ها را به دو قسمت و دیگری را به سه قسمت متساوی تقسیم کنید.

۴- پاره خطی به طول ۷ سانتی‌متر رسم کنید و آن را به ۶ قسمت متساوی تقسیم کنید.

۵- در شکل مقابل، M وسط AB و $MN \parallel BC$ است.

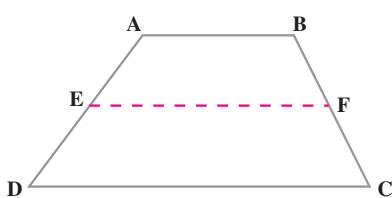
آیا نقطه‌ی N وسط AC است؟



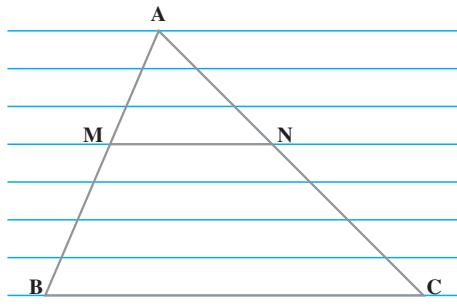
نسبت $\frac{AN}{NC}$ چه قدر است؟

نسبت $\frac{AN}{AC}$ چه قدر است؟

۶- نقطه‌ی E وسط ساق AD و EF با دو قاعده‌ی ذوزنقه موازی است. چرا نقطه‌ی F وسط ساق BC است؟

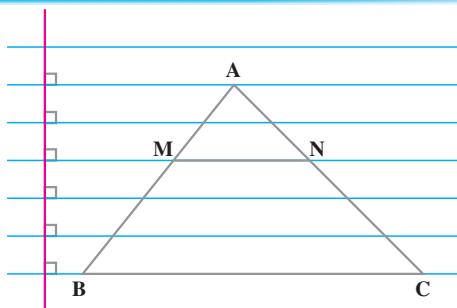


قضیه‌ی تالس



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

در شکل رویه‌رو، خط MN با ضلع BC موازی است و خط‌های آبی متوازی و با فاصله‌های مساوی‌اند. مشاهده می‌کنید که نسبت NC به MB برابر با $\frac{3}{2}$ و نسبت AN به AM هم برابر با $\frac{3}{2}$ است. از موازی بودن MN با BC ، تناسب مقابله حاصل می‌شود.



۱- به شکل رویه‌رو توجه

کنید؛

اکنون، مقدار هریک از نسبت‌های زیر را بنویسید و با توجه به نتیجه‌ی بهدست آمده، در هر سطر یک تساوی بنویسید.

$$\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\frac{AM}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{AN}{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$$

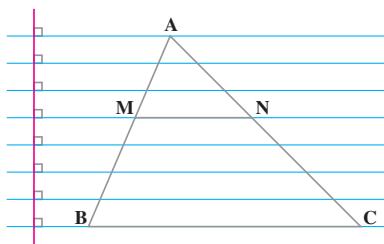
$$\underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{MB}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{NC}{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

۲- با توجه به شکل، تساوی‌های زیر را کامل کنید.



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

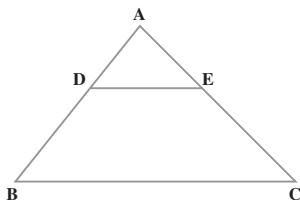
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

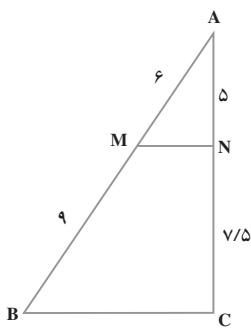
$$\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$$

$$\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$$



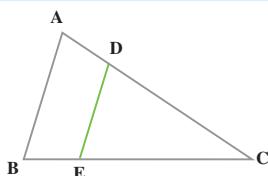
این خاصیت که اگر خطی به موازات یکی از ضلعهای مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند، روی آنها پاره خطهای متناسب جدا می‌کند، به **قضیه‌ی تالس** مشهور است. «تالس، ریاضی‌دان یونانی (۵۴۸–۶۲۴ ق.م) برای اولین بار به این خاصیت بی‌برده است.» در شکل مقابل، خط DE با ضلع BC موازی است؛ درنتیجه:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$



عكس قضیه‌ی تالس نیز درست است؛ یعنی، اگر خطی چنان رسم شود که دو ضلع مثلثی را قطع کرده و روی آنها پاره خطهای متناسب جدا کند، آن خط با ضلع سوم موازی است. مثلاً در شکل $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ که $\frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$ و $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$ روبرو می‌بینیم که پس، از این تساوی نتیجه می‌گیریم که MN با BC موازی است.

کار در کلاس

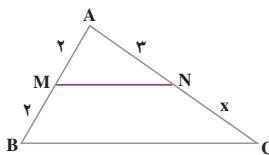


$$\text{نسبت } \frac{CE}{EB} \text{ برابر با چه } \frac{CD}{DA} = \frac{5}{2} \text{ و } AB \parallel DE - ۱$$

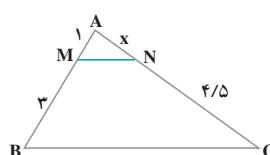
عددی است؟

۲- در هر شکل، MN با BC موازی است. به کمک رابطه‌ی تالس تعیین کنید

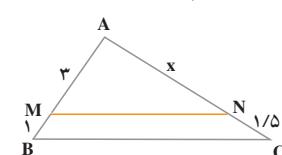
که X چه عددی است.



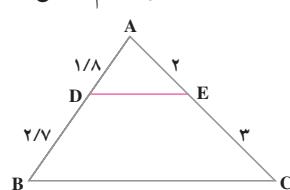
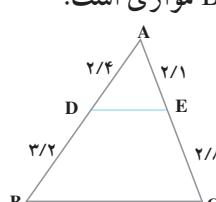
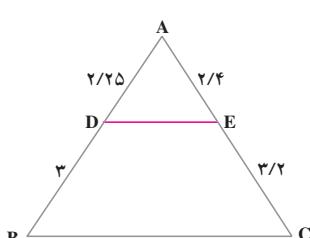
$$X = \underline{\hspace{2cm}}$$



$$X = \underline{\hspace{2cm}}$$



$$X = \underline{\hspace{2cm}}$$

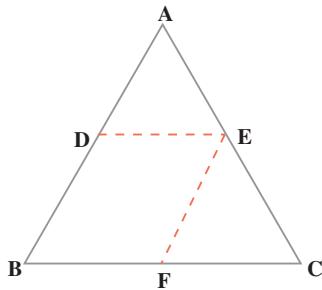


۳- در کدام شکل، DE با BC موازی است؟



در شکل روبرو خط DE با ضلع BC موازی است :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (1) \quad \text{درنتیجه،}$$



همچنین، خط EF با ضلع AB موازی است ؛ پس، (۲)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} \quad \text{از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که}$$

و چون چهارضلعی DEFB متوازی‌الاضلاع است، پس، $DE = BF$ ؛ بنابراین :

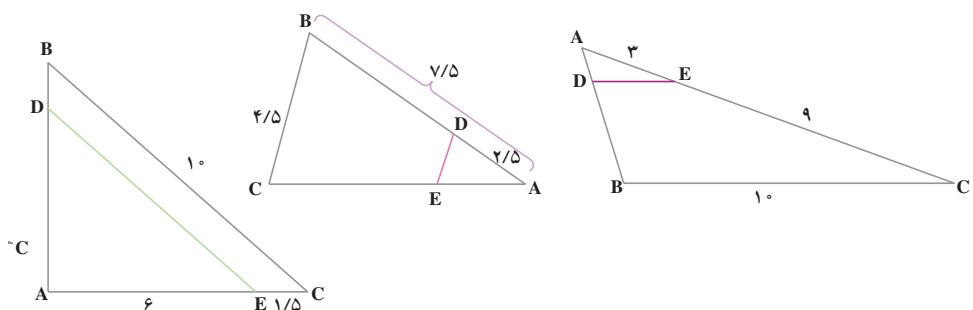
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

يعني، اضلاع دو مثلث ADE و ABC نظیر به نظیر متناسب‌اند.

به طور کلی : اگر خطی موازی با یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر آن را قطع کند، با آن دو ضلع مثلثی می‌سازد که ضلع‌هایش با اضلاع مثلث اول متناسب است.



۱- در هر شکل، DE با BC موازی است. اندازه‌ی DE را حساب کنید.

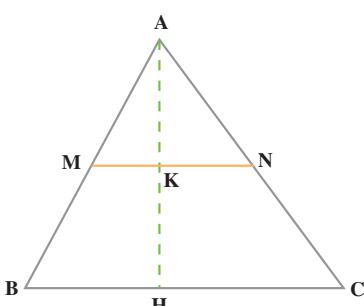


MN||BC و AB میانه است. اگر اندازه‌ی BC برابر با ۱۰ سانتی‌متر

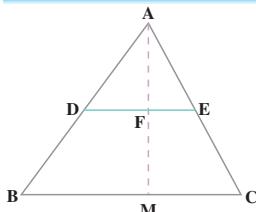
باشد، اندازه‌ی پاره‌خط MN چه قدر است؟

اگر اندازه‌ی ارتفاع AH برابر با ۸

سانتی‌متر باشد، اندازه‌ی ارتفاع AK چه قدر است؟

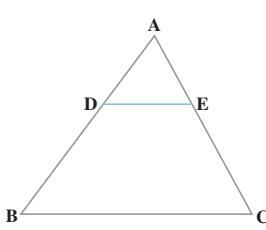


تمرین



۱- D وسط AB و E وسط AC است. نسبت $\frac{AF}{FM}$ چه قدر

است؟ نسبت $\frac{AF}{AM}$ چه قدر است؟

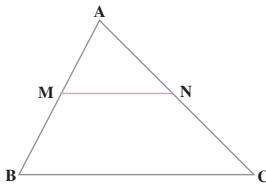


۲- با BC موازی است و $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{2}$. مقدار هریک از

نسبت‌های زیر را تعیین کنید.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DB}{AD} =$$

$$\frac{EC}{AE} = \frac{DB}{AB} =$$

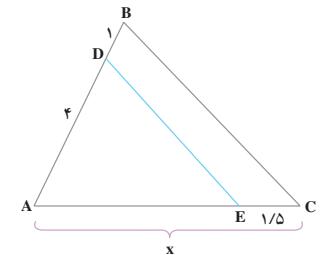
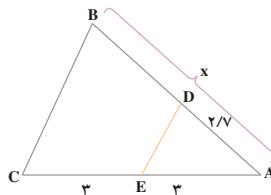
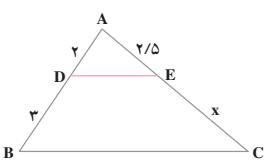


۳- MN با ضلع BC موازی است و M وسط AB است.

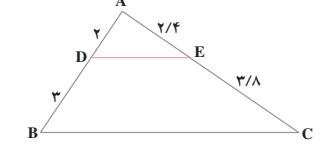
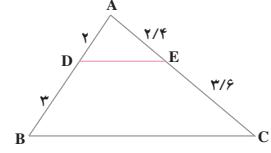
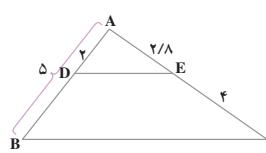
نسبت $\frac{AM}{AB}$ چه قدر است؟ نسبت $\frac{AN}{NC}$ چه قدر است؟



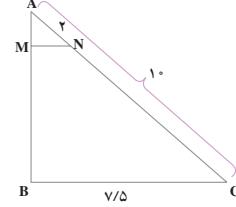
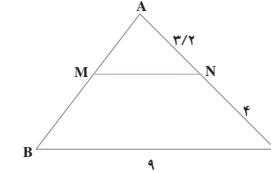
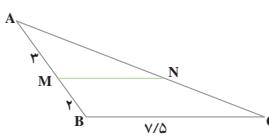
۴- در هر شکل، DE با BC موازی است. مقدار x را تعیین کنید.



۵- در کدام شکل، DE با BC موازی است؟



۶- در هر شکل، MN با BC موازی است. اندازه‌ی پاره‌خط MN را حساب کنید.

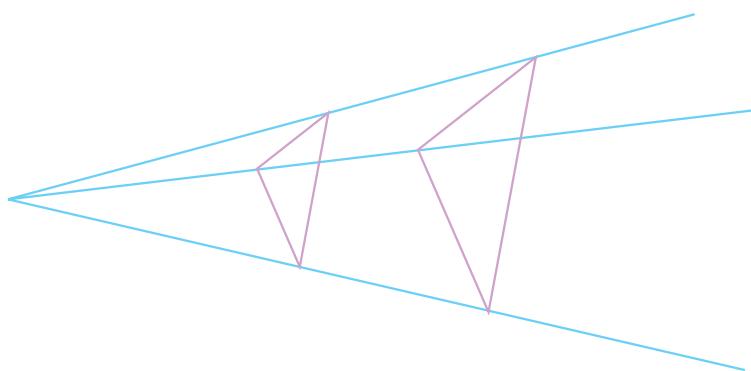


تشابه



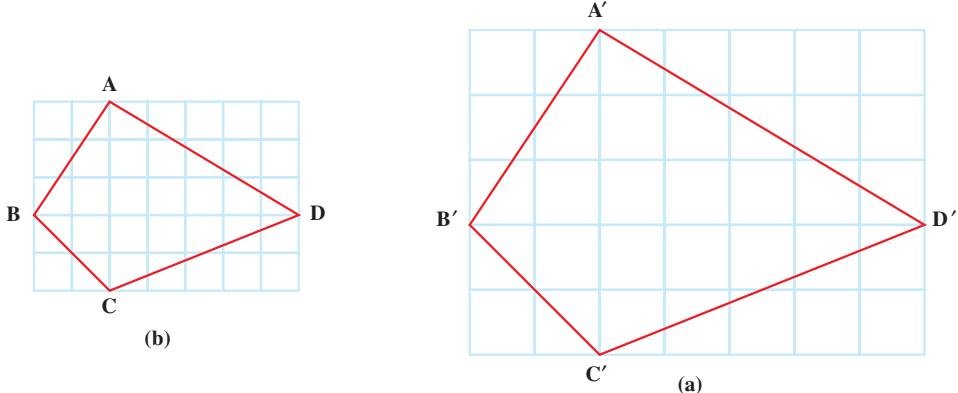
شکل های متشابه

دو تصویر زیر که از یک منظره تهیه شده‌اند، فقط از لحاظ اندازه‌ها با هم تفاوت دارند. این دو تصویر متشابه‌اند.





فعالیت



شکل a بزرگ شده‌ی شکل b است. همه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را اندازه بگیرید.

بین ضلع‌های متناظر در دو شکل چه رابطه‌ای وجود دارد؟

بین زاویه‌های متناظر در دو شکل چه رابطه‌ای وجود دارد؟

دو چند ضلعی، در صورتی متشابه‌اند که تعداد اضلاع آن‌ها مساوی، ضلع‌های متناظر آن‌ها متناسب و زاویه‌های متناظر آن‌ها متساوی باشند.

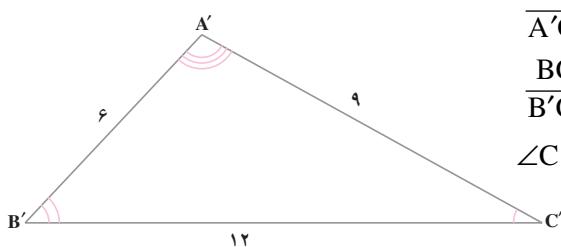
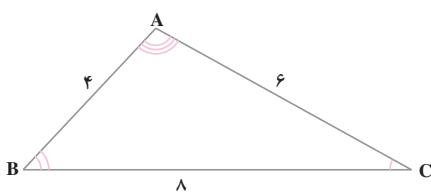
دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه‌اند؛ زیرا:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

و $\angle C \asymp \angle C'$, $\angle B \asymp \angle B'$, $\angle A \asymp \angle A'$



بعنی، در این دو مثلث، اضلاع متناسب و زوایا متساوی‌اند؛ پس متشابه‌اند. عدد $\frac{2}{3}$ یا $\frac{3}{2}$ را

نسبت تشابه این دو مثلث می‌گوییم و متشابه بودن آن‌ها را به صورت زیر می‌نویسیم.

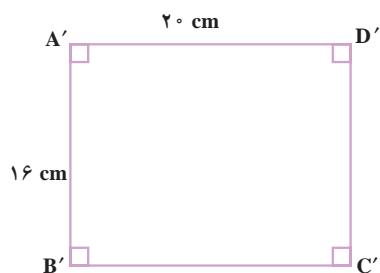
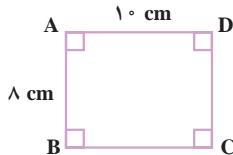
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$



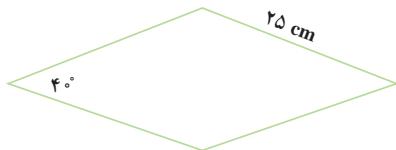
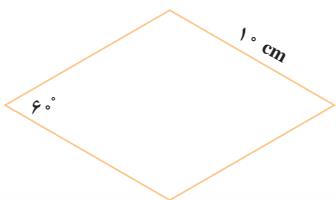
مستطیل‌های $A'B'C'D'$ و $ABCD$ نیز متشابه‌اند؛ زیرا با توجه به اندازه‌های داده شده،

داریم:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{DC}{D'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2}$$

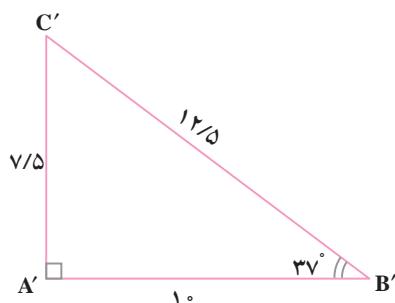
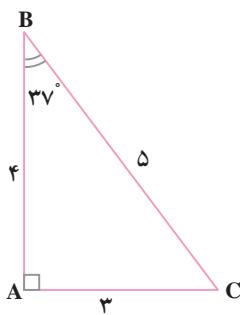


بنابراین، اضلاع متناسب‌اند و زوایای آن‌ها نظیر به نظیر متساوی‌اند.
در این دو لوزی، ضلع‌ها متناسب‌اند ولی زاویه‌های متناظر آن‌ها متساوی نیستند؛ پس، این دو لوزی متشابه نیستند.



کار در کلاس

۱— با توجه به شکل‌های زیر، هر تساوی را با یک عدد کامل کنید.



$$\frac{AB}{A'B'} = \dots$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \dots$$

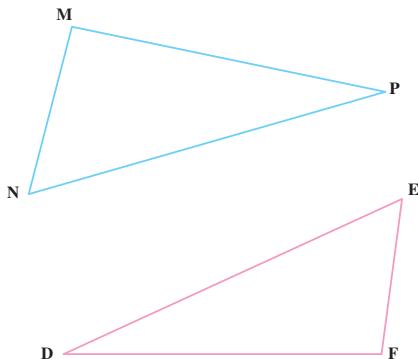
$$\frac{BC}{B'C'} = \dots$$

$$\hat{C} = \hat{C}' = \dots$$

$$\hat{B} = \hat{B}' = \dots$$

$$\hat{A} = \hat{A}' = \dots$$

آیا این دو مثلث متشابه‌اند؟ نسبت تشابه آن‌ها چیست؟



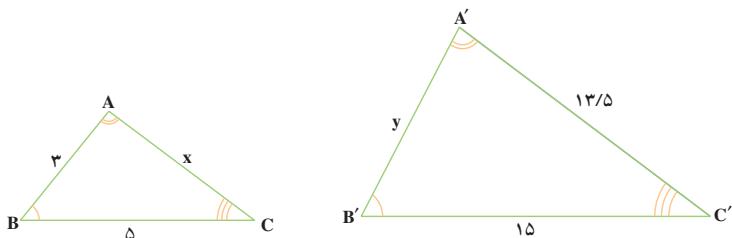
۲- دو مثلث MNP و DEF متشابه‌اند و تناوب بین اضلاع آن‌ها به صورت $\frac{MN}{EF} = \frac{MP}{DF} = \frac{PN}{DE}$ است. تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\hat{M} = \dots$$

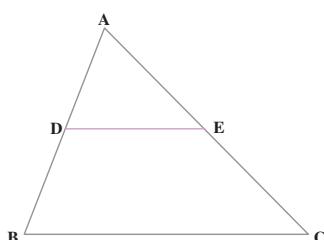
$$\hat{N} = \dots$$

$$\hat{P} = \dots$$

۳- دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند و زاویه‌های متناظر آن‌ها مشخص شده است. تناوب بین ضلع‌های متناظر را بنویسید و سپس، مقادیر x و y را تعیین کنید.



۴- با ضلع BC موازی است. آیا اضلاع دو مثلث ABC و ADE متناسب‌اند؟



چرا زاویه‌های آن‌ها متساوی‌اند؟

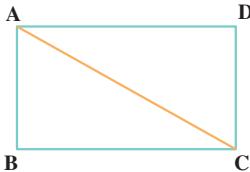
آیا این دو مثلث متشابه‌اند؟



۱- چرا هر دو مربع دلخواه، متشابه‌اند؟

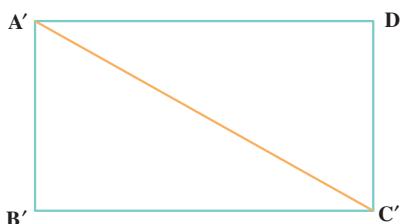


۲- دو مستطیل $ABCD$ و $A'B'C'D'$ متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{3}{4}$ است. با نوشتן یک عدد، هر تساوی را کامل کنید.



$$\frac{AB}{A'B'} = \underline{\hspace{2cm}}$$

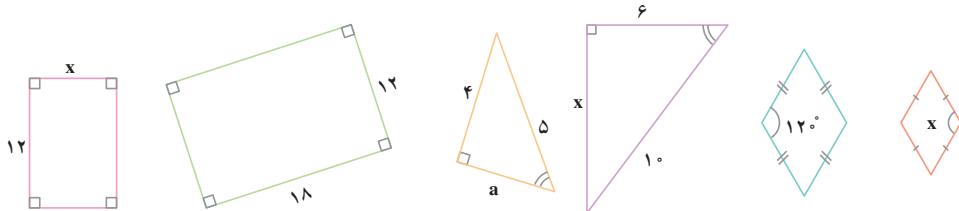
$$\frac{B'C'}{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$$



$$\frac{AC}{A'C'} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{CD}{C'D'} = \underline{\hspace{2cm}}$$

۳- دو لوزی متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{3}{5}$ است. اگر اندازهٔ ضلع یکی از آن‌ها ۱۵ سانتی‌متر باشد، اندازهٔ ضلع دیگری چه قدر است؟ (دو جواب)
۴- هر دو شکلی که در کنار هم رسم شده‌اند، مشابه‌اند؛ مقادیر مجهول را حساب کنید.



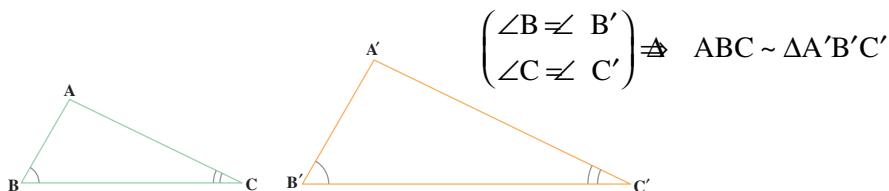
۵- نقشه‌ی هر مکان با آن مکان متشابه است و نسبت تشابه آن‌ها را مقیاس نقشه گویند. اگر مقیاس نقشه‌ای $\frac{1}{1000}$ و فاصله‌ی دو نقطه در نقشه ۴ سانتی‌متر باشد، فاصله‌ی نقاط متناظر آن‌ها در طبیعت چه قدر است؟

اگر زاویه‌ی بین دو خط، در نقشه 45° باشد، زاویه‌ی بین خط‌های متناظر آن‌ها در طبیعت چه قدر است؟

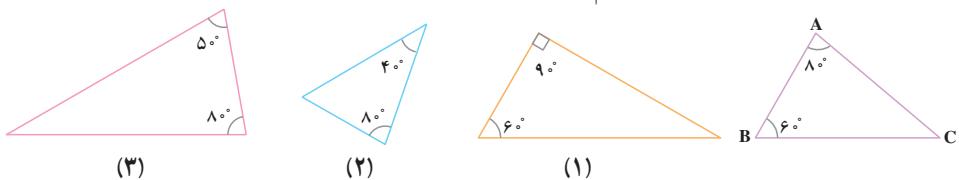
تشابه دو مثلث

از آن‌چه دربارهٔ تشابه دو چندضلعی گفته شد، می‌توان نتیجه گرفت که اگر زاویه‌های دو مثلث، دو به دو متساوی و ضلع‌های روبروی زاویه‌های متساوی، متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. البته به سبب ویژگی‌هایی که مثلث دارد، با بعضی از شرایط مذکور می‌توان متشابه بودن دو مثلث را نتیجه گرفت.

الف – اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر متساوی باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

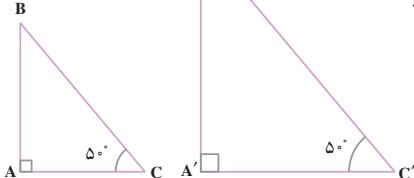


۱- مثلث ABC با کدام یک از سه مثلث دیگر متشابه است؟



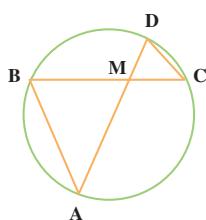
۲- چرا دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC و A'B'C' متشابه‌اند؟

تناسب بین اضلاع متناظر آن‌ها را بنویسید.



۳- چرا دو مثلث MAB و MCD متشابه‌اند؟

تناسب بین اضلاع آن‌ها را بنویسید.



۴- آیا دو مثلث متساوی الساقین که یک زاویه‌ی رأس مساوی داشته باشند، متشابه‌اند؟

۵- چرا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابه‌اند؟

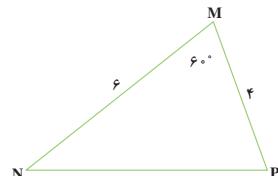
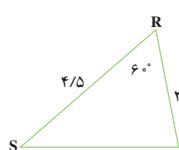
۶- چرا هر دو مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین متشابه‌اند؟

ب- اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه‌های بین آن‌ها متساوی باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند؟

مثلاً در دو مثلث MNP و RST داریم:

$$\frac{MN}{RS} = \frac{MP}{RT} = \frac{4}{3}$$

$$\hat{R} = \hat{M} = 60^\circ$$



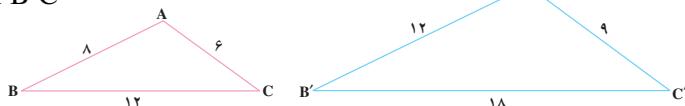
بنابراین $\Delta MNP \sim \Delta RST$

پ- اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند؛ مثلاً در دو مثلث ABC و A'B'C' داریم:

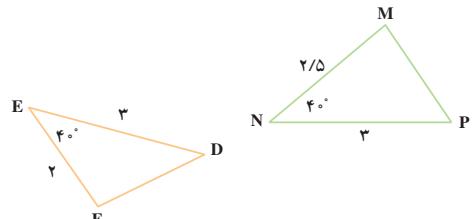
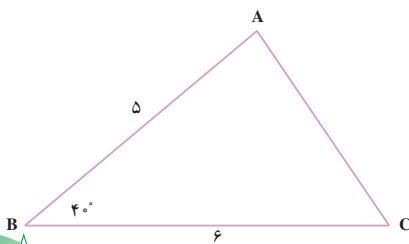
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{2}{3}$$

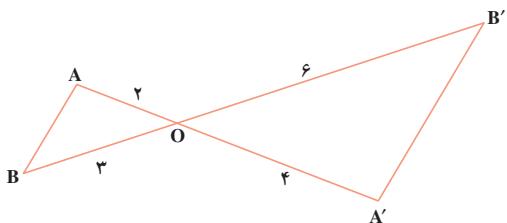
بنابراین

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



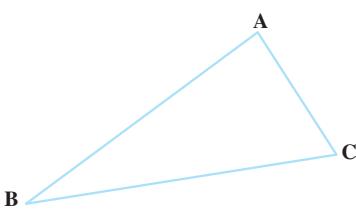
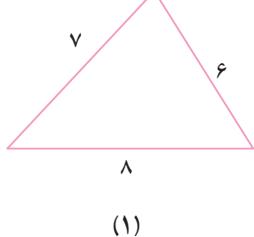
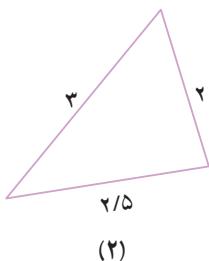
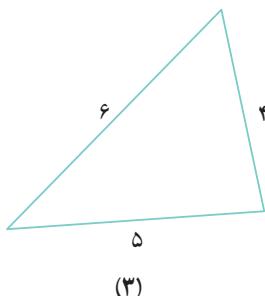
۱- کدام دو مثلث متشابه‌اند؟



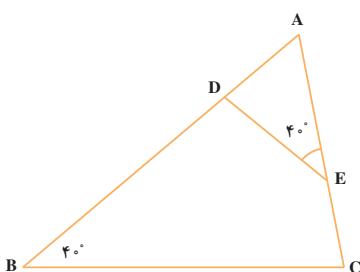


۲- چرا دو مثلث OAB و $OA'B'$ متشابه‌اند؟ تناسب بین اضلاع آن‌ها را بنویسید و زاویه‌های متناظر را مشخص کنید.

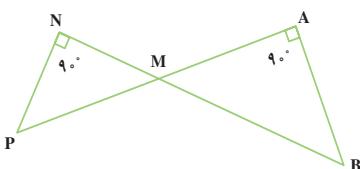
۳- کدام دو مثلث متشابه‌اند؟



۴- مثلثی رسم کنید که با مثلث ABC متشابه و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{1}{2}$ و بزرگ‌تر از ABC باشد.

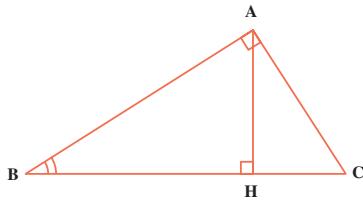


۱- چرا دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند؟ تناسب بین اضلاع آن‌ها را بنویسید و زاویه‌های متناظر را در دو مثلث مشخص کنید.



۲- ثابت کنید که دو مثلث MAB و MNP متشابه‌اند. تناسب بین ضلع‌های متناظر را بنویسید.

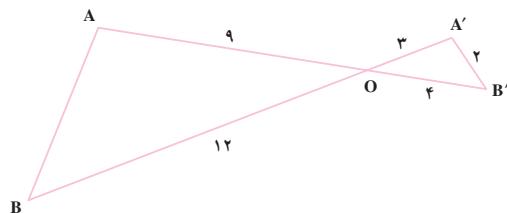




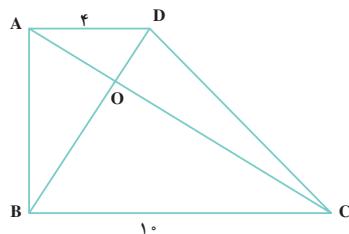
۳- AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه ABC

است. ثابت کنید:

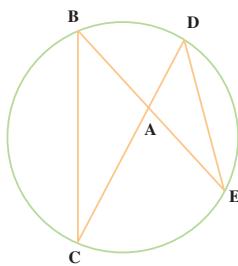
$$\Delta ABC \sim \Delta AHB$$



۴- ثابت کنید که دو مثلث OAB و $OA'B'$ متشابه‌اند؛ سپس، اندازه‌ی AB را حساب کنید.

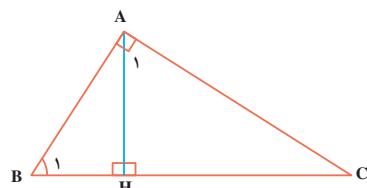


۵- چهارضلعی $ABCD$ ذوزنقه است. ثابت کنید که دو مثلث OAD و OBC متشابه‌اند. نسبت تشابه این دو مثلث چه قدر است؟



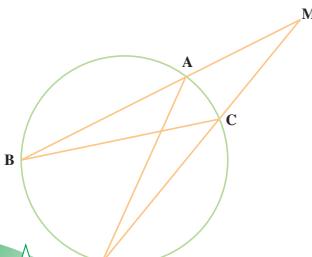
۶- ثابت کنید که دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند و از آن جا نتیجه بگیرید:

$$AB \times AE = AD \times AC$$



۷- AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه ABC است. ثابت کنید که $\Delta AHB \sim \Delta AHC$ است؛ سپس، نسبت اضلاع متناظر آن‌ها را بنویسید و از آن نتیجه بگیرید.

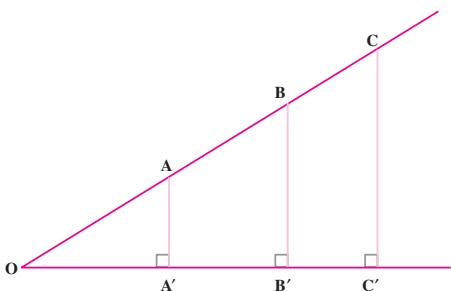
$$AH^2 = BH \cdot HC$$



(راهنمایی: زاویه‌های A_1 و B_1 متمم زاویه‌ی C هستند).

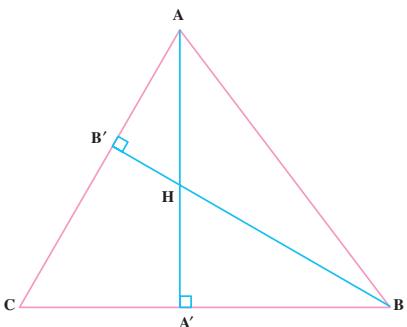
۸- چرا دو مثلث MBC و MAD متشابه‌اند؟ نسبت بین اضلاع متناظر آن‌ها را بنویسید و رابطه‌ی زیر را به دست آورید.

$$MA \times MB = MC \times MD$$



۹- در شکل مقابل، $\frac{AA'}{OA'} = \frac{3}{5}$ است.

هریک از نسبت‌های $\frac{CC'}{OC'}$ و $\frac{BB'}{OB'}$ را حساب کنید.

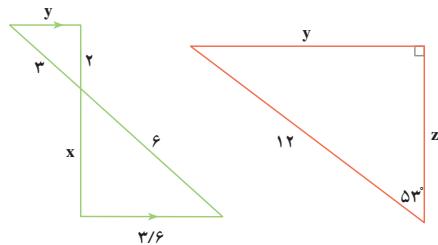
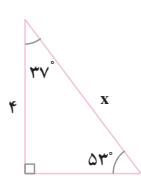
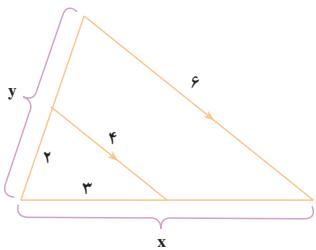


۱۰- AA' و BB' دو ارتفاع مثلث ABC

هستند؛ ثابت کنید:

$$\Delta AHB' \sim \Delta BHA'$$

۱۱- در هر شکل، پاره خط‌های مجهول را حساب کنید.



سرگرمی‌وریاضی

محسن و محمود در پارک قدم می‌زنند. محسن گفت: «آیا می‌توانی بگویی

ارتفاع این درخت چند متر است؟» محمود جواب

داد: «اکنون با یک تکه چوب ارتفاع آن را حساب

می‌کنم.» او با یک تکه چوب ۱ متری این کار را

انجام داد. آیا شما نیز می‌توانید ارتفاع درخت را

حساب کنید؟

